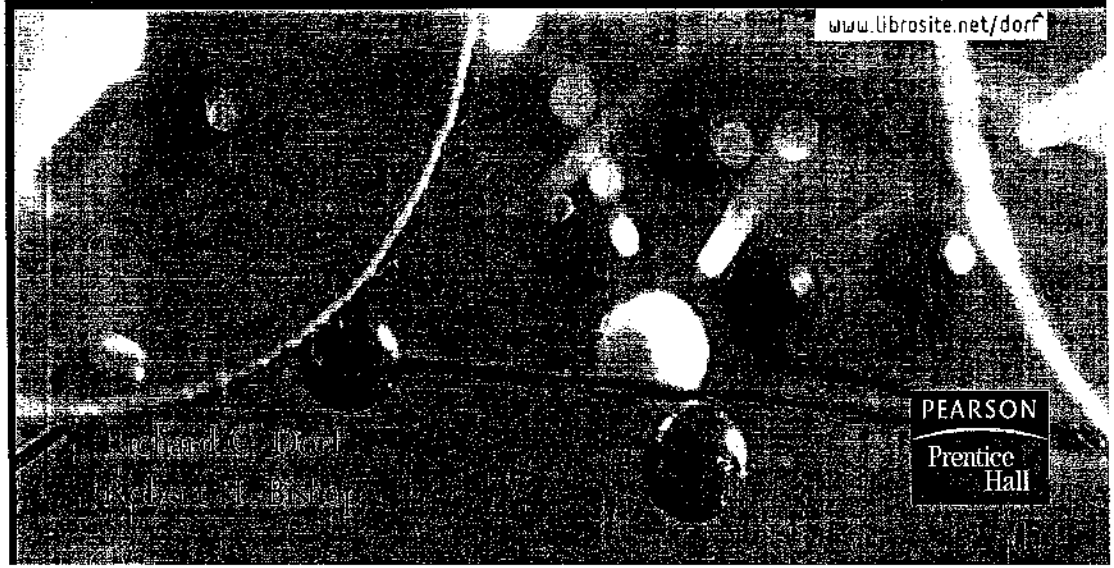
10ª edición

Sistemas de control moderno

www.librosite.net/dorf



Richard C. Dorf
Robert H. Bishop

PEARSON
Prentice Hall

Sistemas de control moderno

Sistemas de control moderno
Décima edición

RICHARD C. DORF
University of California, Davis
ROBERT H. BISHOP
The University of Texas at Austin

Traducción
Sebastián Dormido Canto
Raquel Dormido Canto

Revisión técnica
Sebastián Dormido Bencomo
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)

PEARSON
Prentice Hall

Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

SISTEMAS DE CONTROL MODERNO
Dorf, R. C.; Bishop, R. H.

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2005

ISBN: 84-205-4401-9
Materia: Ingeniería de control automático, 6185.5

Formato 195 × 250 mm Páginas: 928

Todos los derechos reservados.
Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual *(arts. 270 y sgts. Código Penal)*.

DERECHOS RESERVADOS
© 2005 por PEARSON EDUCACIÓN, S.A.
Ribera del Loira, 28
28042 Madrid (España)

SISTEMAS DE CONTROL MODERNO
Dorf, R. C.; Bishop, R. H.

ISBN: 84-205-4401-9
Depósito legal: M. 17.686-2005

PEARSON PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Authorized translation from the English language edition, entitled MODERN CONTROL SYSTEMS, 10th Edition by DORF, RICHARD C.; BISHOP, ROBERT H., published by Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall, Copyright ©2005.
ISBN 0-13-145733-0
All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission form Pearson Education, Inc.

Equipo editorial:
Editor: Miguel Martín-Romo
Técnico editorial: Marta Caicoya

Equipo de producción:
Director: José Antonio Clares
Técnico: Tini Cardoso

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de Pearson Educación, S.A.

Composición: COPIBOOK, S.L.

Impreso en: Fernández Ciudad, S. L.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

Ejemplos de Diseño y Problemas de Diseño (PD)

CAPÍTULO 1		PÁGINA
Ejemplo	Control de velocidad de una mesa giratoria	24
Ejemplo	Sistema de control para la dosificación de insulina	26
Ejemplo	Sistema de lectura de una unidad de disco	27
PDC1.1	Control del motor de una unidad de tracción	35
PD1.1	Control del ruido de un automóvil	35
PD1.2	Control de velocidad de un automóvil	35
PD1.3	Automatización de una granja lechera	35
PD1.4	Control de soldadura	35
PD1.5	Control de tracción de un automóvil	35
PD1.6	Reducción de la vibración en el telescopio Hubble	36

CAPÍTULO 2		
Ejemplo	Control de un motor de tracción eléctrico	79
Ejemplo	Acelerómetro mecánico	82
Ejemplo	Robot de laboratorio	84
Ejemplo	Filtro paso-baja	86
Ejemplo	Sistema de lectura de una unidad de disco	102
PDC2.1	Control del motor de una unidad de tracción	125
PD2.1	Selección de funciones de transferencia	125
PD2.2	Circuito del haz de un aparato de televisión	125
PD2.3	Determinación de una función de transferencia	126
PD2.4	Circuito diferenciador con amplificador operacional	126

CAPÍTULO 3		
Ejemplo	Impresora con transmisión por correa	163
Ejemplo	Sistema de lectura de una unidad de disco	173
PDC3.1	Control del motor de una unidad de tracción	188
PD3.1	Amortiguador de una motocicleta	188
PD3.2	Ecuación diferencial matricial diagonal	188
PD3.3	Engranaje de parada de un avión	188
PD3.4	Sistema de salto con cuerda elástica	188

CAPÍTULO 4		
Ejemplo	Máquinas taladradoras en el canal inglés	209
Ejemplo	Vehículo explorador de Marte	212
Ejemplo	Sistema de lectura de una unidad de disco	219
PDC4.1	Control del motor de una unidad de tracción	238
PD4.1	Sistema de control de velocidad	238
PD4.2	Control del ángulo de balanceo de un avión	238
PD4.3	Sistema de control de velocidad	238
PD4.4	Cirugía mediante láser en el ojo	238
PD4.5	Circuito amplificador operacional para generar un pulso corto	240
PD4.6	Robot acuático	240

CAPÍTULO 5		
Ejemplo	Control de apuntamiento del telescopio Hubble	279
Ejemplo	Sistema de lectura de una unidad de disco	291
PDC5.1	Control del motor de una unidad de tracción	306
PD5.1	Control de balanceo de un avión de guerra	306
PD5.2	Control de posición de un brazo de soldadura	306
PD5.3	Sistema de suspensión activa de un automóvil	306
PD5.4	Control de orientación de un satélite espacial	307
PD5.5	Robot para el desbastado de piezas mecánicas	307
PD5.6	Control de posición de un motor de cc	308

CAPÍTULO 6		
Ejemplo	Control de giro de un vehículo en un circuito con vías	329
Ejemplo	Sistema de lectura de una unidad de disco	339
PDC6.1	Control del motor de una unidad de tracción	350
PD6.1	Control del encendido de un automóvil	350
PD6.2	Control de un vehículo guiado en Marte	350
PD6.3	Selección de parámetro 350	
PD6.4	Lanzadera espacial	350
PD6.5	Sistema de control de tráfico	350
PD6.6	Motocicleta controlada por robot	351
PD6.7	Control de lazo interno y externo	351

CAPÍTULO 7		
Ejemplo	Sistema de control de un manipulador láser	393
Ejemplo	Sistema de control de un robot	396
Ejemplo	Sistema de lectura de una unidad de disco	404
PDC7.1	Control del motor de una unidad de tracción	424
PD7.1	Control de la velocidad de cabeceo de un avión	424
PD7.2	Control de velocidad de un helicóptero de dos rotores	424
PD7.3	Vehículo explorador de Marte	425
PD7.4	Soldador controlado de forma remota	425
PD7.5	Avión de reacción de elevadas prestaciones	425
PD7.6	Control automático del movimiento de caminar	425
PD7.7	Sistema de control de un amplificador operacional	426
PD7.8	Actuador de la articulación del brazo de un robot	426
PD7.9	Automóvil con control en las cuatro ruedas	426
PD7.10	Control de una grúa piloto	427
PD7.11	Vehículo explorador planetario	427
PD7.12	Control de distancia de un automóvil	428
PD7.13	Piloto automático del ángulo de balanceo de un avión	429

CAPÍTULO 8
Ejemplo Sistema de control de una máquina de estampación 461
Ejemplo Sistema de lectura de una unidad de disco 471
PDC8.1 Control del motor de una unidad de tracción 491
PD8.1 Sistema de dirección de un automóvil 491
PD8.2 Explorador planetario autónomo Ambler 492
PD8.3 Control de posición de viales en un dispensador 492
PD8.4 Sistema de control automático de anestesia 492
PD8.5 Control de caja negra 494

CAPÍTULO 9
Ejemplo Vehículo de reconocimiento controlado de forma remota 534
Ejemplo Sistema de lectura de una unidad de disco 547
PDC9.1 Control del motor de una unidad de tracción 574
PD9.1 Robot móvil para la limpieza de residuos tóxicos 574
PD9.2 Control de un brazo flexible 574
PD9.3 Regulador de la presión de sangre automático 576
PD9.4 Robot que juega al tenis 576
PD9.5 Actuador electrohidráulico 576
PD9.6 Tren de laminación de acero 576
PD9.7 Control de un vehículo lunar 577
PD9.8 Tren de laminación de acero de alta velocidad 577
PD9.9 Control de temperatura de dos tanques 577
PD9.10 Control de un robot que coge piezas metálicas calientes 578

CAPÍTULO 10
Ejemplo Sistema de control del bobinado de un rotor 620
Ejemplo El trazador gráfico *X-Y* 623
Ejemplo Sistema de lectura de una unidad de disco 633
PDC10.1 Control del motor de una unidad de tracción 652
PD10.1 Dos robots cooperantes 652
PD10.2 Control de dirección de una avioneta 652
PD10.3 Sistema de vuelo con mástil 653
PD10.4 Control de un robot utilizando visión 653
PD10.5 Control de la inclinación de un tren de gran velocidad 654
PD10.6 Control de una gran antena 654
PD10.7 Control de velocidad de una cinta de transporte 655
PD10.8 Control del motor de un automóvil 655
PD10.9 Control del ángulo de cabeceo de un avión 655
PD10.10 Radiómetro de un molino de viento 656
PD10.11 Control con retardo de tiempo 656

CAPÍTULO 11
Ejemplo Sistema de prueba automático 696
Ejemplo Sistema de lectura de una unidad de disco 707
PDC11.1 Control del motor de una unidad de tracción 717
PD11.1 Levitación de una bola de acero 717
PD11.2 Control del carburador de un automóvil 717
PD11.3 Locomotora diesel-eléctrica 717
PD11.4 Control de un helicóptero 718
PD11.5 Fabricación de papel 718
PD11.6 Control de un accionamiento acoplado 719

CAPÍTULO 12
Ejemplo Autopiloto de un avión 745
Ejemplo Sistema de control de un telescopio espacial 746
Ejemplo Bobinadora robusta 748
Ejemplo Máquina de torneado de diamante de ultra precisión 753
Ejemplo Sistema de lectura de una unidad de disco 762
PDC12.1 Control del motor de una unidad de tracción 777
PD12.1 Control de posición de una mesa giratoria 777
PD12.2 Control de un reproductor de cinta de audio digital (DAT) 777
PD12.3 Mano diestra maestra 778
PD12.4 Control de un microscopio 778
PD12.5 Control de un microscopio 780
PD12.6 Control de la articulación de una pierna artificial 780
PD12.7 Control de posición de un ascensor 781
PD12.8 Dispositivo de asistencia ventricular eléctrico 781
PD12.9 Control de un robot espacial 782
PD12.10 Control de apuntamiento de un panel solar 782
PD12.11 Control de un tren levitado magnéticamente 783
PD12.12 Control PID de un vehículo guiado en Marte 783
PD12.13 Banco de prueba de un sistema masa-resorte 783

CAPÍTULO 13
Ejemplo Sistema de control de movimiento de una mesa de trabajo 806
Ejemplo Sistema de lectura de una unidad de disco 818
PDC13.1 Control del motor de una unidad de tracción 826
PD13.1 Sistema de control de temperatura 826
PD13.2 Sistema de posicionamiento de la cabeza de lectura-escritura de una unidad de disco 826
PD13.3 Control de tracción de un vehículo 826
PD13.4 Sistema de máquina de herramienta 826
PD13.5 Control de una máquina de moldeo por inyección de polímeros 826

De los grandes maestros,
cuando ya no están,
sus alumnos dirán:
lo hicimos solos y sin ayuda.

Dedicado a
Lynda Ferrera Bishop
y
Joy MacDonald Dorf
con gran cariño

Contenido

Prefacio xvii

Acerca de los autores xxix

CAPÍTULO 1 *Introducción a los sistemas de control* 1

1.1. Introducción 2
1.2. Historia del control automático 4
1.3. Dos ejemplos del uso de la realimentación 7
1.4. La práctica de la ingeniería de control 8
1.5. Ejemplos de sistemas de control modernos 9
1.6. Ensamblaje automático y robots 16
1.7. La evolución futura de los sistemas de control 17
1.8. Diseño en ingeniería 18
1.9. Sistemas mecatrónicos 19
1.10. Diseño de sistemas de control 23
1.11. Ejemplo de diseño: Control de velocidad de una mesa giratoria 24
1.12. Ejemplo de diseño: Sistema de control para la dosificación de insulina 26
1.13. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 27
Ejercicios 29
Problemas 30
Problemas avanzados 34
Problemas de diseño 35
Términos y conceptos 36

CAPÍTULO 2 *Modelos matemáticos de sistemas* 37

2.1. Introducción 38
2.2. Ecuaciones diferenciales de sistemas físicos 38
2.3. Aproximaciones lineales de sistemas físicos 43
2.4. La transformada de Laplace 46
2.5. La función de transferencia de sistemas lineales 52
2.6. Modelos de diagramas de bloques 63
2.7. Modelos de grafos de flujo de señal 72
2.8. Análisis de sistemas de control por computador 78
2.9. Ejemplos de diseño 79
2.10. La simulación de sistemas utilizando MATLAB 89
2.11. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 102

2.12. Resumen 105
Ejercicios 105
Problemas 111
Problemas avanzados 124
Problemas de diseño 125
Problemas con MATLAB 126
Términos y conceptos 128

CAPÍTULO 3 *Modelos en variables de estado* 130

3.1. Introducción 131
3.2. Las variables de estado de un sistema dinámico 131
3.3. La ecuación diferencial del estado 134
3.4. Modelos de grafos de flujo de señal y diagramas de bloques 137
3.5. Modelos alternativos de grafos de flujo de señal y diagramas de bloques 147
3.6. La función de transferencia de la ecuación de estado 153
3.7. La respuesta temporal y la matriz de transición de estado 154
3.8. Una evaluación en tiempo discreto de la respuesta temporal 158
3.9. Ejemplo de diseño: Impresora con transmisión por correa 163
3.10. Análisis de modelos de variables de estado utilizando MATLAB 170
3.11. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 173
3.12. Resumen 176
Ejercicios 177
Problemas 179
Problemas avanzados 186
Problemas de diseño 188
Problemas con MATLAB 189
Términos y conceptos 190

CAPÍTULO 4 *Características de los sistemas de control con realimentación* 191

4.1. Sistemas de control en lazo abierto y en lazo cerrado 192
4.2. Sensibilidad de los sistemas de control a variaciones en los parámetros 194
4.3. Control de la respuesta transitoria de los sistemas de control 197
4.4. Señales de perturbación en un sistema de control con realimentación 201
4.5. Error en estado estacionario 206
4.6. El coste de la realimentación 208
4.7. Ejemplo de diseño: Máquinas taladradoras en el canal inglés 209
4.8. Ejemplo de diseño: Vehículo explorador de Marte 212
4.9. Características de los sistemas de control utilizando MATLAB 214
4.10. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 219
4.11. Resumen 224
Ejercicios 226
Problemas 228
Problemas avanzados 235
Problemas de diseño 238
Problemas con MATLAB 240
Términos y conceptos 242

CAPÍTULO 5 *Comportamiento de los sistemas de control con realimentación* 243

5.1. Introducción 244
5.2. Señales de entrada de prueba 245
5.3. Comportamiento de un sistema de segundo orden 247
5.4. Efectos de un tercer polo y un cero sobre la respuesta de un sistema de segundo orden 253
5.5. Estimación de la razón de amortiguamiento 258
5.6. Localización de las raíces en el plano s y respuesta transitoria 259
5.7. El error en estado estacionario de los sistemas de control con realimentación 260
5.8. El error en estado estacionario de los sistemas con realimentación no unitaria 265
5.9. Índices de comportamiento 267
5.10. Simplificación de sistemas lineales 276
5.11. Ejemplo de diseño: Control de apuntamiento del telescopio Hubble 279
5.12. Comportamiento de sistemas utilizando MATLAB y Simulink 282
5.13. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 291
5.14. Resumen 295
Ejercicios 295
Problemas 299
Problemas avanzados 304
Problemas de diseño 306
Problemas con MATLAB 308
Términos y conceptos 310

CAPÍTULO 6 *Estabilidad de los sistemas lineales con realimentación* 311

6.1. El concepto de estabilidad 312
6.2. El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz 316
6.3. Estabilidad relativa de los sistemas de control con realimentación 324
6.4. Estabilidad de los sistemas con variables de estado 325
6.5. Ejemplo de diseño: Control de giro de un vehículo con bandas de rodamiento 329
6.6. Estabilidad de sistemas utilizando MATLAB 331
6.7. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 339
6.8. Resumen 342
Ejercicios 343
Problemas 345
Problemas avanzados 348
Problemas de diseño 350
Problemas con MATLAB 352
Términos y conceptos 353

CAPÍTULO 7 *Método del lugar de las raíces* 354

7.1. Introducción 355
7.2. Concepto del lugar de las raíces 355
7.3. Procedimiento del lugar de las raíces 359
7.4. Ejemplo de análisis y diseño de un sistema de control utilizando el método del lugar de las raíces 374

7.5. Diseño de parámetros por el método del lugar de las raíces 378
7.6. Sensibilidad y el lugar de las raíces 383
7.7. Controladores de tres términos (PID) 391
7.8. Ejemplo de diseño: Sistema de control de un manipulador láser 393
7.9. El diseño de un sistema de control de un robot 396
7.10. El lugar de las raíces utilizando MATLAB 398
7.11. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco .. 404
7.12. Resumen 405
Ejercicios 409
Problemas 412
Problemas avanzados 421
Problemas de diseño 424
Problemas con MATLAB 430
Términos y conceptos 431

CAPÍTULO 8 *Métodos de respuesta en frecuencia* 432

8.1. Introducción 433
8.2. Gráficas de la respuesta en frecuencia 435
8.3. Un ejemplo del trazado del diagrama de Bode 452
8.4. Medidas de la respuesta en frecuencia 456
8.5. Especificaciones de comportamiento en el dominio de la frecuencia 458
8.6. Diagrama de magnitud logarítmica y de fase 461
8.7. Ejemplo de diseño: Sistema de control de una máquina de estampación ... 461
8.8. Métodos de respuesta en frecuencia utilizando MATLAB 465
8.9. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco .. 471
8.10. Resumen 472
Ejercicios 477
Problemas 480
Problemas avanzados 490
Problemas de diseño 491
Problemas con MATLAB 494
Términos y conceptos 496

CAPÍTULO 9 *Estabilidad en el dominio de la frecuencia* 497

9.1. Introducción 498
9.2. Transformación de los contornos en el plano s 499
9.3. El criterio de Nyquist 504
9.4. Estabilidad relativa y el criterio de Nyquist 516
9.5. Criterios de comportamiento en el dominio temporal especificados en el dominio frecuencial 522
9.6. Ancho de banda del sistema 529
9.7. Estabilidad de sistemas de control con retardos 530
9.8. Ejemplo de diseño: Vehículo de reconocimiento controlado de forma remota .. 534
9.9. Controladores PID en el dominio de la frecuencia 537
9.10. Estabilidad en el dominio de la frecuencia utilizando MATLAB 538

9.11. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco .. 547
9.12. Resumen 549
Ejercicios 556
Problemas 562
Problemas avanzados 572
Problemas de diseño 574
Problemas con MATLAB 579
Términos y conceptos 580

CAPÍTULO 10 *Diseño de sistemas de control con realimentación* 581

10.1. Introducción 582
10.2. Enfoques en el diseño de sistemas 583
10.3. Redes de compensación en cascada 585
10.4. Diseño por adelanto de fase utilizando el diagrama de Bode 589
10.5. Diseño por adelanto de fase utilizando el lugar de las raíces 595
10.6. Diseño de sistemas utilizando redes de integradores 601
10.7. Diseño por retardo de fase utilizando el lugar de las raíces 604
10.8. Diseño por retardo de fase utilizando el diagrama de Bode 608
10.9. Diseño de sistemas en el diagrama de Bode utilizando métodos analíticos y por computador 613
10.10. Sistemas con un prefiltro 615
10.11. Diseño para respuesta plana 617
10.12. Ejemplo de diseño: Sistema de control del bobinado de un rotor 620
10.13. Ejemplo de diseño: El trazador gráfico X-Y 623
10.14. Diseño de sistemas utilizando MATLAB 626
10.15. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco .. 633
10.16. Resumen 634
Ejercicios 636
Problemas 638
Problemas avanzados 649
Problemas de diseño 652
Problemas con MATLAB 656
Términos y conceptos 658

CAPÍTULO 11 *Diseño de sistemas realimentados con variables de estados* 659

11.1. Introducción 660
11.2. Controlabilidad 660
11.3. Observabilidad 663
11.4. Diseño del sistema de control con realimentación del vector de estado completo 666
11.5. Fórmula de Ackermann 670
11.6. Diseño del observador 671
11.7. Diseño del compensador: Integración de la realimentación del vector de estado completo y del observador 675
11.8. Entradas de referencia 681

11.9. Sistemas de control óptimo 683
11.10. Diseño con modelo interno 693
11.11. Ejemplo de diseño: Sistema de verificación automático 696
11.12. Diseño con variables de estado utilizando MATLAB 699
11.13. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco .. 707
11.14. Resumen 709
Ejercicios 709
Problemas 710
Problemas avanzados 714
Problemas de diseño 717
Problemas con MATLAB 719
Términos y conceptos 722

CAPÍTULO 12 *Sistemas de control robusto* 723

12.1. Introducción 724
12.2. Sistemas de control robusto y sensibilidad del sistema 725
12.3. Análisis de robustez 728
12.4. Sistemas con parámetros inciertos 731
12.5. El diseño de sistemas de control robustos 733
12.6. Controladores PID 738
12.7. Diseño de sistemas de control PID robustos 740
12.8. Ejemplo de diseño: Autopiloto de un avión 745
12.9. Diseño del sistema de control de un telescopio espacial 746
12.10. Diseño de una bobinadora robusta 748
12.11. Sistema de control robusto con modelo interno 751
12.12. Diseño de una máquina de torneado de diamante de ultra precisión 753
12.13. Sistema de realimentación pseudocuantitativa 757
12.14. Sistemas de control robusto utilizando MATLAB 759
12.15. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco .. 762
12.16. Resumen 764
Ejercicios 766
Problemas 767
Problemas avanzados 773
Problemas de diseño 777
Problemas con MATLAB 784
Términos y conceptos 786

CAPÍTULO 13 *Sistemas de control digital* 787

13.1. Introducción 788
13.2. Aplicaciones de los sistemas de control por computador 788
13.3. Sistemas de datos muestreados 790
13.4. La transformada *z* 793
13.5. Sistemas de datos muestreados en lazo cerrado 798
13.6. Análisis de estabilidad en el plano *z* 800
13.7. Comportamiento de un sistema de segundo orden de datos muestreados .. 801

13.8. Sistemas en lazo cerrado con compensación mediante un computador 804
13.9. Diseño del sistema de control del movimiento de una mesa de trabajo ... 806
13.10. Lugar de las raíces de sistemas de control digital 808
13.11. Implementación de controladores digitales 812
13.12. Sistemas de control digital utilizando MATLAB 813
13.13. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco .. 818
13.14. Resumen 820
Ejercicios 820
Problemas 822
Problemas avanzados 824
Problemas de diseño 826
Problemas con MATLAB 827
Términos y conceptos 828

APÉNDICE A *Fundamentos de MATLAB* 831

APÉNDICE B *Fundamentos de Simulink* 849

Referencias 858

Índice 869

RECURSOS WEB

APÉNDICE C *Símbolos y unidades y factores de conversión*
APÉNDICE D *Pares de transformadas de Laplace*
APÉNDICE E *Una introducción al álgebra matricial*
APÉNDICE F *Conversión de decibelios*
APÉNDICE G *Números complejos*
APÉNDICE H *Pares de transformadas z*

Prefacio

SISTEMAS DE CONTROL MODERNO—EL LIBRO

El Vehículo Explorador de Marte (MER-A), también conocido como *Spirit*, se lanzó en un cohete Delta II, en junio de 2003 con destino a Marte, el Planeta Rojo. *Spirit* entró en la atmósfera marciana siete meses después en enero de 2004. Cuando la nave espacial entró en la atmósfera marciana estaba viajando a 19 300 km/h. Alrededor de cuatro minutos en la atmósfera superior, el recubrimiento de la nave espacial desaceleró al vehículo a una velocidad de 1600 km/h. Entonces se desplegó un paracaídas para frenar a la nave espacial a unos 300 km/h. A una altitud de unos 100 metros los retropropulsores frenaron el descenso y se inflaron los cojines de aire para amortiguar el impacto del aterrizaje. El *Spirit* golpeó el suelo marciano a una velocidad de 50 km/h, rebotó y rodó hasta que se paró cerca del punto objetivo en el Cráter Gusev. El lugar previsto para el aterrizaje se escogió porque el cráter parece como el lecho de un lago y si lo era realmente pudo en algún tiempo haber estado lleno con agua y ahora podría contener trazas de esa agua en depósitos de sedimento en el suelo. El vehículo explorador *Spirit* será capaz de alcanzar lugares interesantes en el Cráter Gusev para realizar *in situ* pruebas que ayuden a los científicos a contestar muchas de las cuestiones no resueltas acerca de la historia del planeta vecino. La entrada, descenso y aterrizaje satisfactorio del *Spirit* es una ilustración asombrosa de la potencia de los sistemas de control. Dada la gran distancia a Marte no es posible para una nave espacial volar a través de la atmósfera mientras se encuentra bajo el control desde el suelo; la entrada, descenso y aterrizaje deben controlarse de forma autónoma a bordo de la nave espacial. Diseñar sistemas capaces de efectuar la entrada planetaria es uno de los grandes retos a los que se enfrentaron los ingenieros de sistemas de control.

El precursor de misiones a Marte de la NASA conocido como el Mars Pathfinder, también viajó al Planeta Rojo y aterrizó el 4 de julio de 1997. La misión del Pathfinder, una de las primeras de la clase Discovery de la NASA, fue la primera misión en aterrizar en Marte desde el éxito de la nave espacial Viking en los años 1970. Pathfinder desplegó el primer vehículo explorador autónomo, conocido como el *Sojourner*, para explorar la zona del aterrizaje. El *Sojourner* tenía una masa de 10.5 kilogramos y recorrió un total de 100 metros (nunca separándose más unos 12 metros del punto del aterrizaje) en su misión de 30 días. En comparación, el vehículo explorador *Spirit* tiene una masa de 180 kilogramos y está diseñado para desplazarse unos 40 metros por día alrededor de 90 días. Resulta evidente el rápido ritmo de desarrollo de vehículos exploradores planetarios con mejores prestaciones. Los planes del vehículo planetario del Mars Science Laboratory (que tiene planificado su lanzamiento en 2009) son que tenga 1000 kilogramos con una duración de la misión de 500 días y la capacidad de recorrer 30 kilómetros.

Los ingenieros de control desempeñan un papel crítico en el éxito del programa de exploración planetaria. La importancia de los sistemas de control de los vehículos

espaciales autónomos continuará aumentando cuando mejoren el hardware y el sistema operativo de los computadores en vuelo. Pathfinder utilizaba un sistema operativo multitarea, producido comercialmente, que residía en estación de trabajo de 32 bits protegida contra la radiación con 1 gigabyte de memoria programable en C. Esto era un gran avance respecto a los computadores del Apollo que tenían una memoria fija (sólo lectura) de 36 864 palabras (una palabra tenía 16 bits) junto con una memoria de lectura-escritura de 2048 palabras. El «lenguaje de programación» del Apollo era una notación codificada de pseudo código almacenada como una lista de palabras datos «interpretadas» y traducidas en una secuencia de enlaces de subrutinas. Los computadores MERS en los vehículos exploradores del *Spirit* y *Opportunity* emplean un microprocesador Rad 6000 de 32 bits operando a una velocidad de 20 millones de instrucciones por segundo. Ésta es una versión protegida contra la radiación del chip del PowerPC utilizado en muchos computadores Macintosh. La memoria incluye 128 megabytes de memoria de acceso aleatorio, 256 megabytes de memoria flash y una cantidad más pequeña de otra memoria no volátil para protegerse de los ciclos en los que la potencia está desconectada de forma que los datos no se borren inadvertidamente. La memoria total y la potencia de los computadores MERS es aproximadamente la memoria equivalente de un potente portátil de hoy día. Como todos los computadores de misiones espaciales, el computador del *Spirit* contiene memoria especial para tolerar el entorno de radiación extrema del espacio. Problemas interesantes del mundo real, tales como los vehículos planetarios *Spirit* y *Sojourner*, se usan como ejemplos ilustrativos a lo largo del libro. Por ejemplo, en la Sección 4.8. en el Ejemplo de Diseño se trata el problema de diseño de un vehículo explorador.

La ingeniería de control es un campo excitante y con problemas que representan un reto. Por su propia naturaleza, la ingeniería de control es un tema multidisciplinar y ha tomado su lugar como un curso básico en el currículo de ingeniería. Es razonable esperar diferentes puntos de vista para aprender y practicar el arte de la ingeniería de control. Como el tema tiene un gran fundamento matemático, se podría enfocar desde una óptica estrictamente teórica, haciendo hincapié en los teoremas y sus demostraciones. Por otra parte, como el objetivo final es implementar controladores en sistemas reales, se podría considerar un enfoque pragmático que descansa sólo en la intuición y en las experiencias prácticas cuando se diseñan sistemas de control con realimentación. El planteamiento en este libro es presentar una metodología de ingeniería que, aunque se basa en fundamentos matemáticos, refuerza el modelado de sistemas físicos y el diseño de sistemas de control prácticos con especificaciones realistas sobre los sistemas.

Pensamos que el enfoque más importante y productivo para aprender es que cada uno redescubra y recree de nuevo las respuestas y métodos del pasado. Así pues, el ideal es presentar al estudiante con una serie de problemas y preguntas y apuntar algunas de las respuestas que se han obtenido en las décadas pasadas. El método tradicional —confrontar al estudiante no con el problema sino con la solución finalizada— priva al estudiante de todo entusiasmo, corta el impulso creativo, reduce la aventura del género humano a una polvorienta pila de teoremas. La cuestión, entonces, es presentar algunos de los problemas importantes y no resueltos con los que nos enfrentamos, ya que se puede asegurar que lo que verdaderamente se aprende y comprende es lo que se descubre por uno mismo.

El objetivo de este libro es presentar la estructura de la teoría de control con realimentación y proporcionar una secuencia de descubrimientos y problemas excitantes cuando se avanza a lo largo del texto. Si este libro es capaz de ayudar al estudiante a descubrir la teoría y práctica de los sistemas de control con realimentación se habrá triunfado.

LA AUDIENCIA

Este texto está diseñado como un curso de introducción a los sistemas de control para estudiantes de ingeniería. Hay muy poca separación en la práctica de los sistemas de control entre la ingeniería aeronáutica, química, eléctrica, industrial y mecánica; por lo tanto, este texto se escribe sin ninguna propensión consciente hacia una disciplina. Así pues, se confía en que este libro sea igualmente útil para todas las disciplinas de ingeniería y quizás ayude a ilustrar la utilidad de la ingeniería de control. Los numerosos problemas y ejemplos representan todos los campos, y los ejemplos de los sistemas de control sociológicos, biológicos, ecológicos y económicos tienen como misión proporcionar al lector algunos conocimientos de la aplicabilidad general de la teoría de control a muchas facetas de la vida. Pensamos que al exponer a los estudiantes de una disciplina a ejemplos y problemas de otras disciplinas les proporcionará con la capacidad de ver más allá de su propio campo de estudio. Muchos estudiantes prosiguen carreras en campos de la ingeniería distintos del suyo propio. Por ejemplo, muchos ingenieros eléctricos y mecánicos se encuentran en la ingeniería aeroespacial trabajando al lado de ingenieros aeronáuticos. Confiamos en que esta introducción a la ingeniería de control dé a los estudiantes una comprensión más amplia del diseño y análisis de sistemas de control.

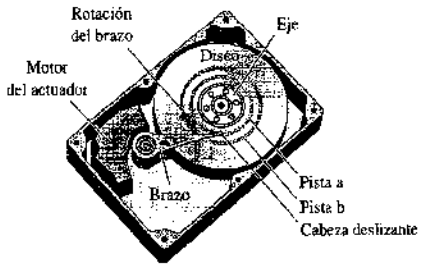
En sus nueve primeras ediciones *Sistemas de Control Moderno* ha sido utilizado en cursos de carrera por estudiantes de ingeniería en más de 400 universidades. También se ha empleado en cursos para estudiantes de ingeniería ya graduados sin conocimientos previos de ingeniería de control.

LA DÉCIMA EDICIÓN

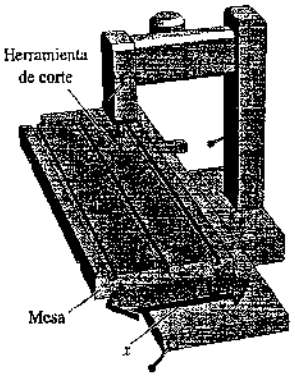
Hay disponible para los estudiantes y profesores que utilicen la décima edición un sitio Web asociado con este libro. El sitio Web contiene ejercicios prácticos, todos los archivos-m de MATLAB y simulaciones en Simulink del libro, tablas de transformadas de Laplace y z, material escrito sobre álgebra matricial, números complejos y símbolos, unidades y factores de conversión. Aparecerá un icono en el margen del libro siempre que haya material adicional relacionado en el sitio Web. También, como el sitio Web proporciona un mecanismo para poner al día de forma continua y añadir materiales relacionados con el control de interés para estudiantes y profesores, es aconsejable visitarlo regularmente durante el semestre o cuatrimestre cuando se esté siguiendo el curso. La dirección del sitio Web de MCS es http://www.prenhall.com/dorf.

Con la décima edición, se continúa en la línea de hacer hincapié en el diseño que históricamente ha caracterizado a *Sistemas de Control Moderno*. Utilizando los problemas de ingeniería del mundo real asociados con el diseño del controlador para el sistema de lectura de una unidad de disco, se presenta el *Ejemplo de Diseño Secuencial* (identificado en el texto mediante un icono en forma de flecha), que se considera de forma consecutiva en cada capítulo empleando los métodos y conceptos de ese capítulo. Las

unidades de disco se utilizan en los computadores de todos los tamaños y representan una aplicación importante de la ingeniería de control. En cada capítulo se consideran diferentes aspectos del diseño de controladores para el sistema de lectura de las unidades de disco. Por ejemplo, en el Capítulo 1 se determinan los objetivos de control, se identifican las variables que hay que controlar, se escriben las especificaciones de control y se establece la configuración preliminar del sistema para la unidad de disco. Luego, en el Capítulo 2, se obtienen modelos de los sensores y actuadores del proceso. En los capítulos restantes se continúa el proceso de diseño haciendo especial hincapié en los puntos principales de los capítulos.



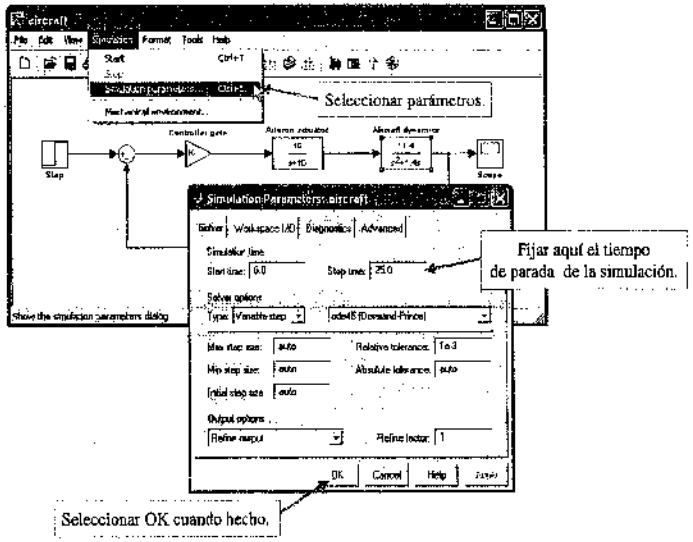
Con el mismo espíritu que en el *Ejemplo de Diseño Secuencial*, se presenta un problema de diseño que se denomina *Problema de Diseño Continuo* (identificado en el texto mediante un icono en forma de una triple flecha), para dar al estudiante la oportunidad de contar con un problema de diseño de capítulo en capítulo. La maquinaria de alta precisión coloca demandas muy exigentes sobre los sistemas de deslizamiento de mesas. En el *Problema de Diseño Continuo*, los estudiantes aplican las técnicas y herramientas presentadas en cada capítulo al desarrollo de una solución de diseño que cumpla los requisitos especificados.



El componente de análisis y diseño asistido por computador del libro continúa su evolución y mejora. El conjunto de problemas de MATLAB al final del capítulo se identifica por el icono gráfico en el texto. También, muchas de las soluciones a diferentes componentes del *Ejemplo de Diseño Secuencial* utilizan MATLAB con los correspondientes programas incluidos en las figuras.

En la décima edición, se utiliza Simulink como una forma eficiente para que los usuarios de MATLAB modelen, simulen y analicen sistemas de control con realimentación. Como Simulink es una herramienta interactiva que utiliza interfases gráficas, creemos que la mejor manera de aprenderlo es ir directamente y utilizarlo. El Apéndice B se dedica a los fundamentos de Simulink; el estudiante puede, mediante una sucesión de pasos, construir y simular un sencillo sistema. Se intenta proporcionar información básica acerca de Simulink que sea lo más independiente posible de las sucesivas versiones del software. En el momento de esta décima versión, la última versión es Simulink 5.0. Cuando aparezcan diferentes versiones de Simulink, las introducciones previas a Fundamentos de Simulink se colocarán en el sitio Web MCS —compruebe si está teniendo problemas de compatibilidad con los modelos de Simulink en este libro.

Ejemplos de Simulink se presentan en los Capítulos 5 y 11. En el Capítulo 6, se investiga el control del giro de un avión utilizando Simulink. En el Capítulo 11 se desarrolla una simulación en Simulink para estudiar un sistema en forma de variables de estado.



PEDAGOGÍA

Este libro se organiza alrededor de los conceptos de la teoría de los sistemas de control tal como han sido desarrollados en los dominios frecuencial y temporal. Se ha hecho un esfuerzo para hacer la selección de temas, así como los sistemas presentados en los ejemplos y problemas, modernos en el mejor sentido. Por lo tanto, este libro incluye presentaciones sobre sistemas de control robusto y sensibilidad del sistema,

modelos de variables de estado, controlabilidad y observabilidad, sistemas de control por computador, control por modelo interno, controladores PID robustos y análisis y diseño asistido por computador por nombrar sólo unos pocos. Sin embargo, los temas clásicos de la teoría de control que han resultado ser útiles en la práctica se han mantenido y ampliado.

Principios básicos: De lo clásico a lo moderno. El objetivo es presentar una exposición clara de los principios básicos de las técnicas de diseño en el dominio de la frecuencia y del tiempo. Se estudian detenidamente los métodos clásicos de la ingeniería de control: transformadas de Laplace y funciones de transferencia; diseño con el lugar de las raíces; análisis de estabilidad de Routh-Hurwitz; métodos de respuesta en frecuencia, incluyendo Bode, Nyquist y Nichols; error en estado estacionario para señales de test estándar; aproximaciones de los sistemas de segundo orden; y margen de ganancia y fase y ancho de banda. Además, el tratamiento del método de las variables de estado es importante. Se estudian nociones fundamentales de controlabilidad y observabilidad para modelos de variables de estado. Se presenta el diseño por realimentación del vector de estado completo con la fórmula de Ackerman para la asignación de polos junto con un análisis de las limitaciones de la realimentación mediante variables de estado. Los observadores se introducen como un medio de proporcionar estimaciones del estado cuando el estado completo no se mide.

Además de este fuerte fundamento de los principios básicos, el libro proporciona muchas oportunidades para explorar temas más allá de lo tradicional. En el Capítulo 12 se introducen avances en la teoría de control robusto. En el Capítulo 13 se estudia la implementación de sistemas de control por computador. Cada capítulo, salvo el primero, tiene una sección de MATLAB para introducir al estudiante a la noción de análisis y diseño asistido por computador. El libro concluye con una sección amplia de referencias, divididas por capítulo para guiar al estudiante a más fuentes de información sobre ingeniería de control.

Desarrollo progresivo de las habilidades para la resolución de problemas. Leer los capítulos, asistir a clases y tomar apuntes y trabajar los ejemplos, todo ello forma parte del proceso de aprendizaje. Pero la prueba real viene al final del capítulo con los problemas. El libro considera seriamente el tema de la resolución de problemas. En cada capítulo, hay cinco tipos de problemas:

- Ejercicios
- Problemas
- Problemas avanzados
- Problemas de diseño
- Problemas con MATLAB

Por ejemplo, el conjunto de problemas para el Capítulo 3, Modelos en Variables de Estado (*véase* la página 177), comprende 19 ejercicios, 36 problemas, 6 problemas avanzados, 5 problemas de diseño y 7 problemas con MATLAB. Los ejercicios permiten a los estudiantes utilizar rápidamente los conceptos y métodos presentados en cada capítulo resolviendo ejercicios relativamente directos antes de abordar los problemas más complejos. Se proporcionan las respuestas de un tercio de los ejercicios. Los problemas requieren una extensión de los conceptos del capítulo a nuevas situaciones. Los problemas avanzados representan problemas de complejidad creciente. Los problemas de diseño se centran en la tarea de diseño; los problemas con MATLAB adiestran al estudiante en la resolución de problemas utilizando computadores. En total, el libro contiene más de 800 problemas. También el sitio Web MCS contiene ejercicios prácticos que se califican instantáneamente, de manera que proporcionan una realimentación rápida a los estudiantes. La abundancia de problemas de complejidad creciente da a los estudiantes confianza en sus capacidades de resolución de problemas cuando recorren el camino que va desde los ejercicios a los problemas de diseño y con MATLAB. Un manual de instructor, disponible para todos aquellos que adopten el texto para su utilización en un curso, contiene soluciones completas a todos los problemas de final de capítulo.

Se han desarrollado un conjunto de archivos-M el *Toolbox de Sistemas de Control Moderno*, ha sido desarrollado por los autores para suplementar el texto. Los archivos-M contienen los programas de cada ejemplo MATLAB y Simulink en el texto. Puede descargar los archivos-M de Prentice may en http://www.prenhall.com/dorf.

Énfasis en el diseño sin comprometer los principios básicos. El importante tema del diseño del mundo real, los sistemas de control complejos, es un tema fundamental a lo largo del texto. El énfasis se coloca en el diseño de aplicaciones del mundo real y con interés en la industria. Cada capítulo contiene al menos un ejemplo de diseño, incluyendo los siguientes:

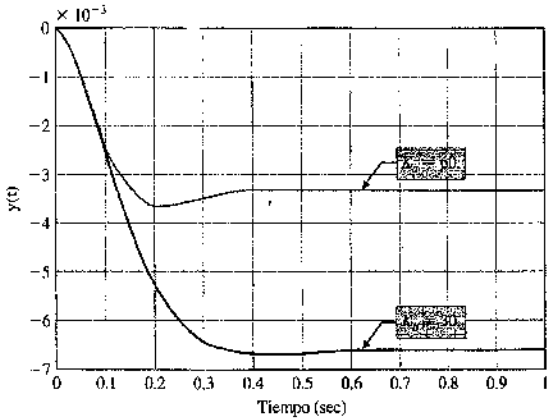
- control en el suministro de insulina (Sección 1.12, página 26)
- filtro paso-baja (Sección 2.9, página 86)
- impresora con transmisión por correa (Sección 3.9, página 163)
- vehículo explorador de Marte (Sección 4.8, página 212)
- control de apuntamiento del telescopio Hubble (Sección 5.11, página 279)
- control de giro de un vehículo en un circuito con vías (Sección 6.5, página 329)
- sistema de control de un manipulador láser (Sección 7.8, página 393)
- sistema de control de una máquina de estampación (Sección 8.7, página 461)
- vehículo de reconocimiento controlado de forma remota (Sección 9.8, página 534)
- trazador gráfico x-y (Sección 10.13, página 623)
- sistema de verificación automático (Sección 11.11, página 696)
- máquina de torneado de diamante de ultraprecisión (Sección 12.12, página 753)
- sistema de control del movimiento de una mesa de trabajo (Sección 13.9, página 806)

Las secciones de MATLAB ayudan a los estudiantes a utilizar conceptos de análisis y diseño asistido por computador y a volver a trabajar muchos de los ejemplos de diseño. En el Capítulo 5, el Ejemplo de Diseño de Secuencial: Sistema de Lectura de una Unidad de Disco se analiza utilizando MATLAB. En la Figura 5.53 de la página 294 se presenta un programa en MATLAB que se puede usar para analizar el diseño. En general, cada programa se anota con cuadros de comentarios que realzan aspectos importantes del programa. La salida que acompaña al programa (generalmente una gráfica)

también contiene cuadros de comentarios que apuntan a elementos significativos. Los programas se pueden utilizar también con modificaciones como fundamento para la resolución de otros problemas conexos.

```
Ka=30;                                  Seleccionar Ka
t=[0:0.01:1];
nc=[Ka*5];dc=[1];
ng=[1];dg=[1 20 0];
[num,den]=feedback(ng,dg,nc,dc);
num=-num;
y=step(num,den,t);                      Perturbación entra al mismo
plot(t,y), grid                         punto y tiene signo negativo
xlabel('Time (sec)'), ylabel('y(t)')
```

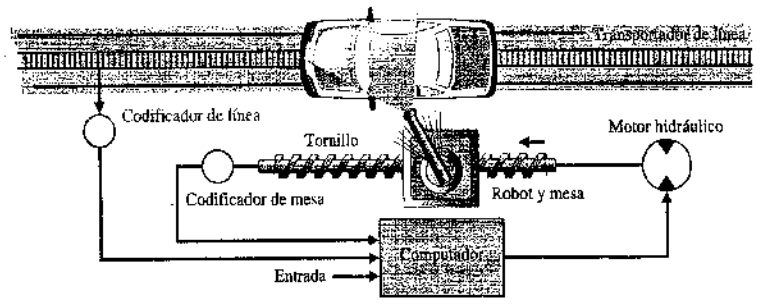
(a)



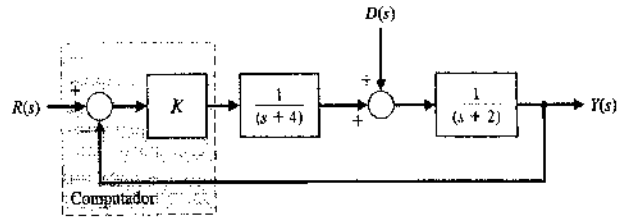
(b)

Mejoras para el aprendizaje. Cada capítulo comienza con una sinopsis del capítulo que describe los temas que el estudiante puede esperar que va a encontrar. Los capítulos concluyen con un resumen de final de capítulo así como con los términos y conceptos. Estas secciones refuerzan los conceptos importantes introducidos en el capítulo y sirve como una referencia para su uso posterior.

Se emplea un segundo color para añadir énfasis cuando se necesita y para hacer que las gráficas y figuras sean más fáciles de interpretar. El Problema 12.4 de la página 769 pide al estudiante que determine el valor de *Ka* para cumplir los objetivos de diseño especificados. La Figura P12.4 asociada de la página 769 ayuda al estudiante (a) a visualizar el problema y (b) a dar el paso siguiente para desarrollar el modelo de función de transferencia:



(a)



(b)

LA ORGANIZACIÓN

Capítulo 1. Introducción a los sistemas de control. El Capítulo 1 proporciona una introducción a la historia básica de la teoría y práctica del control. El objetivo de este capítulo es describir el enfoque general para diseñar y construir un sistema de control.

Capítulo 2. Modelos matemáticos de sistemas. En el Capítulo 2 se desarrollan los modelos matemáticos de sistemas físicos en la forma de entrada-salida o función de transferencia. Se considera un amplio rango de sistemas (mecánicos, eléctricos y de fluidos, entre otros).

Capítulo 3. Modelos en variables de estado. En el Capítulo 3 se desarrollan modelos matemáticos de sistemas en forma de variable de estado. Utilizando métodos matriciales se examinan la respuesta transitoria de los sistemas de control y el comportamiento de estos sistemas.

Capítulo 4. Características de los sistemas de control con realimentación. En el Capítulo 4 se describen las características de los sistemas de control con realimentación. Se analizan las ventajas de la realimentación y se introduce el concepto de la señal de error del sistema.

Capítulo 5. Comportamiento de los sistemas de control con realimentación. En el Capítulo 5 se examina el comportamiento de los sistemas de control. El comportamiento de un sistema de control se correlaciona con la localización en el plano s de los polos y ceros de la función de transferencia del sistema.

Capítulo 6. Estabilidad de los sistemas lineales con realimentación. En el Capítulo 6 se investiga la estabilidad de los sistemas con realimentación. Se estudia la relación de la estabilidad del sistema con la ecuación característica de la función de transferencia del sistema. Se introduce el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz.

Capítulo 7. Método del lugar de las raíces. El Capítulo 7 trata del movimiento de las raíces de la ecuación característica en el plano s cuando se varían uno o dos parámetros. El lugar de las raíces en el plano-s se determina por un método gráfico. También se introduce el popular controlador PID.

Capítulo 8. Métodos de respuesta en frecuencia. En el Capítulo 8 se utiliza una señal de entrada sinusoidal en estado estacionario para examinar la respuesta en estado estacionario del sistema cuando se varía la frecuencia de la sinusoide. Se considera el desarrollo de la gráfica de respuesta en frecuencia, que se llama diagrama de Bode.

Capítulo 9. Estabilidad en el dominio de la frecuencia. En el Capítulo 9 se investiga la estabilidad del sistema empleando los métodos de respuesta en frecuencia. Se analizan la estabilidad relativa y el criterio de Nyquist.

Capítulo 10. Diseño de sistemas de control con realimentación. En el Capítulo 10 se describen y desarrollan algunos enfoques para diseñar y compensar un sistema de control. Se presentan diferentes candidatos para servir como compensadores y se muestra cómo ayudan a conseguir un comportamiento mejorado.

Capítulo 11. Diseño de sistemas realimentados con variables de estados. El tema principal del Capítulo 11 es el diseño de sistemas de control utilizando modelos de variables de estado. Se analizan el diseño por realimentación del estado completo y métodos de diseño con observador basado en la asignación de polos. Se presentan tests para la controlabilidad y la observabilidad y se explica el concepto de diseño por modelo interno.

Capítulo 12. Sistemas de control robusto. El Capítulo 12 trata del diseño de sistemas de control de gran precisión en presencia de incertidumbres significativas. Se estudian cinco métodos para el diseño robusto, a saber: lugar de las raíces, respuesta en frecuencia, métodos ITAE para controladores PID robustos, modelo interno y realimentación pseudo-cuantitativa.

Capítulo 13. Sistemas de control digital. En el Capítulo 13 se presentan métodos para describir y analizar el comportamiento de sistemas de control por computador. Se analizan la estabilidad y comportamiento de los sistemas de datos muestreados.

Apéndices. Los apéndices son los siguientes:

A Fundamentos de MATLAB

B Fundamentos de Simulink

AGRADECIMIENTOS

Deseamos expresar nuestro sincero agradecimiento a las siguientes personas que nos han ayudado en el desarrollo de esta décima edición, así como en todas las ediciones previas: Mahmoud A. Abdallah, Central State University (OH); John N. Chiasson, University of Pittsburg; Samy El-Sawah, California State Polytechnic University, Pomona; Peter J. Gorder, Kansas State University; Duane Hanselman, University of Maine; Ashok Iyer, University of Nevada, Las Vegas; Leslie R. Koval, University of Missouri-Rolla; L. G. Kraft, University of New Hampshire; Thomas Kurfess, Georgia Institute of Technology; Julio C. Mandojana, Mankato State University; Jure Medanic, University of Illinois en Urbana-Champaign; Eduardo A. Misawa, Oklahoma State University; Medhat M. Morcos, Kansas State University; Mark Nagurka, Marquette University; Carla Schwartz, The MathWorks, Inc., D. Subbaram Naidu, Idaho State University; Ron Perez, University of Wisconsin-Milwaukee; Murat Tanyel, Dordt College; Hal Tharp, University of Arizona; John Valasek, Texas A&M University; Paul P. Wang, Duke University; y Ravi Warrier, GMI Engineering and Management Institute.

LÍNEAS ABIERTAS DE COMUNICACIÓN

A los autores le gustaría establecer una línea de comunicación con los usuarios de *Sistemas de Control Moderno*. Animamos a todos los lectores a enviar comentarios y sugerencias para esta y futuras ediciones. Al hacer esto, podemos mantenerle informado de cualquier noticia de interés general en relación con el libro de texto y pasarle los comentarios interesantes de otros usuarios.

¡Manténgase en contacto!

Richard C. Dorf dorf@ece.ucdavis.edu
Robert H. Bishop rhbishop@mail.utexas.edu

Acerca de los autores

Richard C. Dorf es Profesor de Ingeniería Eléctrica y Computadores en la Universidad de California, Davis. Conocido como un instructor que está muy interesado por la disciplina de la ingeniería eléctrica y su aplicación a necesidades sociales y económicas. El profesor Dorf ha escrito y editado con éxito algunos libros de texto y manuales, entre ellos el número uno en ventas *Engineering Handbook* y la segunda edición del *Electrical Engineering Handbook*. El profesor Dorf es Fellow del IEEE y está activo en los campos de diseño de sistemas de control y robótica. Es poseedor de una patente para el controlador PIDA.

Robert H. Bishop es Director del Departamento de Ingeniería Aeroespacial e Ingeniería Mecánica en la Universidad de Texas, Austin. Posee el Fellowship en Ingeniería Myron L. Begeman y en el año 2002 fue elegido miembro de la Academia UT de Profesores Distinguidos. Educador prestigioso, el Profesor Bishop ha sido reconocido por su contribución en las aulas con el codiciado premio Martin Tactical Aircraft Systems para la Excelencia en la Enseñanza de la Ingeniería. Miembro activo del AIAA, el IEEE y el ASEE, recibió los premios John Leland Atwood de la Sociedad Americana de Educadores en Ingeniería y del Instituto Americano de Aeronáutica y Astronáutica que se entregan periódicamente a «un líder que ha hecho contribuciones duraderas y significativas a la educación en ingeniería aeroespacial». El Dr. Bishop es un destacado investigador interesado en el guiado, navegación y control de vehículos aeroespaciales.

CAPÍTULO 1

Introducción a los sistemas de control

1.1. Introducción 2
1.2. Historia del control automático 4
1.3. Dos ejemplos del uso de la realimentación 7
1.4. La práctica de la ingeniería de control 8
1.5. Ejemplos de sistemas modernos de control 9
1.6. Ensamblaje automático y robots 16
1.7. La evolución futura de los sistemas de control 17
1.8. Diseño en ingeniería 18
1.9. Sistemas mecatrónicos 19
1.10. Diseño de sistemas de control 23
1.11. Ejemplo de diseño: Control de velocidad de una mesa giratoria 24
1.12. Ejemplo de diseño: Sistema de control para la dosificación de insulina 26
1.13. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 27

SINOPSIS

En este capítulo se describe un proceso general para diseñar un sistema de control. Se diseña un sistema de control consistente en componentes interconectados para lograr un objetivo deseado. Para comprender el objetivo de un sistema de control es útil examinar ejemplos de sistemas de control a través del curso de la historia. Estos primeros sistemas incorporaban muchas de las ideas de realimentación que se utilizan hoy día.

La práctica de la ingeniería de control moderna comprende el uso de estrategias de diseño de control para mejorar los procesos de fabricación, la eficiencia de uso de la energía y el control avanzado de automóviles (incluyendo un tránsito rápido, entre otros). Se examinarán estas aplicaciones muy interesantes de ingeniería de control y se introducirá el área temática de la mecatrónica.

También se decidirá la noción de un vacío de diseño. Es decir, el salto que existe entre el sistema físico complejo que se está investigando y el modelo que se utiliza en la síntesis del sistema de control. La naturaleza iterativa del diseño permite manejar el vacío del diseño de manera efectiva mientras se cumplen los compromisos necesarios en complejidad, comportamiento y coste con el fin de cumplir las especificaciones.

Finalmente se introduce el Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco. Este ejemplo se considerará secuencialmente en cada capítulo de este libro. Representa un problema de diseño de sistema de control práctico e importante que simultáneamente sirve como una herramienta de aprendizaje útil.

1.1. INTRODUCCION

La ingeniería trata de comprender y controlar los materiales y fuerzas de la naturaleza en beneficio de la humanidad. El ingeniero de sistemas de control está interesado en el conocimiento y control de una parte de su medio, frecuentemente denominado **sistema**, con el fin de proporcionar productos económicos útiles para la sociedad. Los objetivos gemelos de comprender y controlar son complementarios ya que, para poder controlar más efectivamente, se precisa que los sistemas sean entendidos y modelados. Además, la ingeniería de control con frecuencia debe considerar sistemas poco conocidos, como los procesos químicos. El desafío actual para los ingenieros de control es el modelado y control de sistemas interrelacionados modernos y complejos, tales como los sistemas de control de tráfico, procesos químicos y sistemas robóticos. Simultáneamente, el ingeniero afortunado tiene la oportunidad de controlar muchos sistemas de automatización industriales útiles e interesantes. Quizás la cualidad más característica de la ingeniería de control sea la oportunidad de controlar máquinas y procesos industriales y económicos en beneficio de la sociedad.

La ingeniería de control se basa en los fundamentos de la teoría de la realimentación y el análisis de sistemas lineales, e integra los conceptos de las teorías de redes y de comunicación. Por tanto, la ingeniería de control no está limitada a ninguna disciplina de la ingeniería, sino que es igualmente aplicable a las ingenierías aeronáutica, química, mecánica, del medio ambiente, civil y eléctrica. Por ejemplo, un sistema de control incluye a menudo componentes eléctricos, mecánicos y químicos. Además, al aumentar el conocimiento de la dinámica de los sistemas comerciales, sociales y políticos, también se incrementa la capacidad de control de estos sistemas.

Un **sistema de control** es una interconexión de componentes que forman una configuración del sistema que proporcionará una respuesta deseada. La base para el análisis de un sistema es el fundamento proporcionado por la teoría de los sistemas lineales, que supone una relación entre causa y efecto para sus componentes. Por tanto, un componente o **proceso** que vaya a ser controlado puede representarse mediante un bloque tal como se muestra en la Figura 1.1. La relación entrada-salida representa la relación entre causa y efecto del proceso, que a su vez representa un procesamiento de la señal de entrada para proporcionar una señal de salida, frecuentemente con una amplificación de potencia. Un **sistema de control en lazo abierto** utiliza un regulador o actuador de control para obtener la respuesta deseada, tal como se muestra en la Figura 1.2. Un sistema en lazo abierto es un sistema sin realimentación.

Un sistema de control en lazo abierto utiliza un dispositivo de actuación para controlar el proceso directamente sin emplear realimentación.

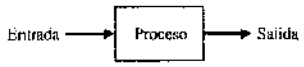


FIGURA 1.1
Proceso a controlar.

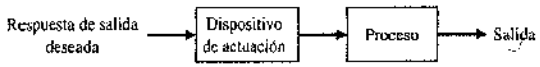


FIGURA 1.2
Sistema de control en lazo abierto (sin realimentación).

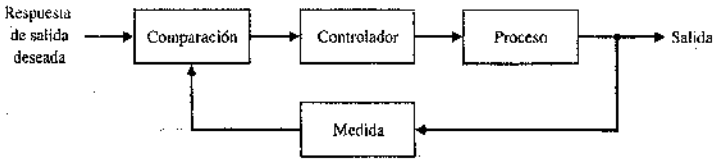


FIGURA 1.3
Sistema de control en lazo cerrado (con realimentación).

En contraste con un sistema de control en lazo abierto, un sistema de control en lazo cerrado utiliza una medida adicional de la salida real, para compararla con la respuesta de la salida deseada. La medida de la salida se denomina **señal de realimentación**. En la Figura 1.3 se muestra un sencillo **sistema de control con realimentación en lazo cerrado**. Un sistema de control con realimentación es aquel que tiende a mantener una relación prescrita de una variable del sistema con otra, comparando funciones de estas variables y usando la diferencia como un medio de control.

Para controlar un proceso, un sistema de control con realimentación suele emplear una función de una relación prescrita entre la salida y la entrada de referencia. A menudo, la diferencia entre la salida del proceso bajo control y la entrada de referencia se amplifica y se emplea para controlar el proceso, de manera que esta diferencia se reduce continuamente. El concepto de realimentación es el fundamento para el análisis y diseño de sistemas de control.

Un sistema de control en lazo cerrado usa una medida de la salida y la realimentación de esta señal para compararla con la salida deseada (referencia u orden).

Debido a la complejidad creciente del sistema bajo control y al interés en obtener comportamiento óptimo, en la pasada década ha crecido la importancia de la ingeniería de sistemas de control. Además, conforme los sistemas se hacen más complejos, deben considerarse en el esquema de control las interrelaciones de muchas variables controladas. En la Figura 1.4 se muestra un diagrama de bloques que representa a un **sistema de control multivariable**.

Un ejemplo común de un sistema de control en lazo abierto es un tostador eléctrico en la cocina. Un ejemplo de un sistema de control en lazo cerrado es una persona que conduce un automóvil (suponiendo que mantiene los ojos abiertos) al mirar la posición del coche en la carretera y realiza los ajustes apropiados.

La introducción de la realimentación permite controlar una salida deseada y puede mejorar la precisión, pero requiere que se preste atención al tema de la estabilidad de la respuesta.

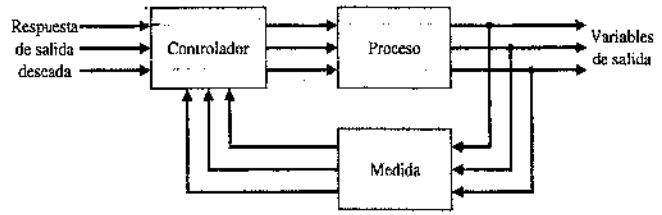


FIGURA 1.4
Sistema de control multivariable.

1.2. HISTORIA DEL CONTROL AUTOMÁTICO

El uso de la realimentación para controlar un sistema tiene una historia fascinante. Las primeras aplicaciones del control con realimentación aparecieron en el desarrollo de los mecanismos reguladores con flotador desarrollados en Grecia en el periodo 300 a. C. [1, 2, 3]. El reloj de agua de Ktesibios usaba un regulador con flotador (*véase* el Problema 1.11). Una lámpara de aceite inventada por Philon aproximadamente en el año 250 a. C., usaba un regulador de flotador para mantener un nivel constante de aceite. Herón de Alejandría, que vivió en el siglo I d. C., publicó un libro titulado *Pneumatica*, en el que describe varias formas de mecanismos de nivel de agua con reguladores de flotador [1].

El primer sistema con realimentación inventado en la Europa moderna fue el regulador de temperatura de Cornelis Drebbel (1572-1633) de Holanda [1]. Dennis Papin (1647-1712) inventó el primer regulador de presión para calderas de vapor en 1681. El regulador de presión de Papin fue una especie de regulador de seguridad similar a la válvula de las ollas a presión.

El primer controlador con realimentación automática usado en un proceso industrial, según se acepta generalmente, fue el **regulador centrífugo** de James Watt, desarrollado en 1769 para controlar la velocidad de una máquina de vapor [1, 2]. El dispositivo completamente mecánico, que se muestra en la Figura 1.5, medía la velocidad del eje motor y utilizaba el movimiento centrífugo del volante para controlar la válvula y, por tanto, la cantidad de vapor que entraba en la máquina. Cuando aumenta la velocidad, se elevan los contrapesos, alejándose del eje y cerrando la válvula. Los contrapesos necesitan potencia de la máquina para girar, y por tanto hacen menos exacta la medida de la velocidad.

El primer sistema con realimentación de la historia reclamado por Rusia es el regulador de nivel de agua de flotador, que se dice fue inventado por I. Polzunov en 1765 [4]. En la Figura 1.7 se muestra el sistema regulador de nivel. El flotador detecta el nivel de agua y controla la válvula que tapa la entrada de agua en la caldera.

El periodo que precede a 1868 se caracterizó por el desarrollo de sistemas de control automático gracias a la capacidad de intuición e invención de sus creadores. Los esfuerzos para aumentar la exactitud de los sistemas de control condujeron a disminuir la atenuación de las oscilaciones transitorias e incluso a sistemas inestables. Por consiguiente, fue imperativo desarrollar una teoría del control automático. J. C. Maxwell formuló una teoría matemática relacionada con la teoría del control usando un modelo de ecuación diferencial de un regulador [5]. El estudio de Maxwell consideró el efecto que tenían los diversos parámetros de un sistema en su comportamiento. Durante el mismo periodo, I. A. Vyshnegradskii formuló una teoría matemática de los reguladores [6].

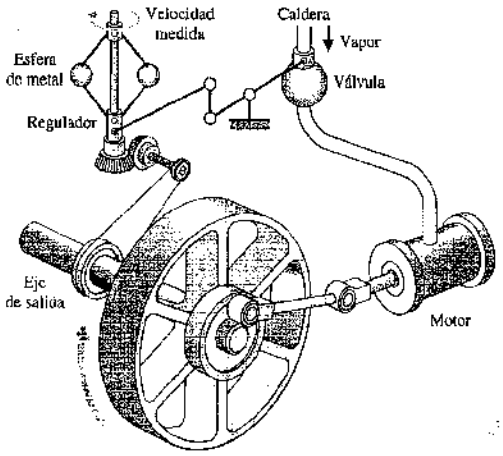


FIGURA 1.5
Regulador centrífugo de Watt.

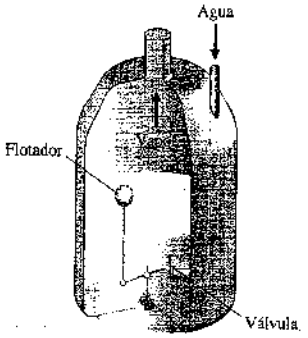


FIGURA 1.6
Regulador de nivel de agua de flotador.

Antes de la Segunda Guerra Mundial, la teoría y la práctica del control se desarrollaron de forma diferente en Estados Unidos y en la Europa occidental que en Rusia y en la Europa del Este. Un impulso importante para el uso de la realimentación en Estados Unidos fue el desarrollo del sistema telefónico y los amplificadores electrónicos con realimentación llevado a cabo por Bode, Nyquist y Black en los laboratorios de la Bell Telephone [7-10, 12]. Se usó principalmente el dominio de la frecuencia para describir la operación de los amplificadores con realimentación, en función del ancho de banda y otras variables de la frecuencia. En contraste, los eminentes matemáticos y mecánicos aplicados de Rusia estimularon y dominaron el campo de la teoría del control. Por tanto, la teoría rusa tendió a utilizar una formulación del dominio del tiempo usando ecuaciones diferenciales.

Durante la Segunda Guerra Mundial, la práctica y la teoría del control automático recibieron un gran impulso, ya que fue necesario diseñar y construir pilotos automáticos para aviones, sistemas de dirección de tiro, sistemas de control para las antenas de los radares y otros sistemas militares basados en los métodos de control por realimentación. La complejidad y el comportamiento esperado de estos sistemas militares necesitaron ampliar las técnicas de control disponibles y fomentaron el interés en los sistemas de control y en el desarrollo de nuevos métodos e ideas. Antes de 1940, en la mayoría de los casos, el diseño de los sistemas de control era un arte que implicaba un procedimiento de prueba y error. Durante la década de 1940, se incrementaron en número y utilidad los métodos matemáticos y analíticos, y la ingeniería de control se convirtió en una disciplina de la ingeniería por derecho propio [10-12].

Después de la Segunda Guerra Mundial, con el mayor uso de la transformada de Laplace y el plano de frecuencia compleja, las técnicas del dominio de la frecuencia continuaron dominando el campo del control. Durante la década de 1950, el énfasis en la teoría de la ingeniería de control se centró en el desarrollo y uso de los métodos en el plano s y, particularmente, en el método del lugar de las raíces. Más aún, durante la década de 1980, la utilización de computadores digitales como componentes de control se ha convertido en una rutina. La tecnología de estos nuevos elementos de control para efectuar cálculos precisos y rápidos no estuvo inicialmente disponible para los ingenie-

ros de control. En la actualidad, hay instalados en Estados Unidos más de 400 000 compu-tadores digitales para el control de procesos [14, 27]. Estos computadores se emplean principalmente para sistemas de control de procesos en los cuales se miden y controlan simultáneamente muchas variables.

Con el advenimiento del Sputnik y la era espacial, se dio otro nuevo impulso a la ingeniería de control. Fue necesario diseñar sistemas de control complejos y altamente precisos para proyectiles y sondas espaciales. Además, la necesidad de minimizar el peso de los satélites y de controlarlos con gran precisión ha estimulado el importante campo del control óptimo. A causa de estas necesidades, despertaron gran interés en la última década los métodos del dominio-tiempo debidos a Liapunov, Minorsky y otros. Recientes teorías de control óptimo desarrolladas por L. S. Pontryagin en Rusia y R. Bellman en Estados Unidos, así como estudios actuales de sistemas robustos, han contribuido al interés en los métodos en el dominio del tiempo. Hoy día, resulta evidente que la ingeniería de control debe considerar simultáneamente tanto el dominio-tiempo como el dominio-frecuencia en el análisis y diseño de sistemas de control.

En la Tabla 1.1 se resume una historia seleccionada del desarrollo de los sistemas de control.

Tabla 1.1 Desarrollo histórico seleccionado de los sistemas de control

1769	Máquina de vapor y controlador desarrollado por James Watt. La máquina de vapor de Watt se utiliza con frecuencia para marcar el comienzo de la Revolución Industrial en Gran Bretaña. Durante la Revolución Industrial, se produjeron grandes logros en el desarrollo de la mecanización una tecnología que precede a la automatización.
1800	El concepto de Eli Whitney de fabricación de piezas intercambiables se demostró en la producción de fusiles. El desarrollo de Whitney se considera a menudo como el comienzo de la producción en masa.
1868	J. C. Maxwell formula un modelo matemático para el controlador de la máquina de vapor.
1913	Introducción de la máquina de ensamblaje mecanizado de Henry Ford para la producción de automóviles.
1927	H. W. Bode analiza los amplificadores realimentados.
1932	H. Nyquist desarrolla un método para analizar la estabilidad de sistemas.
1952	Control numérico (CN) desarrollado en el Massachusetts Institute of Technology para el control de ejes de máquinas de herramientas.
1954	George Devol desarrolla el concepto de «transferencia de artículos programados» considerado como el primer diseño de robot industrial.
1960	Introducido el primer robot Unimate, basado en los diseños de Devol. Unimate se instaló en 1961 para atender máquinas de fundición.
1970	Desarrollados los modelos de variables de estado y el control óptimo.
1980	Estudios amplios sobre el diseño de sistemas de control robusto.
1990	Empresas de fabricación orientadas a la exportación apuestan por la automatización.
1994	Uso generalizado de los sistemas de control con realimentación en los automóviles. En los procesos de fabricación se demandan sistemas fiables y robustos.
1997	El primer vehículo de exploración autónoma, conocido como *Sojourner*, explora la superficie marciana.
1998-2003	Avances en micro y nanotecnología. Se desarrollan las primeras micromáquinas inteligentes y se crean nanomáquinas que funcionan.

1.3. DOS EJEMPLOS DEL USO DE LA REALIMENTACIÓN

En la Sección 1.1 se describió el concepto de realimentación utilizado para conseguir un sistema de control en lazo cerrado y se ilustra mediante el sistema de la Figura 1.3. Muchos ingenieros pioneros han utilizado los sistemas de control con realimentación para conseguir el comportamiento deseado. En la Figura 1.7 se muestra el sistema con realimentación. La diferencia (esto es el error) entre la respuesta de salida deseada y una medida razonablemente precisa de la salida real se calcula tal como se muestra en la figura. Los dos ejemplos siguientes ilustran el empleo de la realimentación para mejorar la respuesta de un sistema.

Harold S. Black, graduado en el Worcester Polytechnic Institute en 1921, comenzó a trabajar en los Laboratorios Bell de la American Telegraph and Telephone (AT&T). En 1921, la tarea fundamental a la que se enfrentaban los Laboratorios Bell era la mejora del sistema telefónico y la mejora en el diseño de amplificadores de señal. A Black se le asignó la tarea de linealizar, estabilizar y mejorar los amplificadores que se utilizaban en tándem para efectuar conversaciones a distancias de algunos miles de millas.

Black relata lo siguiente [8]:

> Entonces llegó la mañana del martes, 2 de agosto de 1927, cuando el concepto del amplificador con realimentación negativa me vino de forma repentina mientras estaba atravesando el río Hudson en el ferry Lackawanna, de camino hacia el trabajo. Durante más de 50 años he pensado cómo y por qué me surgió la idea y no puedo decir hoy nada más que lo que hice esa mañana. Lo único que sé es que después de algunos años de intenso trabajo sobre el problema, de repente me di cuenta de que, si alimentaba la salida del amplificador a su entrada invirtiendo su fase y sin que el sistema oscilase (cantase, tal como se decía entonces), tendría exactamente lo que necesitaba: una forma de cancelar la distorsión en la salida. Abrí mi periódico de la mañana y en una página del *The New York Times* dibujé un diagrama canónico simple de un amplificador con realimentación negativa más la ecuación para la amplificación con realimentación. Firmé el dibujo y 20 minutos más tarde, cuando llegué al laboratorio en el número 463 de West Street, fue atestiguado, comprendido y firmado por el fallecido Earl C. Blessing.
>
> Concebí este circuito de manera que condujera a amplificadores extremadamente lineales (de 40 a 50 dB de realimentación negativa); pero una cuestión importante es la siguiente: ¿cómo supe que se podían evitar autooscilaciones sobre un rango muy amplio de frecuencias cuando muchos incluso dudaban de que tales circuitos pudiesen ser estables? Mi confianza venía del trabajo que había realizado dos años antes sobre ciertos osciladores nuevos y tres años antes al diseñar los circuitos terminales, incluyendo los filtros y desarrollando las matemáticas de un sistema de telefonía modulada para circuitos interurbanos.

Otro ejemplo del descubrimiento de una solución de ingeniería a un problema de sistema de control fue el de la creación de un director de tiro por Davis B. Parkinson de los Laboratorios Bell. En la primavera de 1940, Parkinson era un ingeniero de 29 años encargado de mejorar el registrador de nivel automático, un instrumento que utilizaba un registrador de banda de papel para dibujar el registro de un voltaje. Un componente crítico era un pequeño potenciómetro utilizado para controlar la pluma del registrador mediante un actuador.

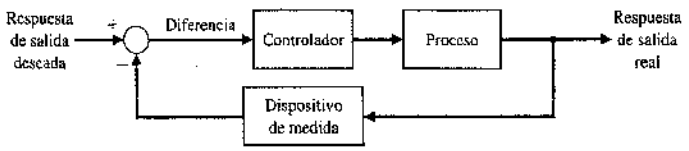


FIGURA 1.7
Sistema de realimentación en lazo cerrado.

Parkinson tuvo un sueño respecto de un cañón antiaéreo que estaba derribando aviones. Describía así la situación [13]:

> Después de tres o cuatro disparos, uno de los hombres de la tripulación me sonrió y me hacía señas para que me acercase al cañón. Cuando me aproximé, me señaló hacia un soporte giratorio localizado en el lado izquierdo. ¡Montado allí estaba el potenciómetro de control de mi registrador de nivel!

A la mañana siguiente Parkinson se dio cuenta del significado de su sueño:

> Si mi potenciómetro pudiese controlar la pluma del registrador de forma algo parecida, con una ingeniería adecuada, se podría controlar un cañón antiaéreo.

Después de considerable esfuerzo, se pudo entregar, el 1 de diciembre de 1941, un prototipo para su comprobación al ejército norteamericano. A principio de 1943 se pasó a la fase de producción del sistema y se entregaban 300 controladores de cañones. La entrada al controlador estaba proporcionada por un radar cuya finalidad era tomar los datos de la posición presente del avión y calcular la posición futura del objetivo.

1.4. LA PRÁCTICA DE LA INGENIERÍA DE CONTROL

La ingeniería de control trata del análisis y diseño de sistemas orientados por objetivos. Como consecuencia, se ha incrementado la mecanización de planes de acción dirigidos por objetivo hasta establecer una jerarquía de sistemas de control orientados a un objetivo. La teoría de control moderna tiene que ver con sistemas que poseen características de autoorganización, de adaptación, de aprendizaje y óptimas. Entre los ingenieros de control, este interés ha sido todavía mayor.

El control de un proceso industrial (fabricación, producción y otros) por medios automáticos en vez de manuales se suele conocer como **automatización**. La automatización es frecuente en las industrias química, de generación de electricidad, papelera, automotriz y siderúrgica, entre otras. El concepto de automatización es central para nuestra sociedad industrial. Las máquinas automáticas se usan para aumentar la producción de una planta por trabajador, a fin de compensar los salarios crecientes y los costos inflacionarios. Por esa razón, las industrias están interesadas en la productividad de sus plantas por trabajador. La **productividad** se define como la relación entre la salida física y la entrada física [26]. En este caso se refiere a la productividad del trabajo, que es la producción real por hora de trabajo.

Además, la industria busca proporcionar productos que son cada vez más precisos, fiables, exactos y robustos. Por ejemplo, el control preciso y fiable del comportamiento de un automóvil ha mejorado notablemente en las décadas pasadas.

En la breve historia de Estados Unidos, la transformación de su fuerza laboral siguió la mecanización progresiva del trabajo, que transformó la evolución de la república agraria en una potencia industrial mundial. En 1820, más del 70% de la fuerza de trabajo era agraria; hacia 1900, menos del 40% se dedicaba a la agricultura, y en la actualidad, esta proporción no llega al 5% [15].

En 1925 se requirieron 588 000 trabajadores, alrededor del 1.3% de la fuerza de trabajo del país, para extraer del subsuelo 520 millones de toneladas de carbón bituminoso y lignito. En 1980, esa producción aumentó a 774 millones de toneladas, pero la fuerza de trabajo se redujo a 208 000 trabajadores, de los cuales sólo 136 000 se dedicaron a operaciones de extracción en el subsuelo. Con sólo 72 000 trabajadores, la altamente mecanizada y productiva minería superficial produjo 482 millones de toneladas, es decir, el 62% del total [27].

La suavización del trabajo humano que ha provocado la tecnología, proceso que comenzó en la prehistoria, está entrando en una nueva etapa. La aceleración del ritmo de la innovación tecnológica, iniciada por la Revolución Industrial, ha dado como resultado principal hasta no hace mucho el desplazamiento de la fuerza muscular humana de las tareas de producción. La actual revolución en la tecnología computacional está causando un cambio social igualmente importante: la expansión de la recogida y procesamiento de información a medida que los computadores extienden el alcance del cerebro humano [16].

Los sistemas de control se emplean para conseguir: (1) un incremento de productividad y (2) un mejor comportamiento de un dispositivo o sistema. La automatización se emplea para mejorar la productividad y obtener productos de alta calidad. La automatización es la operación o el control automático de un proceso, dispositivo o sistema. El control automático de máquinas y procesos se emplea para fabricar productos dentro de ciertas tolerancias especificadas y lograr alta precisión [28].

El término *automatización* se popularizó en primer lugar en la industria del automóvil. Se acoplaron líneas de transferencia con máquinas de herramienta automáticas para crear largas líneas de maquinaria que podían producir componentes de motores, como el bloque del cilindro, casi sin la intervención del operador. En la fabricación de elementos de la carrocería se acoplaron mecanismos de alimentación automática con prensas de estampado de alta velocidad para incrementar la productividad en el troquelado de chapa metálica. En muchas otras áreas en las que los diseños permanecían relativamente estables, como la producción de radiadores, las líneas totalmente automatizadas reemplazaron las operaciones manuales.

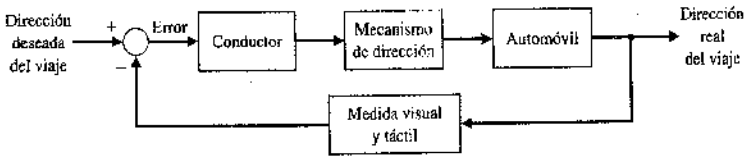
Con la demanda de producción flexible y a medida que está emergiendo en esta década, ha crecido la necesidad de una automatización flexible y de la robótica [17, 25].

En Estados Unidos hay aproximadamente 150 000 ingenieros de control, y un número similar en Japón y también en Europa. ¡Sólo en Estados Unidos, la industria de control realiza operaciones por más de 50 billones de dólares al año! La teoría, práctica y aplicación del control automático es una disciplina de la ingeniería amplia, interesante y muy útil. Por ello, es fácil comprender la motivación para el estudio de los sistemas de control modernos.

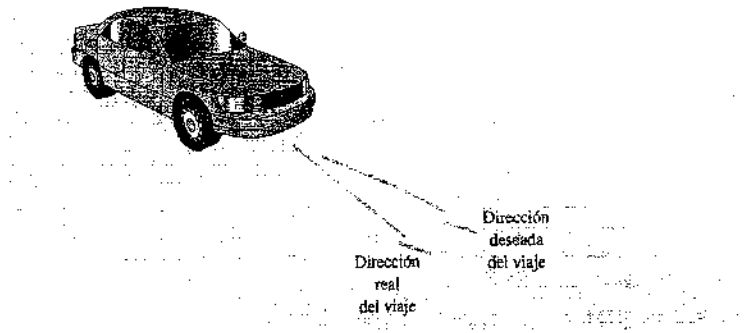
1.5. EJEMPLOS DE SISTEMAS MODERNOS DE CONTROL

El control por realimentación es un hecho fundamental de la industria y la sociedad modernas. Conducir un automóvil es una tarea agradable cuando el coche responde rápidamente a las órdenes del conductor. Muchos automóviles tienen dirección y frenos asistidos con amplificadores hidráulicos para aumentar la fuerza de los frenos o del volante de la dirección. En la Figura 1.8(a) se muestra un sencillo diagrama de bloques del sistema de control de la dirección de un automóvil. El rumbo deseado se compara con una medición del rumbo real para generar una medida del error tal como se muestra en la Figura 1.8(b). Esta medida se obtiene por realimentación visual y táctil (movimiento del cuerpo). Hay una realimentación adicional de la sensación percibida por la mano (sensor) sobre el volante de la dirección. Este sistema de realimentación es una versión familiar del sistema de control de la dirección en un barco o los controles de vuelo en un gran avión. En la Figura 1.8(c) se muestra una típica respuesta de la dirección del viaje.

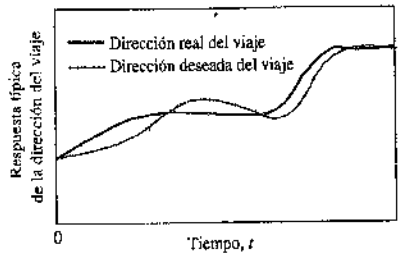
Los sistemas de control operan en una secuencia de lazo cerrado, como la que se muestra en la Figura 1.9. Con un sensor preciso, la salida medida es igual a la salida real del sistema. La diferencia entre las salidas real y deseada es igual al error, que se ajusta por el dispositivo de control (tal como un amplificador). La salida del dispositivo de



(a)



(b)



(c)

FIGURA 1.8
(a) Sistema de control de la dirección de un automóvil. (b) El conductor utiliza la diferencia entre la dirección real y la dirección deseada para generar un ajuste controlado del volante.
(c) Respuesta típica de la dirección del viaje.

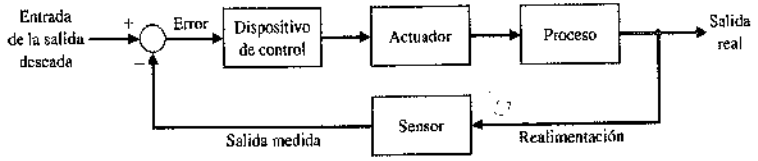


FIGURA 1.9
Diagrama de bloque de un sistema con realimentación negativa que representa a un sistema de control básico en lazo cerrado.
El dispositivo de control se denomina con frecuencia «controlador».

control hace que el actuador module el proceso para reducir el error. La secuencia es tal que si la nave deriva incorrectamente hacia la derecha, se actúa sobre el timón para dirigirla hacia la izquierda. El sistema de la Figura 1.9 es un sistema de control con **realimentación negativa**, ya que la salida se resta de la entrada y la diferencia se usa como señal de entrada para el amplificador de potencia.

En la Figura 1.10 se muestra un sistema básico de lazo cerrado de control manual para regular el nivel de líquido en un depósito. La entrada es un nivel de referencia de líquido que debe mantener el operador. (El operador memoriza esta referencia.) El amplificador de potencia es el operador y el sensor es visual. El operador compara el nivel real con el deseado y abre o cierra la válvula (actuador) ajustando así la salida de líquido para mantener el nivel deseado.

Otros conocidos sistemas de control tienen los mismos elementos básicos del sistema de la Figura 1.9. Un refrigerador tiene un ajuste de temperatura o temperatura deseada, un termostato para medir la temperatura real y el error, y un motor compresor para amplificación de potencia. Otros ejemplos en el hogar son el horno, la cocina y los calentadores de agua. En la industria hay controles de velocidad, presión, temperatura, posición, espesores, composición y calidad, entre muchos otros [14, 17, 18].

En su concepción moderna, la automatización se puede definir como una tecnología que utiliza órdenes programadas para operar un proceso dado, combinado con realimentación de información para determinar que las órdenes han sido ejecutadas adecuadamente. La automatización se emplea a menudo con procesos que previamente eran operados por humanos. Cuando se automatiza, el proceso puede operar sin ayuda o interferencia humana. De hecho, la mayoría de los sistemas automatizados son capaces de realizar sus funciones con mayor fidelidad y precisión y en menos tiempo que los seres humanos. Un proceso semiautomatizado es aquel que incorpora tanto seres humanos como robots. Por ejemplo, muchas operaciones en las líneas de montaje de automóviles requieren la cooperación entre un operador humano y un robot inteligente.

Un **robot** es una máquina controlada por computador que incorpora una tecnología que está muy asociada con la automatización. La robótica industrial se puede definir como un campo particular de la automatización en el cual la máquina automatizada (esto es, el robot) se diseña para sustituir mano de obra [18, 27, 33]. Así pues, los robots poseen ciertas características propias de los seres humanos. Hoy día, la característica más común de los humanos es un manipulador mecánico que se asemeja algo al brazo y la muñeca humana. Se reconoce que la máquina automática está bien adaptada para algunas tareas, tal como se indica en la Tabla 1.2, y que, en cambio, otras tareas se realizan mucho mejor por los humanos.

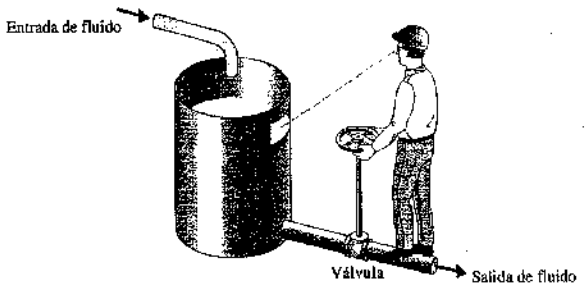


FIGURA 1.10
Un sistema de control manual para regular el nivel de líquido en un depósito mediante el ajuste de la válvula de salida. El operador observa el nivel del líquido a través de una mirilla lateral del depósito.

Tabla 1.2 Tarea difícil: Humano respecto a máquina automática

Tareas difíciles para una máquina	Tareas difíciles para un humano
Cuidar niños pequeños en una guardería	Inspeccionar un sistema en un ambiente tóxico
Conducir un vehículo por un terreno accidentado	Ensamblar de forma repetitiva un reloj
Identificar las joyas más caras en una bandeja de joyas	Aterrizar un avión de noche con tiempo malo

Otra aplicación muy importante de la tecnología del control está en el control de los automóviles modernos [19, 20]. Se han introducido sistemas de control para la suspensión, dirección y motor. Muchos coches nuevos tienen un sistema de dirección para las cuatro ruedas así como un sistema de control antideslizante.

En la Figura 1.11 se muestra un sistema de control de tres ejes para inspeccionar obleas individuales de semiconductores. El sistema emplea un motor específico para mover cada eje a la posición deseada en los ejes x, y y z respectivamente. Este sistema de control es realmente importante para la industria de fabricación de semiconductores.

Recientemente se ha debatido mucho sobre la separación existente entre la teoría y la práctica en la ingeniería de control. Sin embargo, es natural que la teoría proceda a las aplicaciones en muchos campos de la ingeniería de control. No obstante, es interesante observar que en la industria de generación de energía eléctrica, la industria más importante de Estados Unidos, este vacío es relativamente insignificante. Esta industria tiene como principal interés la conversión, control y distribución de energía. Es crítico que el control por computador se aplique cada vez más en la industria energética para mejorar el uso eficiente de los recursos energéticos. También ha tenido un incremento importante el control de las **centrales** eléctricas para minimizar la emisión de residuos contaminantes. Las plantas modernas de gran capacidad, que superan algunos cientos de megavatios, requieren sistemas de control automático que consideren la interrelación de las variables de proceso y la producción óptima de potencia. Es común manejar noventa o más variables con un control coordinado. En la Figura 1.12 se da un modelo simplificado que muestra algunas de las variables importantes de control en un gran sistema generador de caldera. Éste es un ejemplo de la importancia de medir múltiples variables, tales como presión y oxígeno, con el fin de proporcionar información al computador para los cálculos de control. Se estima que en Estados Unidos se han instalado más de 400 000 sistemas de control por computador [14, 16, 36, 39]. En la Figura 1.13 se muestra el diagrama de un sistema de control por computador; observe que el computador es el dispositivo de control. La industria de generación eléctrica ha utilizado los aspectos modernos de la ingeniería de control para aplicaciones significativas e interesantes. Parece que en la industria de proceso el factor que mantiene el vacío con respecto a las aplicaciones es la falta de instrumentación para medir todas las variables importantes del

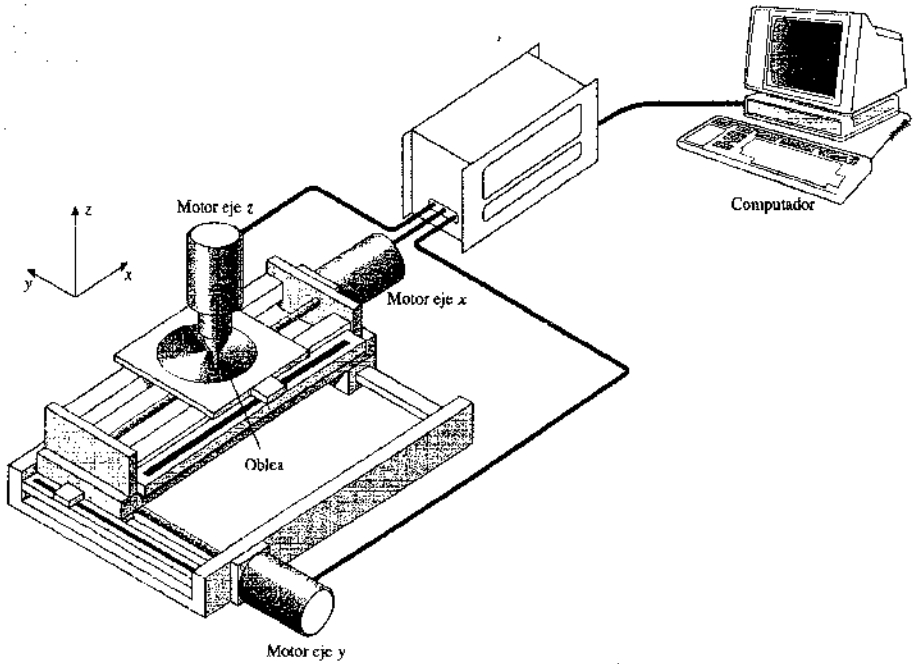


FIGURA 1.11. Sistema de control de tres ejes para inspeccionar de forma individual obleas de semiconductor con una cámara de alta sensibilidad.

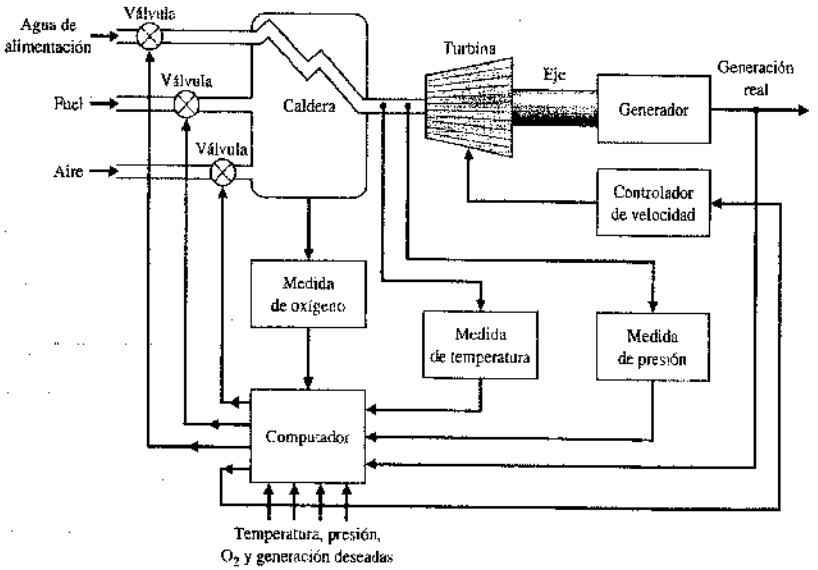


FIGURA 1.12
Sistema de control coordinado para un generador de caldera.

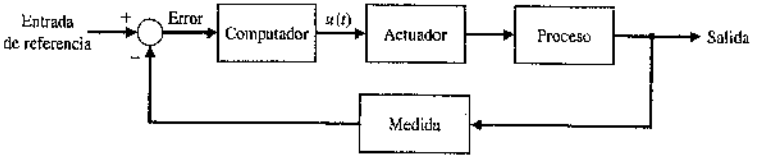


FIGURA 1.13
Sistema de control por computador.

proceso, incluidas la calidad y composición del producto. Cuando se tengan disponibles estos instrumentos, se incrementarán considerablemente las aplicaciones de la teoría moderna del control a los sistemas industriales.

Otra industria importante, la metalúrgica, ha tenido considerables éxitos a la hora de controlar automáticamente sus procesos. De hecho, en muchos casos, las aplicaciones del control están más adelantadas que la teoría. Por ejemplo, en una laminadora de chapas de acero en caliente, que supone una inversión de 100 millones de dólares, se controlan la temperatura, la anchura, el espesor y la calidad de la chapa.

El rápido aumento en los costes de la energía, junto con las amenazas de una reducción en la disponibilidad de ésta, ha dado como resultado nuevos esfuerzos para una gestión automática de la energía más eficiente. Se emplea control por computador para regular el uso de la energía en la industria, y así estabilizar y conectar uniformemente las cargas para economizar combustible.

Recientemente ha habido un considerable interés en aplicar los conceptos del control por realimentación al control automático del almacenamiento y de los inventarios. Además, ha aumentado el interés por el control automático de los sistemas agrícolas (granjas). Se han desarrollado y probado tractores y silos controlados automáticamente. El control automático de generadores de turbina eólica, de sistemas solares de calor y frío, y del comportamiento de motores de automóvil, son importantes ejemplos modernos [20, 21].

Así mismo, se han hecho muchas aplicaciones de la teoría de los sistemas de control a la experimentación biomédica, el diagnóstico, la prótesis y los sistemas de control biológico [22, 23, 51]. Los sistemas de control considerados abarcan desde el nivel celular hasta el sistema nervioso central e incluyen regulación de temperatura y control neurológico, respiratorio y cardiovascular. La mayoría de los sistemas de control fisiológico son sistemas de lazo cerrado. Sin embargo, no se trata de un regulador, sino más bien de una red de control dentro de otra, formando una jerarquía de sistemas. El modelado de la estructura de los procesos biológicos plantea al analista un modelo de orden elevado y una estructura compleja. Las prótesis que auxilian a los 46 millones de disminuidos físicos en Estados Unidos, que están controladas automáticamente, se diseñan para proporcionar los medios de ayuda al discapacitado [22, 27, 42]. En la Figura 1.14 se muestra una mano artificial que emplea señales de fuerza con realimentación y se controla por las señales de control bioeléctrico del muñón, que se conocen como señales electromiográficas.

Finalmente, ha sido de interés y utilidad intentar modelar los procesos de realimentación esenciales en las esferas social, económica y política. Este enfoque está poco desarrollado en la actualidad, pero parece tener un futuro interesante. La sociedad, por supuesto, está constituida por muchos sistemas de realimentación y estructuras de regulación como la Comisión de Comercio Interestatal y la Junta de la Reserva Federal, que son controladores que ejercen las fuerzas necesarias en la sociedad con el objeto de mantener una salida deseada. En la Figura 1.15 se muestra un modelo de parámetros concentrados sencillo del sistema de control con realimentación de la renta nacional. Este tipo de modelo ayuda al analista a entender el efecto del control del gobierno —siempre que exista— y los efectos dinámicos de los gastos gubernamentales. Por supuesto, también existen muchos otros lazos que no aparecen, ya que, teóricamente, el gasto del gobierno no puede exceder a la recaudación de impuestos sin un déficit, el cual es por sí mismo un lazo de control que contiene al Congreso y al Servicio de Rentas Públicas Internas. Por supuesto, en un país socialista lo que se promueve no es el lazo de los consumidores sino el control gubernamental. En ese caso, el bloque de medida debe ser

exacto y debe responder rápidamente; ambas son características muy difíciles de alcanzar en un sistema burocrático. Este tipo de modelo con realimentación político o social, aunque generalmente no es riguroso, sí proporciona información y conocimiento.

El área de investigación y desarrollo de las aeronaves no tripuladas (UAV) tiene un gran potencial para la aplicación de los sistemas de control. En la Figura 1.16 se muestra

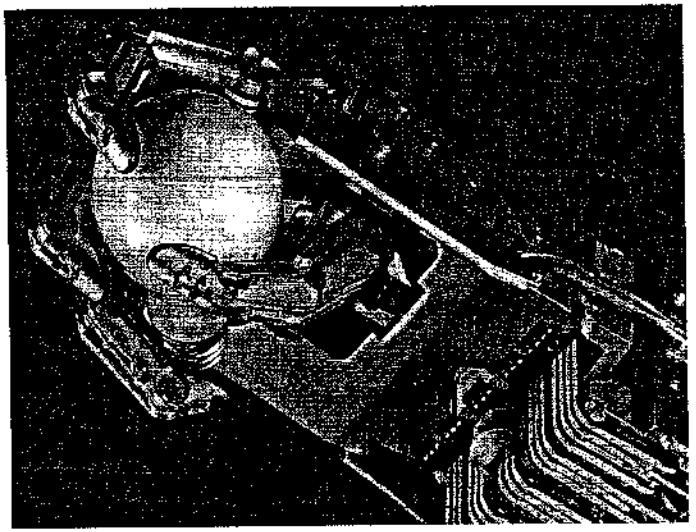


FIGURA 1.14
La mano diestra robótica Utah/MIT. Una mano robótica diestra que tiene 18 grados de libertad, desarrollada como herramienta de investigación por el Centro de Diseño de Ingeniería de la Universidad de Utah y el Laboratorio de Inteligencia Artificial del Instituto Tecnológico de Massachusetts. Está controlada por cinco microprocesadores Motorola 68000 y activada por 36 actuadores electroneumáticos de alta precisión, mediante tendones poliméricos de alta resistencia. La mano tiene tres dedos y un pulgar. Emplea sensores y tendones táctiles para su control. (Fotografía de Michael Milochik. Cortesía de la Universidad de Utah.)

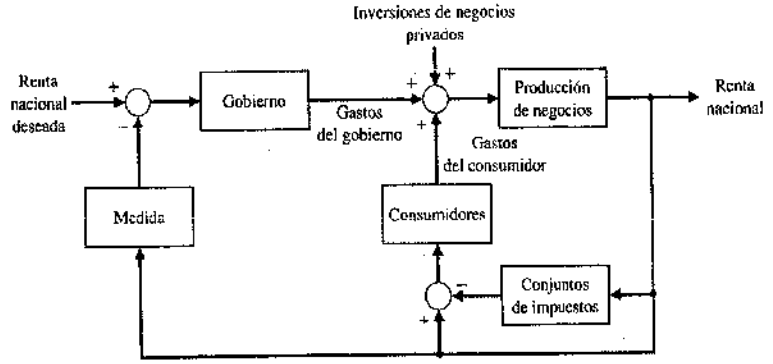


FIGURA 1.15
Un modelo de sistema de control con realimentación de la renta nacional.

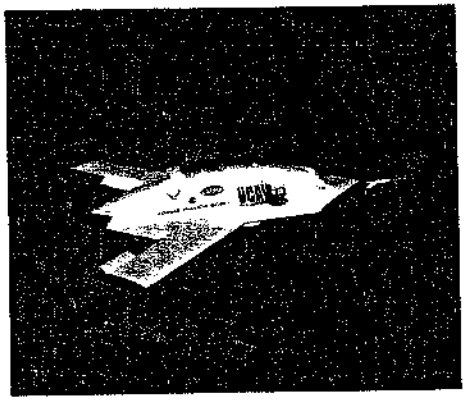


FIGURA 1.16
Aeronave no tripulada. (Cortesía de DARPA.)

un ejemplo de un UAV. Los UAV aunque son vehículos no tripulados, no operan de forma autónoma. Su incapacidad para proporcionar el nivel de seguridad de un avión tripulado impide que vuele libremente en el espacio aéreo comercial. Generalmente, el UAV se controla mediante operadores que están en tierra. Un reto significativo es desarrollar sistemas de control que eviten las colisiones en el aire. Básicamente, el objetivo es emplear el UAV de forma autónoma en acciones tales como la obtención de una fotografía aérea para asistir en operaciones de desastres, trabajos de reconocimiento para ayudar en proyectos en desarrollo, y supervisión de cosechas y del estado del tiempo. En un escenario militar, los UAV pueden realizar misiones de inteligencia, vigilancia y reconocimiento [83]. Aviones no tripulados inteligentes requerirán un empleo significativo de sistemas de control avanzado a través de todo el espacio aéreo.

1.6. ENSAMBLAJE AUTOMÁTICO Y ROBOTS

Los sistemas de control con realimentación se usan ampliamente en aplicaciones industriales. En la actualidad se utilizan miles de robots industriales y de laboratorio. Éstos pueden agarrar objetos que pesan cientos de libras y colocarlos con una precisión de una décima de pulgada o más [28]. Equipo de manejo automático para el hogar, la escuela y la industria, resulta particularmente útil para tareas peligrosas, repetitivas, tediosas o sencillas. Máquinas que automáticamente cargan y descargan, cortan, sueldan o moldean se emplean por la industria para obtener precisión, seguridad, economía y productividad [14, 27, 28, 41]. El uso de computadores integrados con máquinas que realizan tareas como un trabajador humano ha sido previsto por algunos autores. En su famosa obra de 1923, titulada *R.U.R.* [48], Karen Capek llamó *robots* a los trabajadores artificiales, derivando la palabra del nombre checo *robota*, que significa «trabajo».

Como ya se ha dicho anteriormente, los robots son computadores programables integrados con máquinas que sustituyen con frecuencia a trabajadores humanos en tareas específicas que se repiten. Algunos dispositivos incluso tienen mecanismos antropomórficos, incluyendo aquellos que se podrían reconocer como brazos mecánicos, muñecas y manos [14, 27, 28]. En la Figura 1.17 se muestra un ejemplo de un robot antropomórfico.

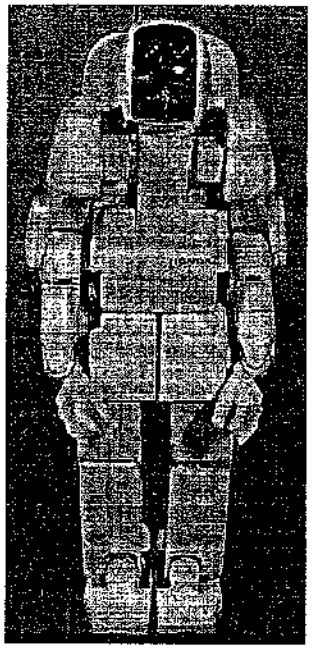


FIGURA 1.17
El robot humanoide Honda P3. P3 camina, sube escaleras y gira en las esquinas. (Fotografía cortesía de American Honda Motor, Inc.)

1.7. LA EVOLUCIÓN FUTURA DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

El objetivo continuado de los sistemas de control es proporcionar una gran flexibilidad y un elevado nivel de autonomía. Dos conceptos de sistemas se aproximan a este objetivo por diferentes caminos de evolución, tal como se ilustra en la Figura 1.18. Los robots industriales de hoy día se perciben como bastante autónomos —una vez programados, normalmente no requieren ninguna otra intervención—. Debido a sus limitaciones sensoriales, estos sistemas robóticos tienen una flexibilidad limitada para adaptarse a cambios en el entorno de trabajo que es la motivación de la investigación de visión por computador. El sistema de control es muy adaptable, pero descansa en la supervisión humana. Los sistemas robóticos avanzados están intentando conseguir la adaptabilidad a sus tareas a través de una realimentación sensorial mejorada. Las áreas de investigación se concentran en inteligencia artificial, integración sensorial, visión por computador y programación CAD/CAM fuera de línea que harán los sistemas más universales y económicos. Los sistemas de control están avanzando hacia operaciones autónomas como una mejora al control humano. Para reducir la carga de los operarios se están llevando a cabo investigaciones en control supervisor y en el desarrollo de interfases hombre-máquina y con el fin de mejorar la eficiencia del operador humano se aborda la gestión de bases de datos. Muchas actividades de investigación son comunes a la robótica y a los sistemas de control y están orientadas a reducir los costes de implementación y a ampliar el dominio de aplicación. Éstos incluyen métodos de comunicación mejorados y lenguajes de programación avanzados.

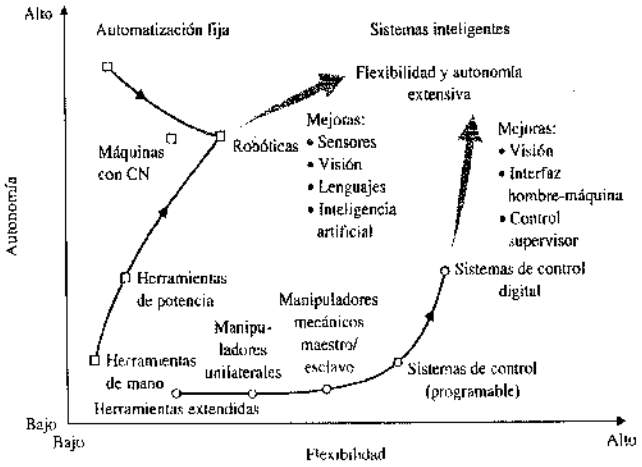


FIGURA 1.18
Evolución futura de sistemas de control y robóticos

1.8. DISEÑO EN INGENIERÍA

El **diseño** es la tarea central del ingeniero. Es un proceso complejo en el que la creatividad y el análisis desempeñan un papel fundamental.

> Diseño es el proceso de concebir o inventar las formas, partes y detalles de un sistema para lograr un objetivo específico.

Se puede pensar en la actividad de diseño como la planificación para el nacimiento de un producto o sistema particular. Diseño es un acto innovador donde el ingeniero creativamente utiliza conocimiento y materiales para especificar la forma, función y contenido material de un sistema. Los pasos del diseño son: (1) determinar una necesidad que surge de los deseos de varios grupos, que cubren el espectro que va desde los creadores de políticas públicas hasta los consumidores; (2) especificar en detalle cuál debe ser la solución a esa necesidad y dar forma a esos deseos; (3) desarrollar y evaluar diferentes soluciones alternativas para cumplir estas especificaciones, y (4) decidir cuál de ellas debe ser diseñada en detalle y fabricada.

Un factor importante en un diseño realista es la limitación de tiempo. El diseño tiene lugar bajo planificaciones impuestas que eventualmente establecen un diseño que puede no ser el ideal pero que se considera «suficientemente bueno». En muchos casos, el tiempo es la única ventaja competitiva.

Un gran reto para el diseñador es escribir las especificaciones para el producto técnico. **Especificaciones** son sentencias que explícitamente dicen lo que el dispositivo o producto es y hace. El diseño de sistemas técnicos tiene como finalidad lograr especificaciones de diseño apropiadas y descansa en cuatro características: complejidad, compromisos, desconocimiento en el diseño y riesgo.

La **complejidad del diseño** es el resultado del amplio rango de herramientas, temas y conocimientos que hay que utilizar en el proceso. El gran número de factores que hay que considerar ilustra la complejidad de la actividad de especificación del diseño, no solamente en asignar a estos factores su importancia relativa en un diseño particular sino también en darles contenido en forma numérica, escrita o en ambas.

El concepto del **compromiso** entraña la necesidad de hacer un juicio respecto de lo que se puede hacer entre dos criterios que están en conflicto y que ambos son deseables. El proceso de diseño requiere un compromiso eficiente entre criterios deseables pero que compiten entre sí.

Al hacer un dispositivo técnico, el producto final generalmente no sale igual que el que había sido originalmente visualizado. Por ejemplo, la imagen del problema que se está resolviendo no es lo que aparece en la descripción escrita y finalmente en las especificaciones. Tales diferencias son intrínsecas en la progresión desde una idea abstracta hasta su realización.

Esta incapacidad para estar absolutamente seguros respecto de las predicciones del comportamiento de un objeto técnico conduce a grandes incertidumbres acerca de los efectos reales de los dispositivos y productos diseñados. Estas incertidumbres se engloban en la idea de consecuencias no previstas o **riesgo**. El resultado es que diseñar un sistema es una actividad que tiene riesgo.

Complejidad, compromiso, desconocimiento y riesgo son inherentes al diseño de nuevos sistemas y dispositivos. Aunque se pueden minimizar al considerar todos los efectos de un diseño dado, están siempre presentes en el proceso de diseño.

Dentro del diseño de ingeniería, hay una diferencia fundamental entre los dos grandes tipos de pensamiento que deben tener lugar: análisis y síntesis. La atención se centra sobre los modelos de los sistemas físicos que se analizan para proporcionar nuevas perspectivas y que indican las direcciones para mejorar. Por otra parte, se denomina **síntesis** al proceso por el cual se crean estas nuevas configuraciones físicas.

El diseño es un proceso que puede partir en muchas direcciones antes de encontrar la deseada. Es un proceso deliberado por el cual un diseñador crea algo nuevo como respuesta a una necesidad reconocida tomando en consideración restricciones realistas. El proceso de diseño es inherentemente iterativo —hay que comenzar por algún punto—. Los buenos ingenieros aprenden a simplificar adecuadamente los sistemas complejos con el objetivo del diseño y el análisis. Es inevitable que exista desconocimiento entre el sistema físico complejo y el modelo del diseño. Los **desconocimientos en el diseño** son intrínsecos en la progresión desde el concepto inicial al producto final. Se sabe intuitivamente que es más fácil mejorar un concepto inicial incrementalmente que intentar crear un diseño final desde el principio. En otras palabras, el diseño de ingeniería no es un proceso lineal. Es un proceso iterativo, no lineal y creativo.

El método principal para los diseños de ingeniería más efectivos es el análisis y optimización de parámetros. El análisis de parámetros está basado en los siguientes pasos: (1) identificación de los parámetros claves, (2) generación de la configuración del sistema y (3) evaluación de lo bien que la configuración cumple las necesidades. Estos tres pasos forman un lazo iterativo. Una vez que se identifican los parámetros claves y se sintetiza la configuración, el diseñador puede **optimizar** los parámetros. Típicamente, el diseñador se esfuerza en identificar un conjunto limitado de parámetros que hay que ajustar.

1.9. SISTEMAS MECATRÓNICOS

Una etapa natural en el proceso evolutivo del diseño en la ingeniería moderna se encuadra en el área conocida como *mecatrónica* [70]. El término *mecatrónica* se acuñó en Japón en los años 1970 [71-73]. Mecatrónica es la integración sinergística de sistemas mecánicos, eléctricos y computadores, y ha evolucionado en los 30 últimos años, dando

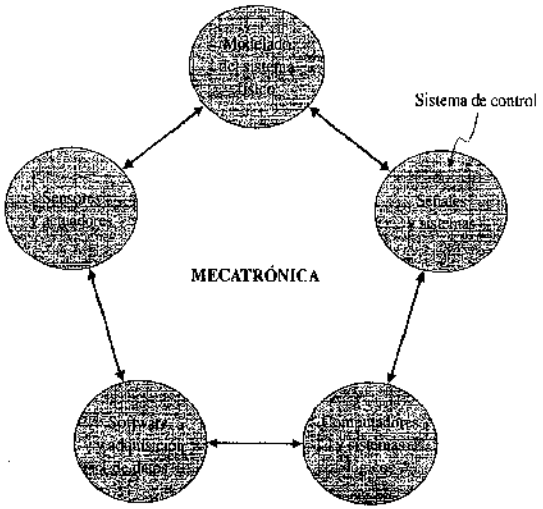


FIGURA 1.19
Los elementos claves de la mecatrónica [70].

lugar a una nueva familia de productos inteligentes. El control por realimentación es un aspecto integral de los sistemas mecatrónicos modernos. Se puede comprender la extensión que la mecatrónica alcanza en las diferentes disciplinas considerando los componentes que constituyen la mecatrónica [74-77]. Los elementos claves de la mecatrónica son: (1) modelado de sistemas físicos, (2) sensores y actuadores, (3) señales y sistemas, (4) computadores y sistemas lógicos y (5) software y adquisición de datos. El control por realimentación contiene aspectos de los cinco elementos claves de la mecatrónica, pero se asocia en primer lugar con los elementos de señales y sistemas, tal como se ilustra en la Figura 1.19.

Los avances en las tecnologías de hardware y software de los computadores acoplados con el deseo de incrementar la relación comportamiento/coste ha revolucionado el diseño en ingeniería. Se están desarrollando nuevos productos en la intersección de disciplinas tradicionales de la ingeniería, la ciencia de la computación y las ciencias naturales. Los avances en disciplinas tradicionales están activando el crecimiento de los sistemas mecatrónicos al proporcionar «tecnologías catalizadoras». Una tecnología crítica de este tipo fue el microprocesador que ha tenido un efecto profundo sobre el diseño de productos de consumo. Se deberían esperar avances continuados en microprocesadores y microcontroladores, sensores y actuadores nuevos a un coste razonable impulsado por los avances en las aplicaciones de los sistemas microelectromecánicos (MEMS), las metodologías de control avanzado y los métodos de programación en tiempo real, las tecnologías de redes y de sistemas inalámbricos y las tecnologías maduras de la ingeniería asistida por computador (CAE) para el modelado de sistemas avanzados, el prototipado virtual y la verificación. El desarrollo rápido y continuado en estas áreas solamente acelerará el ritmo de productos inteligentes (esto es, controlados activamente).

Un área excitante para el desarrollo de los sistemas mecatrónicos del futuro en los cuales los sistemas de control desempeñarán un papel muy significativo es el campo de la producción y utilización de energías alternativas. Los automóviles de combustible híbrido y la generación eficiente de energía eólica son dos ejemplos de sistemas que se pueden beneficiar de los métodos de diseño mecatrónicos. De hecho, la filosofía del

diseño mecatrónico se puede ilustrar de forma efectiva con el ejemplo de la evolución del automóvil moderno [70]. Antes de 1960, la radio era el único dispositivo electrónico significativo en un automóvil. Hoy día, muchos automóviles tienen de 30 a 60 microcontroladores, hasta 100 motores eléctricos y alrededor de 200 libras de cables, una multitud de sensores y miles de líneas de código. Un automóvil moderno no puede ya clasificarse como una máquina estrictamente mecánica. Ha sido transformado en un sistema mecatrónico muy amplio.

EJEMPLO 1.1. Vehículos de combustible híbrido

La investigación y el desarrollo reciente ha conducido a la próxima generación de *automóviles de combustible híbrido*, que se representa en la Figura 1.20. El vehículo de combustible híbrido utiliza un motor de combustión interna convencional en combinación con una batería (o cualquier otro dispositivo de almacenamiento de energía, como una pila de combustible o un volante) y un motor eléctrico para lograr un sistema de propulsión capaz de doblar la economía de combustible respecto de los automóviles convencionales. Aunque estos vehículos híbridos nunca serán de emisión cero (ya que tienen motores de combustión interna), pueden reducir el nivel de emisiones dañinas desde un tercio a la mitad, y con las mejoras que están pensadas para el futuro estas emisiones se pueden reducir aún más. Como ya se ha dicho, el automóvil moderno requiere para poder operar muchos sistemas de control avanzado. Los sistemas de control deben regular el comportamiento del motor, que incluye la mezcla de combustible-aire, la temporización de la válvula, las transmisiones, el control de tracción de las ruedas, los frenos antideslizantes y las suspensiones controladas electrónicamente, entre otras muchas responsabilidades. En el vehículo de combustible híbrido, hay funciones de control *adicionales* que deben satisfacerse. Especialmente necesario es el control de la potencia entre el motor de combustión interna y el motor eléctrico, determinar las necesidades de almacenamiento de potencia e implementar la carga de la batería y preparar al vehículo para emisiones bajas durante el arranque. La efectividad global del vehículo de combustible híbrido depende de la combinación de las unidades de potencia que se seleccionan (por ejemplo, batería frente a pila de combustible para el almacenamiento de energía). Finalmente, sin embargo, la estrategia de control que integra a los diferentes componentes eléctricos y mecánicos en un sistema de transporte viable tiene una gran influencia sobre la aceptabilidad por parte del mercado del concepto de vehículo de combustible híbrido. ■

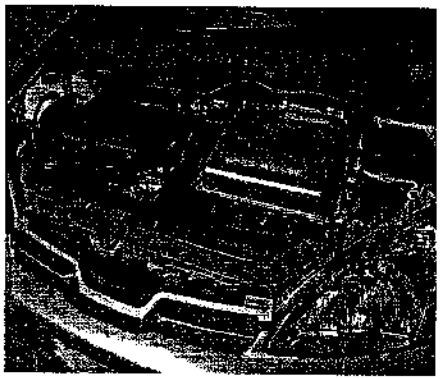


FIGURA 1.20
El automóvil de combustible híbrido se puede ver como un sistema mecatrónico. (Utilizado con permiso de DOE/NREL. Crédito: Warren Gretz.)

El segundo ejemplo de un sistema mecatrónico es el sistema avanzado de generación de energía eólica.

EJEMPLO 1.2. Energía eólica

Hoy día, muchos países del mundo se enfrentan con suministros de energía inestables que a menudo llevan a subidas en los precios del combustible y a escasez de la energía. Además, los efectos negativos de la utilización de combustibles fósiles sobre la calidad de nuestro aire están bien documentados. El problema se halla en que muchas naciones tienen un desequilibrio entre el suministro y la demanda de energía. Básicamente necesitan más que lo que producen. Para atacar este desequilibrio, muchos ingenieros están estudiando el desarrollo de sistemas avanzados para acceder a otras fuentes de energía, incluida la eólica. De hecho, la energía eólica es una de las formas de crecimiento más rápido de generación de energía en los Estados Unidos y en otros lugares del mundo. En la Figura 1.21 se ilustra una granja eólica que está en producción en el oeste de Texas.

En el año 2002, la capacidad de energía eólica total instalada era de más de 31 000 MW. En los Estados Unidos hay suficiente energía derivada del viento para abastecer de fluido a más de 3 millones de hogares (de acuerdo con la Asociación de Energía Eólica Americana). De treinta años a esta parte, los investigadores se han concentrado en desarrollar tecnologías que trabajan bien zonas de vientos fuertes (definidas como áreas con una velocidad del viento de al menos 6.7 m/s a una altura de 10 m). La mayor parte de los lugares con vientos fuertes que son accesibles en los Estados Unidos se están ya utilizando, y se deben producir avances en la tecnología para conseguir que el coste sea incluso efectivo en zonas con vientos más débiles. Se requieren nuevos desarrollos en los materiales y en la aerodinámica de forma que puedan operar en estas zonas de vientos más débiles rotores de turbinas más grandes, con un problema conexo: las torres que soportan a la turbina deben construirse más altas sin que por ello tengan que aumentar los costes totales. Además se tendrán que emplear controles avanzados para permitir el nivel de eficiencia requerido en el sistema de actuación para la generación de energía eólica. ■

Los avances en productos de energía alternativos tales como el automóvil híbrido y la generación eficiente de generadores de energía eólica proporcionan ejemplos actuales de desarrollos mecatrónicos. Existen otros numerosos ejemplos de sistemas inteligentes concebidos para entrar en nuestra vida cotidiana, que incluyen aparatos inteligentes para el hogar (por ejemplo, los lavavajillas, las aspiradoras y los hornos de microondas), dispositivos activados por redes inalámbricas, «máquinas amigables con los seres humanos» [81] que efectúan operaciones asistidas por robots y sensores y actuadores implantables.

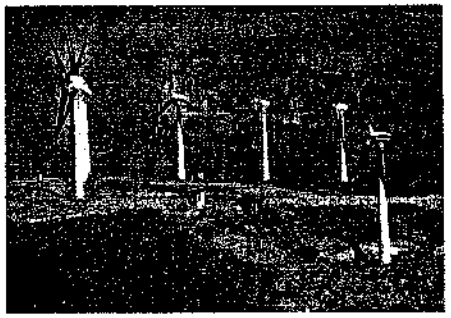


FIGURA 1.21
Generación de potencia eólica eficiente en el Oeste de Texas. (Utilizado con permiso de DOE/NREL. Crédito: Lower Colorado River Authority.)

1.10. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL

El diseño de sistemas de control es un ejemplo específico de diseño de ingeniería. Otra vez, el objetivo del diseño en ingeniería de control es obtener la configuración, especificaciones e identificación de los parámetros claves de un sistema propuesto para satisfacer una necesidad real.

El primer paso en el proceso de diseño consiste en establecer los objetivos del sistema. Por ejemplo, se puede decir que el objetivo es controlar la velocidad de un motor de manera precisa. El segundo paso es identificar las variables que se desean controlar (por ejemplo, la velocidad del motor). El tercer paso es escribir las especificaciones en función de la precisión que se debe alcanzar. Esta precisión de control requerida conducirá entonces a la identificación de un sensor para medir la variable controlada.

Como diseñadores, hay que proceder al primer intento para configurar un sistema que tenga el comportamiento de control deseado. La configuración del sistema normalmente consistirá en un sensor, el proceso bajo control, un actuador y un controlador, tal como se muestra en la Figura 1.9. El siguiente paso consiste en identificar un candidato para el actuador. Esto dependerá, por supuesto, del proceso, pero la actuación escogida debe ser capaz de ajustar de forma efectiva el comportamiento del proceso. Por ejemplo, si se desea controlar la velocidad de rotación de un volante, se seleccionará un motor como el actuador. El sensor, en este caso, deberá ser capaz de medir de manera precisa la velocidad. Se obtiene entonces un modelo para cada uno de estos elementos.

El paso siguiente es la selección de un controlador, que con frecuencia consiste en un amplificador de suma que comparará la respuesta deseada y la respuesta real, para luego transferir esta señal de medida del error a un amplificador.

El paso final en el proceso de diseño es el ajuste de los parámetros del sistema con el fin de lograr el comportamiento deseado. Si se puede conseguir el comportamiento deseado ajustando los parámetros se finalizará el diseño y se procederá a documentar los resultados. Si no es así, se necesitará establecer una nueva configuración del sistema y quizás seleccionar un actuador y un sensor mejores. A continuación se repetirán los pasos del diseño hasta que se cumplan las especificaciones o hasta que se decida que éstas son demasiado exigentes y deberían relajarse. En la Figura 1.22 se resume el proceso de diseño del sistema de control.

Las especificaciones de comportamiento describirán cómo debería funcionar el sistema en lazo cerrado e incluirán (1) buena regulación frente a las perturbaciones, (2) respuesta deseable a las órdenes de entrada, (3) señales realistas del actuador, (4) baja sensibilidad y (5) robustez.

El proceso de diseño se ha visto notablemente afectado por la aparición de computadores potentes y económicos y por un software eficaz para el análisis y diseño de sistemas de control. Por ejemplo, el Boeing 777, que incorpora los más avanzados sistemas de vuelo de cualquier avión comercial en Estados Unidos, fue casi enteramente diseñado por computador [62, 63]. La verificación de los diseños finales con simulaciones por computador de alta fidelidad resulta esencial. En muchas aplicaciones, la certificación de los sistemas de control en simulaciones realistas representa un coste importante en tiempo y dinero. Los pilotos de prueba del Boeing 777 volaron alrededor de 2400 vuelos en simulaciones de alta fidelidad antes de que se contruyese el primer avión.

Otro notable ejemplo de diseño y análisis asistido por computador es el vehículo experimental DC-X de la McDonnell Douglas Delta Clipper, que fue diseñado, construido y puesto en vuelo en 24 meses. Las herramientas de diseño asistido por computador y la

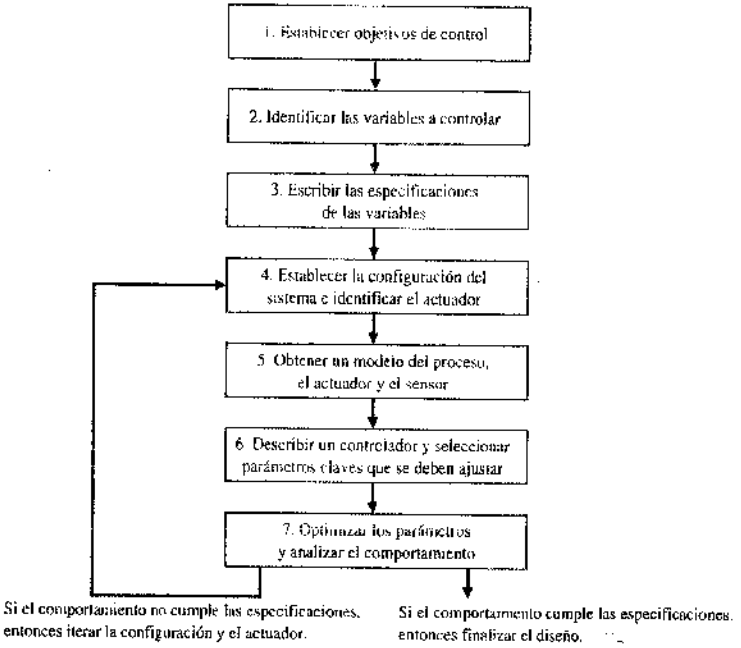

1. Establecer objetivos de control
2. Identificar las variables a controlar
3. Escribir las especificaciones de las variables
4. Establecer la configuración del sistema e identificar el actuador
5. Obtener un modelo del proceso, el actuador y el sensor
6. Describir un controlador y seleccionar parámetros claves que se deben ajustar
7. Optimizar los parámetros y analizar el comportamiento
Si el comportamiento no cumple las especificaciones, entonces iterar la configuración y el actuador.
Si el comportamiento cumple las especificaciones, entonces finalizar el diseño.

FIGURA 1.22
Proceso de diseño de un sistema de control.

generación de código automático contribuyeron a un ahorro del 80% en los costes y del 30% en el tiempo de desarrollo [64].

En resumen, el problema de diseño del controlador consiste en lo siguiente. Dado un modelo del sistema que se desea controlar (incluyendo sus sensores y actuadores) y un conjunto de objetivos de diseño, encontrar un controlador apropiado o determinar si no existe ninguno. Como sucede con la mayoría de los diseños en ingeniería, el diseño de un sistema de control con realimentación es un proceso iterativo y no lineal. Un buen diseñador debe considerar los fundamentos físicos de la planta que está bajo control, la estrategia de diseño del control, la arquitectura del controlador (esto es, qué tipo de controlador se va a emplear) y estrategias eficaces para la sintonía del controlador. Además, una vez finalizado el diseño, el controlador se implementa con frecuencia en hardware, por lo que pueden aparecer problemas de comunicación con dicho hardware. Cuando se consideran conjuntamente, estas diferentes fases del diseño de los sistemas de control hacen que la tarea de diseñar e implementar un sistema de control resulte bastante ardua [82].

1.11. EJEMPLO DE DISEÑO: CONTROL DE VELOCIDAD DE UNA MESA GIRATORIA

Muchos dispositivos modernos utilizan una mesa giratoria para rotar un disco a velocidad constante. Por ejemplo, un reproductor de CD, una unidad de disco de un computador y un tocadiscos requieren todos una velocidad constante de rotación a pesar del desgaste y variaciones del motor y otros cambios de sus componentes. El objetivo es diseñar un sistema para el control de velocidad de una mesa giratoria que asegure que la velocidad real de rotación está dentro de un porcentaje especificado de la velocidad

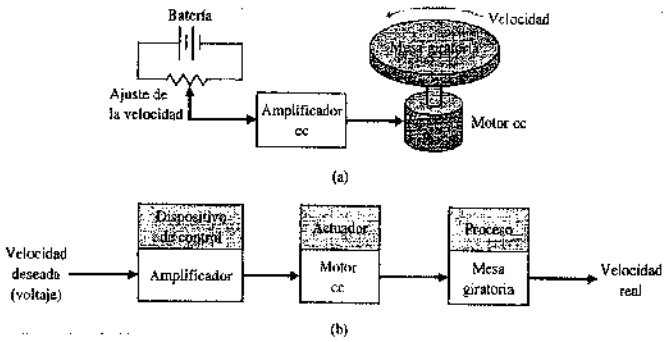


FIGURA 1.23
(a) Control de velocidad en lazo abierto (sin realimentación) de una mesa giratoria. (b) Diagrama de bloques.

deseada [43, 46]. Se considerará un sistema sin realimentación y un sistema con realimentación.

Para obtener la rotación del disco, se seleccionará un motor cc como el actuador ya que proporciona una velocidad proporcional al voltaje aplicado al motor. Para voltaje de entrada al motor, se seleccionará un amplificador que pueda proporcionar la potencia requerida.

En la Figura 1.23(a) se muestra el sistema en lazo abierto (sin realimentación). El sistema emplea una batería para proporcionar una tensión que es proporcional a la velocidad deseada. Este voltaje se amplifica y se aplica al motor. En la Figura 1.23(b) se muestra el diagrama de bloques del sistema en lazo abierto identificando el dispositivo de control, el actuador y el proceso.

Para obtener un sistema realimentado con la forma general de la Figura 1.9, se necesitará seleccionar un sensor. Un sensor útil es un tacómetro que suministra un voltaje de salida proporcional a la velocidad de su eje. Así el sistema con realimentación en lazo cerrado toma la forma que se muestra en la Figura 1.24(a). En la Figura 1.24(b) se muestra el diagrama de bloques del sistema con realimentación. El voltaje de error se genera por la diferenta entre el voltaje de entrada y el voltaje del tacómetro.

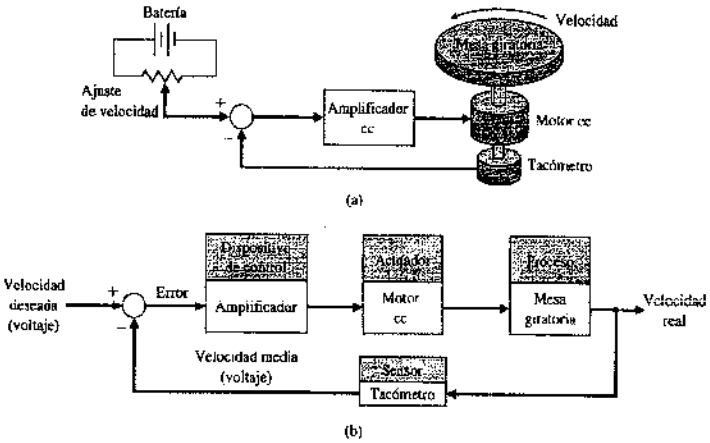


FIGURA 1.24
(a) Control de velocidad en lazo cerrado de una mesa giratoria. (b) Diagrama de bloques.

Es de esperar que el sistema con realimentación de la Figura 1.24 sea superior al sistema en lazo abierto de la Figura 1.23 porque el primero responderá a los errores y operará para reducirlos. Con componentes de precisión, se podría conseguir reducir el error del sistema con realimentación a una centésima del error del sistema en lazo abierto.

1.12. EJEMPLO DE DISEÑO: SISTEMA DE CONTROL PARA LA DOSIFICACIÓN DE INSULINA

Para este ejemplo y los ejemplos de diseño que siguen, se utilizará el proceso de diseño que se ilustra en la Figura 1.22. En el Capítulo 1, se desarrolla un plan de diseño preliminar llevando acabo los pasos del 1 al 4 del proceso de diseño de la Figura 1.22. Así, para este ejemplo, (1) se establecerá el objetivo del control, (2) se identificarán la variables de control, (3) se escribirán las especificaciones preliminares y (4) se establecerán una o más configuraciones posibles del sistema.

Los sistemas de control han sido utilizados en el campo biomédico para crear sistemas automáticos de dosificación de medicamentos implantados en el paciente [29-31]. Los sistemas automáticos se pueden utilizar para regular la presión de la sangre, el nivel de azúcar en sangre y el ritmo cardíaco. Una aplicación común de la ingeniería de control está en el campo de los sistemas en lazo abierto de suministro de fármacos, en los cuales se utilizan modelos matemáticos de la relación dosis-efecto del fármaco. Un sistema de suministro de fármaco implantado en el cuerpo emplea un sistema en lazo abierto ya que todavía no están disponibles sensores de glucosa miniaturizados. Las mejores soluciones descansan en bombas de insulina de tamaño de bolsillo que son programables y que pueden suministrar insulina de acuerdo con un plan temporal prefijado. Sistemas más complicados usarán sistemas en lazo cerrado para la medida de los niveles de glucosa en la sangre.

El objetivo (paso 1) es diseñar un sistema para regular la concentración de azúcar en la sangre de un diabético. En la Figura 1.25 se muestran las concentraciones de glucosa en sangre y de insulina para una persona saludable. El sistema debe proporcionar la insulina desde un depósito implantado dentro de la persona diabética.

Así pues, la variable que se desea controlar (paso 2) es la concentración de glucosa en la sangre. La especificación para el sistema de control (paso 3) es proporcionar un nivel de glucosa en la sangre para el diabético que se aproxime mucho (siga) al nivel de glucosa de una persona saludable (Figura 1.25).

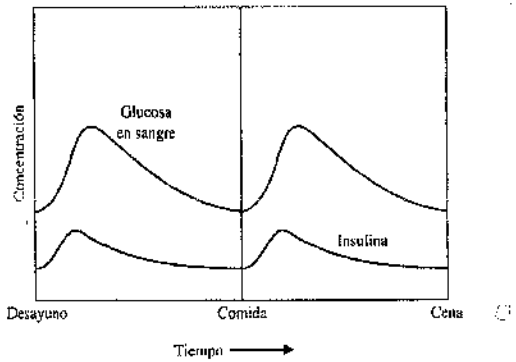


FIGURA 1.25
Niveles de glucosa en la sangre y de insulina para una persona sana.

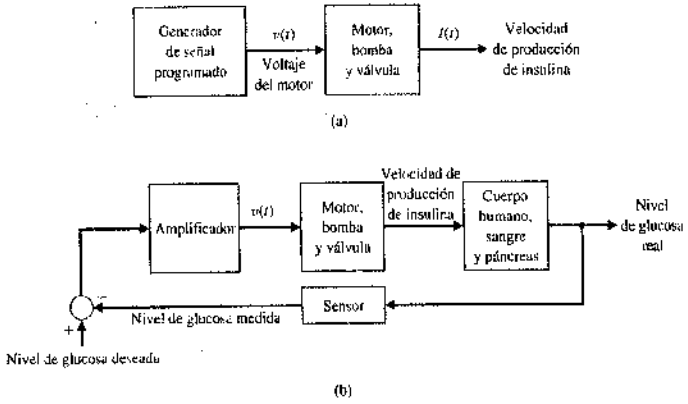


FIGURA 1.26
(a) Control en lazo abierto (sin realimentación) y (b) control en lazo cerrado de la glucosa en la sangre.

En el paso 4, se propone una configuración preliminar del sistema. Un sistema en lazo abierto utilizaría un generador de señal preprogramado y una bomba de motor en miniatura para regular la velocidad de suministro de insulina, tal como se muestra en la Figura 1.26(b). El sistema de control por realimentación emplearía un sensor para medir el nivel de glucosa real y comparar ese nivel con el nivel deseado para mover así el motor de la bomba cuando se requiera, tal como se muestra en la Figura 1.26(b)

1.13. EJEMPLO DE DISEÑO SECUENCIAL: SISTEMA DE LECTURA DE UNA UNIDAD DE DISCO

Este ejemplo de diseño, identificado con un icono en forma de flecha, se va a considerar secuencialmente en cada capítulo. Se utilizará el proceso de diseño de la Figura 1.22 en cada capítulo para identificar los pasos que se van a realizar. Por ejemplo, en el Capítulo 1 el interés se centra en los pasos 1, 2, 3 y 4, donde (1) determinará los objetivos de control, (2) identificará las variables a controlar, (3) escribirá las especificaciones iniciales para las variables y (4) establecerá la configuración preliminar del sistema.

La información se puede almacenar de forma rápida y eficiente en un disco magnético. Las unidades de disco se usan en los computadores cualquiera que sea su tamaño y están todas ellas esencialmente normalizadas tal como se define en las normas ANSI [54, 69]. Las ventas mundiales de unidades de disco se estima que son superiores a 250 millones de unidades en 2002 [55, 68]. En el pasado, los diseñadores de unidades de disco se han centrado en aumentar la densidad de los datos y en los tiempos de acceso a dichos datos. De hecho, a comienzos de la década de 1990, las densidades de las unidades de disco aumentaban a velocidades por encima del 60% por año y muy recientemente estos valores superan ya el 100% por año. La figura 1.27 muestra las tendencias de densidad de las unidades de disco. Los diseñadores están ahora considerando emplear unidades de disco para realizar tareas históricamente delegadas a la unidad de procesamiento central (CPU), lo que va a llevar a mejoras en los entornos de computación [69]. Estas áreas de «inteligencia» que se están investigando incluyen la recuperación de errores fuera de línea, avisos de fallos en unidades de disco y almacenamiento de datos a través de múltiples unidades de disco. Considérese el diagrama básico de una unidad de disco que se muestra en la Figura 1.28. El objetivo del dispositivo de lectura de la unidad de disco es posicionar la cabeza lectora con el fin de leer los datos almacenados en una pista del disco (paso 1). La variable a controlar de forma precisa (paso 2) es la posi-

ción de la cabeza de lectura (montada sobre un dispositivo de deslizamiento). El disco gira a una velocidad entre 1800 y 7200 rpm y la cabeza «vuela» por encima del disco a una distancia de menos de 100 nm. La especificación inicial para la precisión de la posición es de μm (paso 3). Más aún, se desea, si es posible, poder mover la cabeza desde la pista a hasta la pista b dentro de un intervalos de 50 ms. De esta forma se establece la configuración inicial que se muestra en la Figura 1.29. Este sistema en lazo cerrado propuesto emplea un motor para actuar (mover) el brazo a la posición deseada en el disco. En el Capítulo 2 se volverá a considerar el diseño de la unidad de disco.

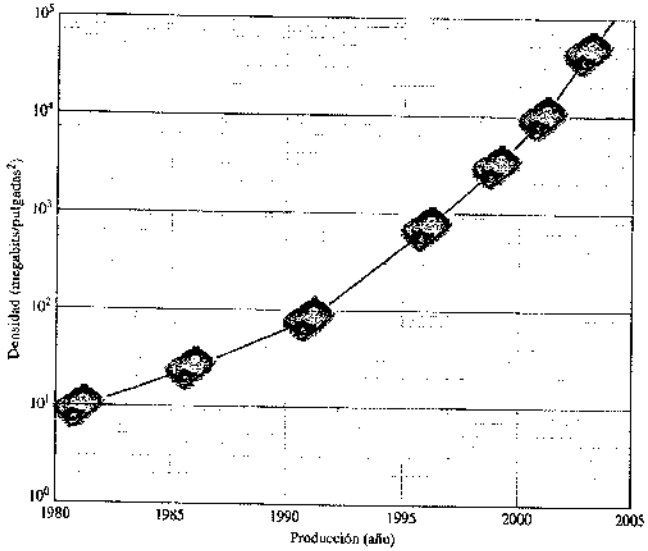


FIGURA 1.27
Tendencia de la densidad de datos en una unidad de disco. (*Fuente:* IBM.)

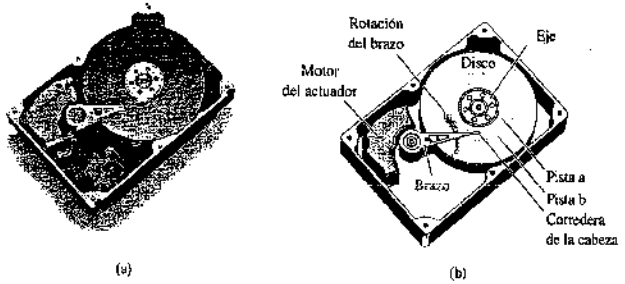


FIGURA 1.28
(a) Una unidad de disco © 1999 Quantum Corporation. Todos los derechos reservados.
(b) Diagrama de una unidad de disco.

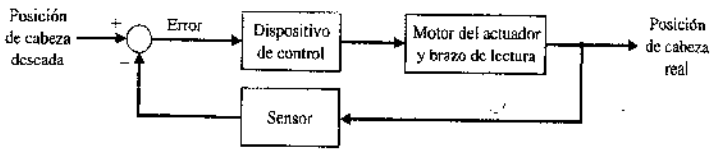


FIGURA 1.29
Sistema de control en lazo cerrado para una unidad de disco.

EJERCICIOS

(Son aplicaciones directas de los conceptos del capítulo.)

Los siguientes sistemas se pueden describir mediante un diagrama de bloques que muestra la relación causa-efecto y la realimentación (si está presente). Identificar las funciones de cada bloque y la variable de entrada deseada, la variable de salida y la variable medida. Donde resulte apropiado, utilícese la Figura 1.9 como modelo.

E1.1. Una fuente precisa de señales ópticas puede controlar el nivel de potencia de salida dentro de un margen del 1% [32]. Un rayo láser se controla mediante una entrada de corriente que produce la salida de potencia. Un microprocesador controla la corriente de entrada al láser. El microprocesador compara el nivel de potencia deseado con una señal medida proporcional a la salida de potencia del láser, que se obtiene de un sensor. Complétese el diagrama de bloques que representa este sistema de control de lazo cerrado que se muestra en la Figura E1.1, identificando las variables de salida, entrada y medida y el dispositivo de control.

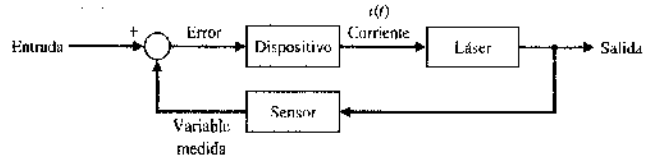


FIGURA E1.1. Diagrama de bloque parcial de una fuente óptica.

E1.2. El conductor de un automóvil emplea un sistema de control para mantener la velocidad del vehículo a un nivel determinado. Dibújese un diagrama de bloques que ilustre este sistema de realimentación.

E1.3. La pesca con mosca es un deporte en el que requiere que la persona lanza una pequeña mosca de plomo utilizando una barra ligera y una cuerda. El objetivo es colocar la mosca de forma precisa y ligera sobre la superficie distante de un río [65]. Descríbase el proceso de lanzar la mosca y un modelo de este proceso.

E1.4. Una cámara con autofoco ajustará la distancia de la lente desde la película utilizando un haz de infrarrojos o de ultrasonidos para determinar la distancia al objeto [45]. Dibújese un diagrama de bloques de este sistema de control en lazo abierto y explíquese brevemente su operación.

E1.5. Como un velero no puede navegar directamente siguiendo la dirección del viento y si lo hace en contra del viento es normalmente lento, la distancia de navegación más corta no suele ser la línea recta. Así pues, los veleros cambian de bordada en la dirección del viento —el familiar rumbo en zigzag— y cambian la escota de una vela cuando van contra el viento. Una decisión táctica de cuándo cambiar de virada y hacia dónde ir puede determinar el resultado de una carrera. Describir el proceso del cambio de virada de un velero cuando el viento modifica su dirección. Represéntese en un diagrama de bloques este proceso.

E1.6. Las autopistas automatizadas pueden ser predominantes en la próxima década. Considérense dos autopistas automatizadas cuyos carriles se funden en un único carril y descríbase un sistema de control que asegure que los vehículos se van solapando con un espacio prefijado entre dos vehículos.

E1.7. Descríbase el diagrama de bloques del sistema de control de velocidad de una moto con un conductor humano.

E1.8. Descríbase el proceso de biorrealimentación utilizado por los seres humanos para regular factores tales como dolores o la temperatura del cuerpo humano. La biorrealimentación es una técnica mediante la cual un ser humano puede, con algún éxito, regular de forma consciente el pulso, la reacción al dolor y la temperatura corporal.

E1.9. Los aviones comerciales avanzados del futuro serán E-activados. Esto permitirá al avión tomar ventaja de las mejoras continuas en la potencia de los computadores y en el crecimiento de las redes. Los aviones pueden comunicar de forma continua su posición, velocidad y parámetros de salud crítica a los controladores de tierra y reunir y transmitir datos meteorológicos locales. Represéntese un diagrama de bloques que muestre cómo los datos meteorológicos de múltiples aviones se pueden transmitir a tierra, combinados mediante potentes redes de computadores con su base en tierra para crear un conocimiento preciso del tiempo en la zona y a continuación volver a transmitirlo al avión para seguir una ruta óptima.

E1.10. Se están desarrollando vehículos aéreos no tripulados (UAV) para operar en el aire autónomamente por largos períodos de tiempo (*véase* la Sección 1.5). Por autónomo, se quiere expresar que no hay interacción con controladores humanos en tierra. Represéntese un diagrama de bloques de un UAV autónomo cuya tarea es supervisar la cosecha utilizando fotografía aérea. El UAV debe fotografiar y transmitir en vuelo la superficie de tierra completa siguiendo una trayectoria preespecificada de forma tan precisa como sea posible.

PROBLEMAS

(Los problemas requieren extender los conceptos de este capítulo a nuevas situaciones.)

Los sistemas siguientes se pueden describir mediante un diagrama de bloques que muestran la relación causa-efecto y la realimentación (si está presente). Cada bloque debería describir su función. Donde resulte apropiado utilícese la Figura 1.9 como modelo.

P1.1. Muchos automóviles de lujo tienen sistemas de acondicionamiento de aire controlados termostáticamente para el confort de los pasajeros. Represéntese un diagrama de bloques de un sistema de acondicionamiento de aire donde el conductor fija en el panel de instrumentación la temperatura interior deseada. Identifíquese la función de cada elemento del sistema de enfriamiento controlado termostáticamente.

P1.2. En el pasado, los sistemas de control utilizaban un operador humano como parte de un sistema de control de lazo cerrado. Dibújese el diagrama de bloques del sistema de control de la válvula que se muestra en la Figura P1.2.

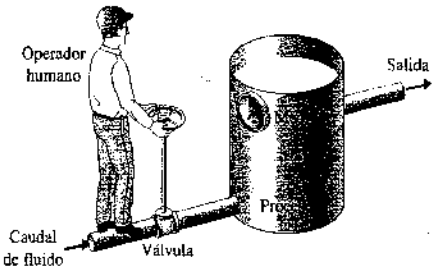


FIGURA P1.2. Control de caudal de un fluido.

P1.3. En un sistema de control de un proceso químico es importante controlar la composición química del producto. Para controlar la composición, puede obtenerse una medición de ésta usando un analizador de infrarrojos del flujo, tal como se muestra en la Figura P1.3. Puede controlarse la válvula del flujo de aditivo. Complétese el lazo del control con realimentación y dibújese un diagrama de bloques que describa la operación del lazo de control.

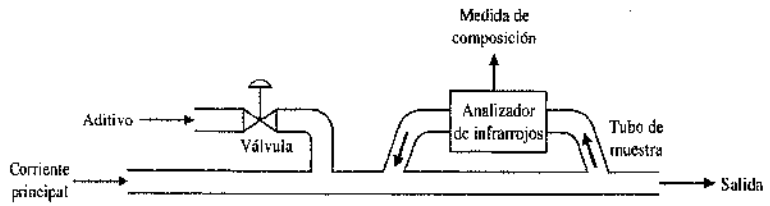


FIGURA P1.3 Control de composicion química.

P1.4. El control preciso de un reactor nuclear es importante para los sistemas de generación de potencia. Suponiendo que el número de neutrones presente es proporcional al nivel de potencia, se usa una cámara de ionización para medir dicho nivel. La corriente, i_0, es proporcional al nivel de potencia. La posición de las barras de control de grafito modera este nivel. Complétese el sistema de control del reactor nuclear que se muestra en la Figura P1.4 y dibújese el diagrama de bloques que describe la operación del lazo de control con realimentación.

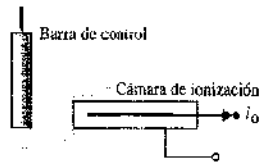


FIGURA P1.4. Control de un reactor nuclear.

P1.5. En la Figura P1.5 se muestra un sistema de control mediante una luz que se emplea para rastrear el sol. El eje de salida accionado por el motor mediante un engranaje de reducción, tiene unida una ménsula sobre la cual se montan dos fotocélulas. Complétese el sistema de lazo cerrado de forma que dicho sistema siga la fuente luminosa.

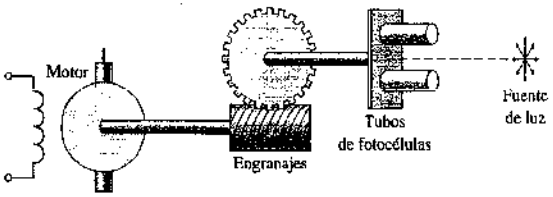


FIGURA P1.5. Una fotocélula se monta en cada tubo. La luz que alcanza cada célula es la misma en ambas sólo cuando la fuente de luz, tal como se muestra, se encuentra exactamente en la mitad.

P1.6. Un sistema con realimentación no siempre es de realimentación negativa. La inflación económica, que se caracteriza por una elevación continua de los precios, es un sistema con **realimentación positiva**. Un sistema de control con realimentación positiva, tal como se muestra en la Figura P1.6, añade la señal de realimentación a la señal de entrada, y la señal resultante se usa como entrada del proceso. En la Figura P1.6 se muestra un modelo simple de la espiral inflacionaria de precios-salarios. Agréguense lazos de realimentación adicionales, tales como el control legislativo o el control de las tasas de impuestos, para estabilizar el sistema. Se supone que un aumento en los salarios de los trabajadores, después de transcurrido algún tiempo, da como resultado un aumento de los precios. ¿En qué condiciones podrán estabilizarse los precios falsificando o retrasando los datos sobre el valor del coste de la vida? ¿De qué forma afectaría al sistema de realimentación un programa nacional de control económico de precios y salarios?

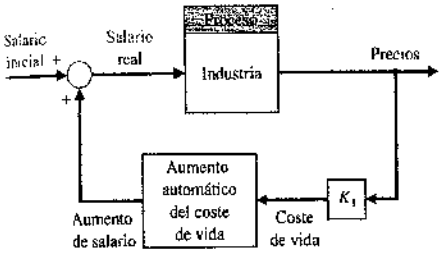


FIGURA P1.6. Realimentación positiva.

P1.7. La historia cuenta que un sargento se detenía en una joyería cada mañana a las 9 en punto y ajustaba su reloj comparándolo con el cronómetro del escaparate. Un día el sargento entró en el comercio y felicitó al dueño por la exactitud del cronómetro.

«¿Está ajustado con las señales horarias de Arlington?», preguntó el sargento.

«No», contestó el dueño, «lo ajusto según el cañonazo de las 5 del fuerte. Dígame, sargento, ¿por qué se detiene todos los días y comprueba la hora de su reloj?».

El sargento contestó: «yo soy el artillero del fuerte».

¿Es la realimentación predominante en este caso positiva o negativa? El cronómetro del joyero se atrasa dos minutos cada 24 horas y el reloj del sargento se atrasa tres minutos cada 8 horas. ¿Cuál es el error total en la hora del cañón del fuerte después de 12 días?

P1.8. El proceso de aprendizaje profesor-alumno es intrínsecamente un proceso con realimentación cuyo objetivo es reducir a un mínimo el error del sistema. Con la ayuda de la Figura 1.3, constrúyase un modelo de realimentación para el proceso de aprendizaje e identifíquese cada bloque del sistema.

P1.9. Los modelos de los sistemas de control fisiológicos son de gran ayuda para la profesión médica. En la Figura P1.9 [23, 24, 51] se muestra un modelo del sistema de control del ritmo cardíaco. Este modelo incluye el procesamiento de las señales nerviosas por parte del cerebro. El sistema de control del ritmo cardíaco es, de hecho, un sistema multivariable, donde x, y, w, v, z y u son variables vectoriales. En otras palabras, la variable x representa muchas variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del corazón. Examínese el modelo del sistema de control del ritmo cardíaco y añádanse o suprímanse bloques, si es necesario. Determínese un modelo del sistema de control de uno de los siguientes sistemas de control fisiológico:

1. Sistema de control respiratorio;
2. Sistema de control de la adrenalina;
3. Sistema de control del brazo humano;
4. Sistema de control del ojo;
5. Sistema de control del páncreas y del nivel de azúcar en la sangre;
6. Sistema circulatorio.

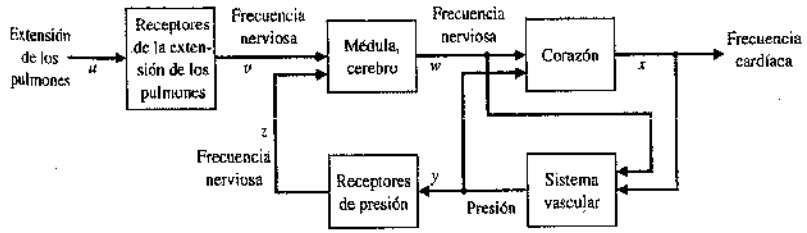


FIGURA P1.9. Control de la frecuencia cardíaca.

P1.10. El papel que desempeñan los sistemas de control de tráfico aéreo en los aeropuertos de alta afluencia cobra cada vez mayor importancia, en la medida en que el tráfico aéreo aumenta. Los ingenieros están desarrollando sistemas de control de vuelo, de control de tráfico aéreo y de prevención de colisiones utilizando los satélites de navegación del Sistema de Posicionamiento Global GPS [34, 61]. GPS permite a cada avión conocer su posición en el corredor de aterrizaje del espacio aéreo de manera muy precisa. Represéntese un diagrama de bloques en el que se muestre cómo un controlador de tráfico aéreo podría utilizar GPS para evitar las colisiones entre aviones.

P1.11. El control automático del nivel de agua mediante un flotador se usó en Oriente Medio para un reloj de agua [1, 11]. El reloj de agua (Figura P1.11) se usó desde antes de Cristo hasta el siglo XVII. Analícese la operación del reloj de agua y establézcase cómo el flotador proporciona un control con realimentación que conserva la exactitud del reloj. Dibújese un diagrama de bloques del sistema con realimentación.

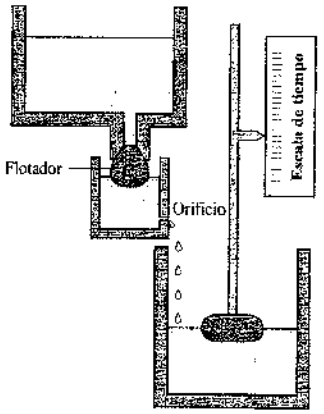


FIGURA P1.11. Reloj de agua. (Cor. permiso de Newton, Gould y Kaiser, *Analytical Design of Linear Feedback Controls*. Wiley. New York, 1957.)

P1.12. Hacia 1750, Meikle inventó un engranaje de giro automático para molinos de viento [1, 11]. El engranaje de cola que se muestra en la Figura P1.12 giraba automáticamente al actuar el viento sobre el molino. El molino de viento de la cola situado en ángulo recto con las aspas principales, servía para girar la torre. La relación del engranaje era del orden de 3000 a 1. Analícese la operación del molino de viento y establézcase la operación de la realimentación que mantiene a las aspas principales dentro del viento.

P1.13. Un ejemplo común de un sistema de control con dos entradas es una ducha que tiene llaves distintas para el agua caliente y el agua fría. El objetivo es obtener: (1) una temperatura deseada del agua de la ducha y (2) un flujo deseado de agua. Dibújese un diagrama de bloques del sistema de control de lazo cerrado.

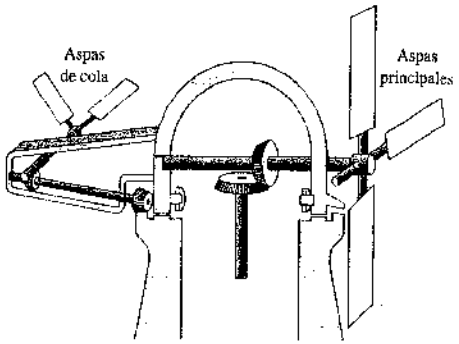


FIGURA P1.12. (Con permiso de Newton, Gould y Kaiser. *Analytical Design of Linear Feedback Controls*. Wiley. New York, 1957.)

P1.14. Adam Smith (1723-1790) analizó el tema de la libre competencia entre los participantes de una economía en su libro *La riqueza de las naciones*. Puede decirse que Smith empleó mecanismos de realimentación social para explicar sus teorías [44]. Smith sugirió que (1) los trabajadores disponibles como un todo, comparan los diferentes empleos posibles y toman aquellos que ofrecen la mayor remuneración, y (2) en cualquier empleo el pago disminuye según aumenta el número de trabajadores solicitantes. Supongamos que r = total de pagos promediado en todas las actividades; c = total de pagos en una actividad particular; q = afluencia de trabajadores dentro de una actividad específica. Dibújese un sistema con realimentación que lo represente.

P1.15. Para controlar las emisiones y obtener un mejor rendimiento de combustible por kilómetro de los automóviles, se emplean computadores pequeños. Un sistema de inyección de combustible controlado por computador que de forma automática autoajusta la relación de la mezcla aire-combustible puede mejorar el rendimiento de combustible por kilómetro y reducir de forma significativa la emisión de productos contaminantes no necesitados. Dibújese el diagrama de bloques de tal sistema para un automóvil.

P1.16. Todos los seres humanos han experimentado fiebre asociada con alguna enfermedad. La fiebre está relacionada con un cambio en la entrada de control del termostato corporal. Aunque las temperaturas del exterior fluctúen entre −18° y 38°C o más, este termostato, que se encuentra dentro del cerebro, regula normalmente la temperatura cerca de los 36°C. Cuando se tiene fiebre, la entrada o temperatura deseada se incrementa. Muchos científicos se sorprenden al saber que la fiebre en sí no indica una anomalía en el control de la temperatura corporal, sino una regulación ingeniosa que opera a un nivel elevado de entrada deseada. Dibújese un diagrama de bloques del sistema de control de temperatura y explíquese cómo una aspirina disminuye la fiebre.

P1.17. Los jugadores de béisbol emplean la realimentación para medir el vuelo de una pelota y para dar un golpe con el bate [35]. Describase el método que emplea un bateador para juzgar la localización del lanzador de forma que pueda tener el bate en la posición correcta para golpear la bola.

P1.18. En la Figura P1.18 se muestra un corte transversal de un regulador de presión de uso común. La presión deseada se ajusta al girar el tornillo calibrador. Esto comprime el resorte y establece una fuerza que se opone al movimiento ascendente del diafragma. El lado inferior del diafragma está expuesto a la presión de agua que se va a controlar. De esta forma, el movimiento del diafragma es una indicación de la diferencia entre la presión deseada y la real; esto es, actúa como comparador. La válvula se conecta al diafragma y se mueve de acuerdo con la diferencia de presión hasta que alcanza una posición en la cual la diferencia es cero. Represéntese un diagrama de bloques que muestre el sistema de control con la presión de salida como la variable controlada.

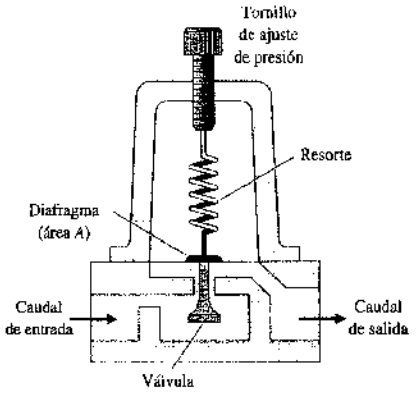


FIGURA P1.18. Regulador de presión.

P1.19. Ichiro Masaka de General Motors ha patentado un sistema que automáticamente ajusta la velocidad de un coche para mantener una distancia de seguridad con el vehículo de delante. Utilizando una cámara de vídeo, el sistema detecta y almacena una imagen de referencia del coche que está delante. A continuación compara esta imagen con un flujo de entrada de imágenes vivas cuando los dos coches se mueven por la autopista y calcula la distancia. Masaka sugiere que el sistema debería controlar la dirección así como la velocidad, permitiendo a los conductores seguir de forma automática al coche que va delante y conseguir así un «remolque computarizado». Represéntese un diagrama de bloques del sistema de control.

P1.20. En la Figura P1.20 se muestra un coche de carreras de altas prestaciones con un alerón ajustable. Desárrollese un diagrama de bloques que describa la capacidad del alerón para mantener una adhesión a la carretera constante entre las ruedas del coche y la superficie de la pista de carrera. ¿Por qué es importante mantener una buena adhesión a la carretera?

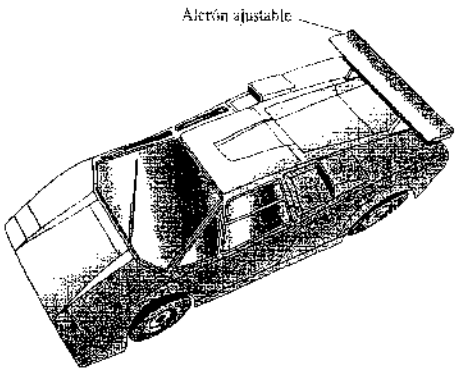


FIGURA P1.20. Coche de carreras de altas prestaciones con un alerón ajustable.

P1.21. El potencial de emplear dos o más helicópteros para transportar cargas que son demasiado pesadas para un único helicóptero es un tema que está bien planteado en la arena de los diseños civiles y militares de aviones con rotor [38]. Los requisitos globales se pueden satisfacer más eficientemente con un avión más pequeño utilizando múltiples montacargas para los picos de demandas que son poco frecuentes. De aquí que la motivación principal de emplear múltiples montacargas se puede atribuir a la promesa de obtener una mejora en la productividad sin tener que fabricar helicópteros más grandes y costosos. Un caso específico de una disposición de múltiples montacargas donde dos helicópteros transportan conjuntamente cargas ha sido bautizado como **montacargas gemelos**. La Figura 1.21 muestra una configuración típica de montacargas gemelos «objeto pendiente de dos puntos» en el plano lateral/vertical.

Desarróllese el diagrama de bloques que describa la acción de los pilotos, la posición de cada helicóptero y la posición de la carga.

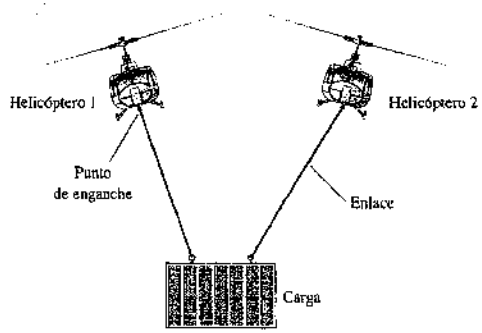


FIGURA P1.21. Dos helicópteros utilizados para levantar y mover una gran carga.

P1.22. Los ingenieros necesitan diseñar un sistema de control que permita que un edificio o cualquier otra estructura pueda reaccionar a la fuerza de un terremoto de la misma forma que lo haría un ser humano. La estructura cedería a la fuerza, pero sólo lo suficiente antes de que la fuerza sea aceptada para ser rechazada. Desarróllese un diagrama de bloques de un sistema de control para reducir el efecto de la fuerza de un terremoto.

P1.23. Los ingenieros de la Universidad de las Ciencias de Tokio están desarrollando un robot con un rostro humano. [56]. El robot puede visualizar expresiones faciales de manera que puede trabajar cooperativamente con trabajadores humanos. Represéntese un diagrama de bloques de su propio diseño para el sistema de control de una expresión facial.

P1.24. Una innovación para un limpiaparabrisas de un automóvil intermitente es el concepto de ajustar su ciclo de barrido de acuerdo con la intensidad de la lluvia [60]. Represéntese un diagrama de bloques del sistema de control del limpiaparabrisas.

P1.25. Desde hace 40 años, más de 20 000 toneladas métricas de hardware han sido colocadas en la órbita de la Tierra. Durante el mismo periodo de tiempo, más de 15 000 toneladas métricas de hardware han retornado a la tierra. Los objetos que permanecen en la órbita de la Tierra tienen un tamaño que van desde una gran nave espacial operativa hasta pequeñas manchas de pintura. Hay unos 150 000 objetos en la órbita de la Tierra de un tamaño de 1 cm o mayor. Alrededor de 10 000 de los objetos que hay en el espacio son actualmente seguidos desde estaciones en la tierra. El *control de tráfico en el espacio* [67] se está convirtiendo en un tema importante, especialmente para las compañías de satélites comerciales que piensan hacer volar sus satélites en órbitas en cuya altitud hay ya otros satélites en operación y en zonas donde pueden existir concentraciones elevadas de escombros espaciales. Represéntese un diagrama de bloques de un sistema de control de tráfico espacial que puedan utilizarlo las compañías comerciales para mantener sus satélites libres de colisiones mientras operan en el espacio.

P1.26. La NASA está desarrollando un vehículo explorador compacto para transmitir datos desde la superficie de un asteroide a la Tierra, tal como se ilustra en la Figura P1.26. El vehículo explorador utilizará una cámara para tomar fotografías panorámicas de la superficie del asteroide y podrá posicionarse de forma que la cámara pueda apuntar directamente hacia la superficie o hacia el cielo. Represéntese un diagrama de bloques que ilustre cómo el vehículo explorador se puede posicionar para apuntar la cámara en la dirección deseada. Supóngase que las órdenes de apuntamiento se retransmiten desde la Tierra al vehículo explorador y que la posición de la cámara se mide y se retransmite de vuelta hacia la Tierra.

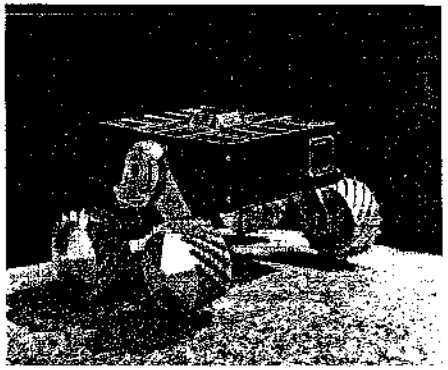


FIGURA P1.26. Microvehículo diseñado para explorar un asteroide. (Fotografía cortesía de NASA.)

P1.27. Una pila de combustible de metanol es un dispositivo electroquímico que convierte una solución acuosa de metanol en electricidad [84]. Como las baterías recargables, las pilas de combustible convierten productos químicos en energía; a menudo se las compara con las baterías, específicamente baterías recargables. Sin embargo, una diferencia significativa entre las baterías recargables y las pilas de combustible de metanol es que si se añade más solución acuosa de metanol, la pila de combustible se recarga de forma instantánea. Represéntese un diagrama de bloques del sistema de recarga de la pila de combustible de metanol que utiliza realimentación (*véase* la Figura 1.9) para monitorizar y recargar continuamente la pila de combustible.

PROBLEMAS AVANZADOS

(Los problemas avanzados representan problemas de complejidad creciente.)

PA1.1. El desarrollo de dispositivos de microcirugía robóticos tendrán grandes implicaciones en procedimientos quirúrgicos delicados en el cerebro y en los ojos. Los dispositivos de microcirugía emplean control por realimentación para reducir los efectos de las vibraciones de los músculos del cirujano. Los movimientos de precisión de un brazo robótico articulado pueden ser de gran ayuda para el cirujano al proporcionar una mano cuidadosamente controlada. En la Figura PA1.1 se muestra un dispositivo de este tipo. Los dispositivos microquirúrgicos han sido evaluados en procedimientos clínicos y ahora se están comercializando. Represéntese un diagrama de bloques del proceso quirúrgico con un dispositivo microquirúrgico en el lazo que está siendo operado por un cirujano. Supóngase que la posición del efector final en el dispositivo microquirúrgico se puede medir y está disponible para realimentación.

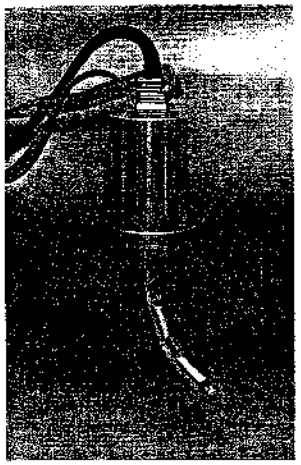


FIGURA PA1.1. Manipulador robótico para microcirugía. (Fotografía cortesía de NASA.)

PA1.2. En muchos lugares del mundo se están instalando sistemas de energía eólica avanzados como una forma que tienen las naciones de luchar contra el incremento de los precios del combustible y la escasez de energía y para reducir los efectos negativos de la utilización de combustibles fósiles sobre la calidad del aire (*véase* el Ejemplo 1.2 en la Sección 1.9). Los modernos molinos de viento se pueden ver como sistemas mecatrónicos. Considérese la Figura 1.19 que ilustra los elementos claves de los sistemas mecatrónicos. Utilizando la Figura 1.19 como guía, piénsese en cómo un sistema de energía eólica avanzado se diseñaría como un sistema mecatrónico. Relaciónense los diferentes componentes de un sistema de energía eólica y asóciese cada componente con uno de los cinco elementos de un sistema mecatrónico: modelado de sistema físico, señales y sistemas, computadores y sistemas lógicos, software y adquisición de datos y sensores y actuadores.

PROBLEMAS DE DISEÑO

[Los problemas de diseño ponen de relieve la tarea de diseño. Los problemas de diseño continuo (PDC) construyen un problema de diseño de capítulo en capítulo.]

PDC1.1. Los requisitos cada vez más exigentes de la moderna maquinaria de alta precisión están colocando demandas crecientes sobre los sistemas de guía de deslizamiento [57]. El objetivo es controlar de forma precisa la trayectoria deseada de la mesa que se muestra en la Figura PDC1.1. Represéntese un modelo del diagrama de bloques de un sistema con realimentación para conseguir el objetivo deseado. La mesa se puede mover en la dirección x tal como se muestra.

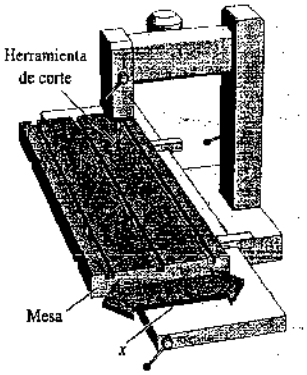


FIGURA PDC1.1. Máquina de herramienta con mesa.

PD1.1. El ruido de la carretera y del vehículo que invade el interior de un automóvil acelera la fatiga de los ocupantes [66]. Diséñese el diagrama de bloques de un sistema con realimentación «antirruido» que reducirá el efecto de los ruidos no necesitados. Indíquese el dispositivo dentro de cada bloque.

PD1.2. Muchos coches están equipados con un control de velocidad que, al pulsar un botón, automáticamente mantiene una velocidad fija. De esta forma, el conductor puede mantenerse en un límite de velocidad o velocidad económica sin tener que estar continuamente comprobando el velocímetro. Diséñese un control con realimentación en forma de un diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad.

PD1.3. Como parte de la automatización de una granja lechera, está en estudio la automatización del ordeño de las vacas [37]. Diséñese una ordeñadora que pueda ordeñar vacas cuatro o cinco veces al día bajo demanda de la vaca. Represéntese un diagrama de bloques e indíquense los dispositivos en cada bloque.

PD1.4. En la Figura PD1.4 se muestra un gran brazo de robot reforzado para soldar grandes estructuras. Represéntese el diagrama de bloques de un sistema de control con realimentación en lazo cerrado para controlar de manera precisa la localización de la punta de soldar.

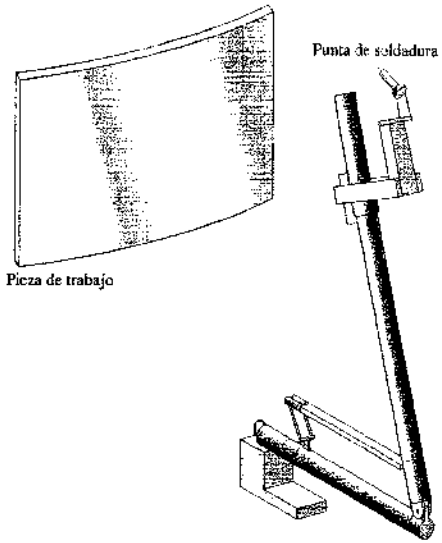


FIGURA PD1.4. Robot soldador.

PD1.5. El control de tracción de un vehículo que incluye frenos antideslizantes y aceleración antigiro puede mejorar el comportamiento y manejo de un vehículo. El objetivo de este control es maximizar la tracción de los neumáticos evitando el bloqueo de los frenos así como el giro de los neumáticos durante la aceleración. El deslizamiento (patinaje) de las ruedas, la diferencia entre la velocidad del vehículo y la velocidad de la rueda, se escoge como la variable controlada debido a su fuerte influencia sobre la fuerza de tracción entre el neumático y la carretera [19]. El coeficiente de adhesión entre la rueda y la carretera alcanza un máximo cuando el deslizamiento es bajo. Desarróllese un modelo de diagrama de bloques de una rueda de un sistema de control de tracción.

PD1.6. El telescopio espacial Hubble se reparó y modificó en el espacio en algunas ocasiones [47, 49, 52]. Un problema que plantea desafíos en el control del Hubble es amortiguar la fluctuación que hace vibrar la estructura espacial cada vez que entra o sale de la sombra de la Tierra. La peor vibración tiene un periodo de unos 20 segundos o una frecuencia de 0.05 hercios. Diséñese un sistema con realimentación que reducirá la vibración del telescopio espacial Hubble.

TÉRMINOS Y CONCEPTOS

Automatización. Control de un proceso por medios automáticos.

Complejidad de diseño. Estructura complicada de partes entremezcladas y del conocimiento requerido.

Compromiso. Resultado de emitir un juicio acerca del equilibrio que debe hacerse entre criterios que entran en conflicto.

Diseño. Proceso de concebir o inventar las formas, partes y detalles de un sistema para lograr un objetivo especificado.

Diseño en ingeniería. Proceso de diseñar un sistema técnico.

Especificaciones. Sentencias que explícitamente dicen lo que el dispositivo o producto tiene que ser o hacer. Un conjunto de criterios de comportamiento prescrito.

Optimización. Ajuste de los parámetros para conseguir el diseño más favorable o ventajoso.

Planta. *Véase* Proceso.

Proceso. Dispositivo, planta o sistema bajo control.

Productividad. Relación entre la salida física y la entrada física de un proceso industrial.

Realimentación negativa. La señal de salida se realimenta de forma que se resta de la señal de entrada.

Realimentación positiva. La señal de salida se realimenta de forma que se suma a la señal de entrada.

Regulador de bolas. Dispositivo mecánico para controlar la velocidad de una máquina de vapor.

Riesgo. Incertidumbres que se engloban dentro de las consecuencias no previstas de un diseño.

Robot. Computadores programables integrados con un manipulador. Un manipulador multifuncional reprogramable empleado para una diversidad de tareas.

Señal de realimentación. Medida de la salida del sistema utilizada como realimentación para controlar al sistema.

Síntesis. Proceso mediante el cual se crea nuevas configuraciones físicas. La combinación de elementos o dispositivos separados para formar un todo coherente.

Sistema. Interconexión de elementos y dispositivos para un objetivo deseado.

Sistema de control. Interconexión de componentes que forman una configuración del sistema que proporcionará una respuesta deseada.

Sistema de control con realimentación en lazo cerrado. Sistema que utiliza una medida de la salida y la compara con la salida deseada.

Sistema de control en lazo abierto. Sistema que utiliza un dispositivo para controlar el proceso sin usar realimentación. Así, la salida no tiene efecto sobre la señal de entrada al proceso.

Sistema de control multivariable. Sistema con más de una variable de entrada o más de una variable de salida.

Vacío en el diseño. Vacío o hueco entre el sistema físico complejo y el modelo de diseño intrínseco a la progresión desde el concepto inicial hasta el producto final.

CAPÍTULO 2

Modelos matemáticos de los sistemas

2.1. Introducción 38
2.2. Ecuaciones diferenciales de sistemas físicos 38
2.3. Aproximaciones lineales de sistemas físicos 43
2.4. La transformada de Laplace 46
2.5. La función de transferencia de sistemas lineales 52
2.6. Modelos de diagramas de bloques 63
2.7. Modelos de grafos de flujo de señal 72
2.8. Análisis de sistemas de control por computador 78
2.9. Ejemplos de diseño 79
2.10. La simulación de sistemas utilizando MATLAB 89
2.11. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 102
2.12. Resumen 105

SINOPSIS

Se utilizan modelos matemáticos cuantitativos de sistemas físicos para diseñar y analizar sistemas de control. La conducta dinámica se describe generalmente mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. Se considerará un amplio rango de sistemas, incluidos los mecánicos, hidráulicos y eléctricos. Como la mayoría de los sistemas físicos no son lineales, se estudiarán las aproximaciones de linealización que permiten utilizar los métodos de la transformada de Laplace. A continuación se proseguirá para obtener la relación entrada-salida de componentes y subsistemas en la forma de funciones de transferencia. Los bloques de la función de transferencia se pueden organizar en diagramas de bloques o grafos de flujo de señal para representar gráficamente las interconexiones. Los diagramas de bloques (y los grafos de flujo de señal) son herramientas muy convenientes y naturales para diseñar y analizar complicados sistemas de control. El capítulo concluye desarrollando modelos de función de transferencia de los diversos componentes del Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco.

2.1. INTRODUCCION

Para comprender y controlar sistemas complejos, hay que obtener **modelos matemáticos** cuantitativos de ellos. Por tanto, es necesario analizar las relaciones entre las variables del sistema y obtener un modelo matemático. Como los sistemas considerados son de naturaleza dinámica, las ecuaciones descriptivas son generalmente **ecuaciones diferenciales**. Además, si estas ecuaciones pueden **linealizarse**, entonces se puede utilizar la **transformada de Laplace** para simplificar el método de solución. En la práctica, por la complejidad de los sistemas y el desconocimiento de todos los factores relevantes, es necesario introducir **hipótesis** sobre la operación del sistema. Por tanto, a veces será útil considerar el sistema físico, delinear algunas hipótesis necesarias y linealizar el sistema. Luego, empleando las leyes físicas que describen el sistema lineal equivalente, se pueden obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales. Finalmente, utilizando herramientas matemáticas, como la transformada de Laplace, se obtiene una solución que describe la operación del sistema. En resumen, el tratamiento de los problemas de sistemas dinámicos puede establecerse como sigue:

1. Definir el sistema y sus componentes.
2. Formular el modelo matemático y enumerar las suposiciones necesarias.
3. Escribir las ecuaciones diferenciales que describan el modelo.
4. Resolver las ecuaciones para las variables de salida deseadas.
5. Examinar las soluciones y las hipótesis.
6. Si es necesario, volver a analizar o diseñar el sistema.

2.2. ECUACIONES DIFERENCIALES DE SISTEMAS FÍSICOS

Las ecuaciones diferenciales que describen el funcionamiento dinámico de un sistema físico se obtienen utilizando las leyes físicas del proceso [1-3]. Este método se aplica igualmente a sistemas mecánicos [1], eléctricos [3], de fluidos y termodinámicos [4]. Sea el sistema torsional resorte-masa de la Figura 2.1 con un par aplicado $T_a(t)$. Se supone que el resorte no tiene masa. Se desea medir el par $T_a(t)$ transmitido a la masa m.

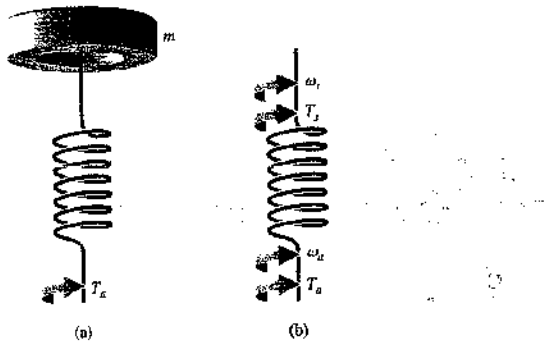


FIGURA 2.1
(a) Sistema torsional resorte-masa.
(b) Diagrama de cuerpo libre.

Tabla 2.1 Resumen de variables through y across para sistemas físicos

Sistema	Elemento de variable across	Variable through integrada	Elemento de variable across	Variable across integrada
Eléctrica	Corriente, i	Carga, q	Diferencia de voltaje v_{21}	Flujo magnético, λ_{21}
Mecánica traslacional	Fuerza, F	Momento traslacional, P	Diferencia de velocidad, v_{21}	Diferencia de desplazamiento, y_{21}
Mecánica rotacional	Par, T	Momento angular, h	Diferencia de velocidad angular, ω_{21}	Diferencia de desplazamiento angular, θ_{21}
Fluido	Caudal volumétrico de fluido, Q	Volumen, V	Diferencia de presión, P_{21}	Momento de presión, γ_{21}
Térmico	Caudal de calor, q	Energía calorífica, H	Diferencia de temperatura, $\mathcal{T}_{21}$	

Como el resorte no tiene masa, la suma de los pares que actúan sobre él deben ser cero o

$$T_a(t) - T_s(t) = 0,$$

lo que implica que $T_s(t) = T_a(t)$. Se ve de forma inmediata que el par externo $T_a(t)$ aplicado en el extremo del resorte se transmite a través de (fluye) a lo largo del resorte de torsión. Debido a esto se dice que el par es una **variable through**. De manera análoga, la diferencia en la velocidad angular asociada con el resorte de torsión es

$$\omega(t) = \omega_s(t) - \omega_a(t).$$

Así, la diferencia en la velocidad se mide entre los extremos del resorte y se conoce por ello como **variable across**. Estos mismos tipos de argumentos se pueden hacer para las variables físicas más comunes (tales como fuerza, corriente, volumen, caudal, etc.). Un tratamiento más completo sobre variables through y variables across se puede ver en [30, 33]. En la Tabla 2.1 se proporciona un resumen de las variables through y across de los sistemas dinámicos [5]. En el sitio web MCS se puede encontrar información relativa al Sistema Internacional de Unidades (SI), asociado con las diferentes variables que se ven en esta sección. Por ejemplo, variables que miden temperatura son grados Kelvin en unidades SI, y variables que miden longitud son metros. En el sitio web MCS también se dan conversiones importantes entre los sistemas de unidades SI y británico. En la Tabla 2.2 se proporciona un resumen de las ecuaciones descriptivas para elementos dinámicos lineales concentrados [5]. Estas ecuaciones son descripciones idealizadas y sólo se aproximan a las condiciones reales (por ejemplo, cuando se usa una aproximación lineal concentrada para un elemento distribuido).

Nomenclatura

- *Variable through:* F = fuerza, T = par, i = corriente, Q = caudal volumétrico de fluido, q = caudal de calor.
- *Variable across:* v = velocidad de traslación, ω = velocidad angular, v = voltaje, P = presión, $\mathcal{T}$ = temperatura.

Tabla 2.2 Resumen de ecuaciones diferenciales que describen a elementos ideales

Tipo de elemento	Elemento físico	Ecuación descriptiva	Energía E o potencia $\mathcal{P}$	Símbolo
Almacenamiento inductivo	Inductancia eléctrica	$v_{21} = L\frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Li^2$	v_2 — L, i — v_1
	Resorte traslacional	$v_{21} = \frac{1}{k}\frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$	v_2 — k — v_1, F
	Resorte rotacional	$\omega_{21} = \frac{1}{k}\frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k}$	ω_2 — k — ω_1, T
	Inercia del fluido	$P_{21} = I\frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2}IQ^2$	P_2 — I, Q — P_1
	Capacitancia eléctrica	$i = C\frac{dv_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Cv_{21}^2$	v_2 — i, C — v_1
	Masa traslacional	$F = M\frac{dv_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Mv_2^2$	F, v_2 — M — v_1 = constante
Almacenamiento capacitivo	Masa rotacional	$T = J\frac{d\omega_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2}J\omega_2^2$	T, ω_2 — J — ω_1 = constante
	Capacitancia del fluido	$Q = C_f\frac{dP_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2}C_fP_{21}^2$	Q, P_2 — C_f — P_1
	Capacitancia térmica	$q = C_t\frac{d\mathcal{T}_2}{dt}$	$E = C_t\mathcal{T}_2$	q, $\mathcal{T}_2$ — C_t — $\mathcal{T}_1$ = constante
Disipadores de energía	Resistencia eléctrica	$i = \frac{1}{R}v_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R}v_{21}^2$	v_2 — R, i — v_1
	Amortiguador traslacional	$F = bv_{21}$	$\mathcal{P} = bv_{21}^2$	F, v_2 — b — v_1
	Amortiguador rotacional	$T = b\omega_{21}$	$\mathcal{P} = b\omega_{21}^2$	T, ω_2 — b — ω_1
	Resistencia del fluido	$Q = \frac{1}{R_f}P_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_f}P_{21}^2$	P_2 — R_f, Q — P_1
	Resistencia térmica	$q = \frac{1}{R_t}\mathcal{T}_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_t}\mathcal{T}_{21}$	$\mathcal{T}_2$ — R_t, q — $\mathcal{T}_1$

- *Almacenamiento inductivo:* L = inductancia, $1/k$ = rigidez recíproca de traslación o rotación, I = inertancia del fluido.
- *Almacenamiento capacitivo:* C = capacitancia, M = masa, J = momento de inercia, C_f = capacitancia del fluido, C_t = capacitancia térmica.
- *Disipadores de energía:* R = resistencia, b = fricción viscosa, R_f = resistencia del fluido, R_t = resistencia térmica.

El símbolo $v(t)$ se usa tanto para voltajes en circuitos eléctricos como para velocidad en sistemas mecánicos de traslación y se distingue según el contexto de cada ecuación diferencial. Para sistemas mecánicos se utilizan las leyes de Newton, y para los sistemas

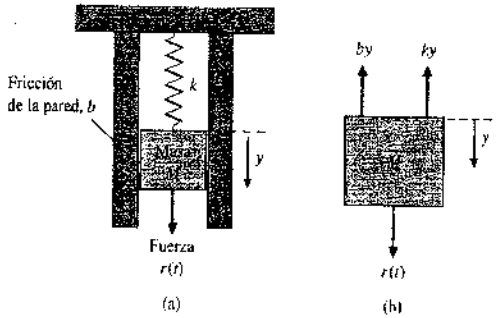


FIGURA 2.2
(a) Sistema amortiguador-resorte-masa. (b) Diagrama de cuerpo libre.

eléctricos, las leyes de Kirchhoff. Por ejemplo, el sencillo sistema mecánico amortiguador-resorte-masa que se muestra en la Figura 2.2(a) se describe por la segunda ley de movimiento de Newton. (Este sistema podría representar, por ejemplo, un amortiguador de automóvil.) En la Figura 2.2(b) se muestra el diagrama de cuerpo libre de la masa M. En este ejemplo resorte-masa-amortiguador, se modela la fricción de la pared como un **rozamiento viscoso**; esto es, la fuerza de fricción es linealmente proporcional a la velocidad de la masa. En realidad, la fuerza de fricción se puede comportar de una forma más complicada. Por ejemplo, la fricción de la pared se puede tratar como un **rozamiento culombiano**. La fricción de Coulomb, también conocida como fricción seca, es una función no lineal de la velocidad de la masa y posee una discontinuidad alrededor de la velocidad cero. Para una superficie deslizante bien lubricada, la fricción viscosa resulta apropiada y será utilizada aquí y en los ejemplos subsiguientes de resorte-masa-amortiguador. Si se suman las fuerzas que actúan sobre M y se utiliza la segunda ley de Newton se obtiene

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t), \tag{2.1}$$

donde k es la constante de un resorte ideal y b es la constante de fricción. La Ecuación (2.1) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden y de coeficientes constantes.

De forma alternativa, se puede describir el circuito eléctrico RLC de la Figura 2.3, utilizando la ley de la corriente de Kirchhoff. Entonces, se obtiene la siguiente ecuación íntegro-diferencial:

$$\frac{v(t)}{R} + C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int_0^t v(t)\,dt = r(t). \tag{2.2}$$

La solución de la ecuación diferencial que describe el proceso puede obtenerse por métodos clásicos, tales como el uso de factores integrantes y el método de coeficientes indeterminados [1]. Por ejemplo, cuando la masa se desplaza inicialmente una distancia $y(t) = y(0)$ y luego se suelta, la respuesta dinámica de un **sistema subamortiguado** se representa por una ecuación de la forma

$$y(t) = K_1e^{-\alpha_1 t}\operatorname{sen}(\beta_1 t + \theta_1). \tag{2.3}$$

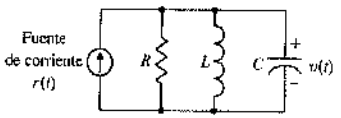


FIGURA 2.3
Circuito RLC.

Una solución similar se obtiene para el voltaje del circuito *RLC* cuando éste está sujeto a una corriente constante $r(t) = I$. Entonces el voltaje es

$$v(t) = K_2 e^{-\alpha_2 t} \cos(\beta_2 t + \theta_2). \tag{2.4}$$

En la Figura 2.3 se muestra una curva típica de voltaje de un circuito *RLC* subamortiguado.

Para revelar aún más la estrecha semejanza entre las ecuaciones diferenciales para los sistemas eléctricos y mecánicos, se reescribe la Ecuación (2.1) en función de la velocidad,

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt}.$$

Entonces se tiene

$$M\frac{dv(t)}{dt} + bv(t) + k\int_0^t v(t)\,dt = r(t). \tag{2.5}$$

Inmediatamente se observa la equivalencia entre las Ecuaciones (2.5) y (2.2), donde la velocidad $v(t)$ y el voltaje $v(t)$ son variables equivalentes, generalmente conocidas como **variables análogas**, y los sistemas son sistemas análogos. Por tanto, la solución para la velocidad es semejante a la de la Ecuación (2.4), y en la Figura 2.4 se muestra la respuesta para un sistema subamortiguado. El concepto de sistemas análogos es una técnica muy útil y poderosa para el modelado de sistemas. La analogía voltaje-velocidad, a menudo conocida como analogía fuerza-corriente, es una analogía natural, ya que establece la equivalencia entre variables through y variables across de los sistemas eléctricos y mecánicos. Sin embargo, a menudo se usa otra analogía que relaciona las variables velocidad y corriente que se conoce como analogía fuerza-voltaje [22, 24].

Existen sistemas análogos con soluciones semejantes para los sistemas eléctricos, mecánicos, térmicos y de fluidos. La existencia de sistemas y soluciones análogas permite al analista extender la solución de un sistema a todos los sistemas análogos describiéndolos con las mismas ecuaciones diferenciales. Por tanto, lo que se aprenda sobre análisis y diseño de sistemas eléctricos se hace inmediatamente extensivo al conocimiento de los sistemas de fluidos, térmicos y mecánicos.

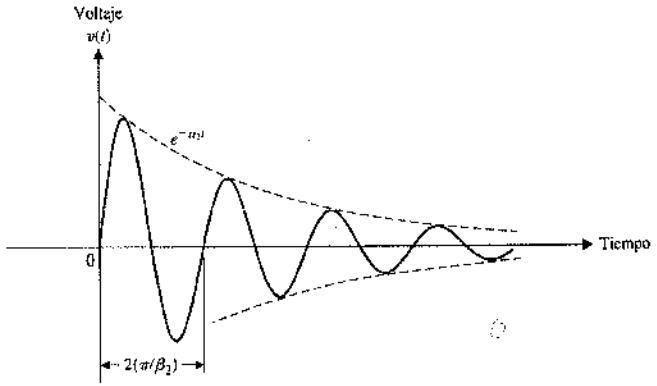


FIGURA 2.4
Respuesta de voltaje típica de un circuito *RCL* subamortiguado.

2.3. APROXIMACIONES LINEALES DE SISTEMAS FÍSICOS

Una gran mayoría de los sistemas físicos son lineales dentro de algún rango de las variables. Sin embargo, todos los sistemas acaban siendo no lineales si sus variables aumentan sin ningún límite. Por ejemplo, el sistema resorte-masa-amortiguador de la Figura 2.2 es lineal y está descrito por la Ecuación (2.1) siempre y cuando la masa esté sujeta a pequeñas deflexiones $y(t)$. Sin embargo, si $y(t)$ se aumentara continuamente, el resorte se estiraría más allá de sus límites y finalmente se rompería. Por tanto, para cada sistema debe considerarse el problema de la linealidad y el rango de aplicación.

Un sistema se define como lineal en términos de su excitación y respuesta. En el caso de los circuitos eléctricos, la excitación es la corriente de entrada $r(t)$ y la respuesta es el voltaje $v(t)$. En general, para un sistema lineal puede determinarse una **condición necesaria** en función de una excitación $x(t)$ y una respuesta $y(t)$. Cuando el sistema en reposo está sujeto a una excitación $x_1(t)$, proporciona una respuesta $y_1(t)$. Además, cuando el sistema está sometido a una excitación $x_2(t)$, proporciona una respuesta correspondiente $y_2(t)$. Para que un sistema sea lineal, es necesario que la excitación $x_1(t) + x_2(t)$ dé como resultado una respuesta $y_1(t) + y_2(t)$. Esto generalmente se conoce como el **principio de la superposición**.

Además, es necesario que en un **sistema lineal** se conserve la magnitud del factor de escala. Considérese otra vez un sistema con una entrada x que da como resultado una salida y. Entonces es necesario que la respuesta de un sistema lineal a una entrada x multiplicada por una constante β sea igual a la respuesta de la entrada multiplicada por la misma constante, de forma que la salida sea igual a βy. Esto se denomina la propiedad de **homogeneidad**.

Un sistema lineal satisface las propiedades de superposición y homogeneidad

Un sistema que se caracteriza por la relación $y = x^2$ no es lineal, puesto que no se satisface la propiedad de superposición. Un sistema representado por la relación $y = mx + b$ no es lineal, ya que no cumple la propiedad de homogeneidad. Sin embargo, este segundo dispositivo puede considerarse lineal respecto de un punto de operación x_0, y_0 para cambios pequeños de Δx y Δy. Cuando $x = x_0 + \Delta x$ e $y = y_0 + \Delta y$, se tiene

$$y = mx + b$$

o bien

$$y_0 + \Delta y = mx_0 + m\Delta x + b.$$

Por tanto, $\Delta y = m\Delta x$, lo cual satisface las condiciones necesarias.

La linealidad de muchos elementos mecánicos y eléctricos puede suponerse en un rango razonablemente grande de las variables [7]. Este no suele ser el caso para elementos térmicos y de fluidos, los cuales frecuentemente tienen un carácter no lineal. Sin embargo, afortunadamente suele ser posible linealizar elementos no lineales suponiendo condiciones de pequeña señal. Éste es el método normal utilizado para obtener un circuito lineal equivalente para circuitos electrónicos y transistores. Considérese un elemento general con una variable (through) de excitación $x(t)$ y una variable (across) de respuesta $y(t)$. En la Tabla 2.1 se dan algunos ejemplos de variables de sistemas dinámicos. La relación de las dos variables se escribe como

$$y(t) = g(x(t)), \tag{2.6}$$

donde $g(x(t))$ indica que $y(t)$ es una función de $x(t)$. El punto de operación normal se designa por x_0. Como la curva (función) es continua en el rango de interés, puede utilizarse un desarrollo en **serie de Taylor** en el punto de operación [7]. Entonces se tiene

$$y = g(x) = g(x_0) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)}{1!} + \left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots, \tag{2.7}$$

La pendiente en el punto de operación,

$$\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}$$

es una buena aproximación a la curva en un intervalo pequeño de $(x - x_0)$, la desviación del punto de operación. Entonces, como una aproximación razonable, la Ecuación (2.7) es

$$y = g(x_0) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0) = y_0 + m(x - x_0), \tag{2.8}$$

donde m es la pendiente en el punto de operación. Finalmente, la Ecuación (2.8) puede escribirse ahora como la ecuación lineal

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

o

$$\Delta y = m\Delta x. \tag{2.9}$$

Considérese el caso de una masa M, asentada sobre un resorte no lineal, tal como se muestra en la Figura 2.5(a). El punto de operación normal es la posición de equilibrio que ocurre cuando la fuerza del resorte equilibra a la fuerza gravitacional Mg, donde g es la constante gravitacional. Así pues, se obtiene $f_0 = Mg$ tal como se muestra. Para el resorte no lineal con $f = y^2$, la posición de equilibrio es $y_0 = (Mg)^{1/2}$. El modelo lineal para pequeña desviación es

$$\Delta f = m\Delta y,$$

donde

$$m = \left.\frac{df}{dy}\right|_{y_0},$$

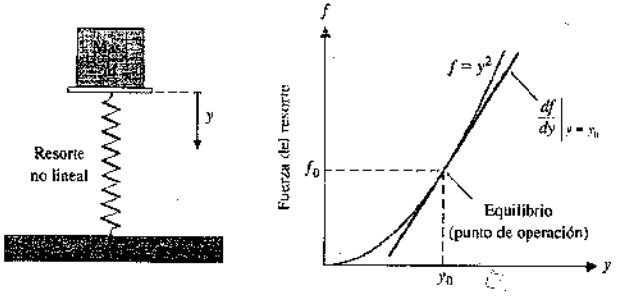


FIGURA 2.5
(a) Una masa asentada sobre un resorte no lineal. (b) Fuerza del resorte como función de y.

tal como se muestra en la Figura 2.5(b). Así pues, $m = 2y_0$. Una **aproximación lineal** es tan exacta como aplicable sea la hipótesis de pequeña señal para el problema específico.

Si la variable dependiente y depende de algunas variables de excitación, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces la relación funcional se escribe como

$$y = g(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.10}$$

El desarrollo en serie de Taylor en el punto de operación $x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}$ es útil para una aproximación lineal a la función no lineal. Cuando se desprecian los términos de orden más alto, la aproximación lineal se escribe como

$$y = g(x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}) + \left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{x=x_0} (x_1 - x_{1_0}) + \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{x=x_0} (x_2 - x_{2_0}) + \cdots + \left.\frac{\partial g}{\partial x_n}\right|_{x=x_0} (x_n - x_{n_0}), \tag{2.11}$$

donde x_0 es el punto de operación. El Ejemplo 2.1 ilustrará claramente la utilidad de este método.

EJEMPLO 2.1. Modelo oscilador de péndulo

Considérese el oscilador de péndulo que se muestra en la Figura 2.6(a). El par sobre la masa es

$$T = MgL \operatorname{sen}\theta, \tag{2.12}$$

donde g es la constante de gravedad. La condición de equilibrio para la masa es $\theta_0 = 0°$. La relación no lineal entre T y θ se muestra gráficamente en la Figura 2.6(b). La primera derivada calculada en el equilibrio proporciona la aproximación lineal, que es

$$T - T_0 \cong MgL \left.\frac{\partial \operatorname{sen}\theta}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0),$$

donde $T_0 = 0$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} T &= MgL(\cos 0°)(\theta - 0°) \\ &= MgL\theta. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Esta aproximación es razonablemente precisa para $(-\pi/4) \leqslant \theta \leqslant (\pi/4)$. Por ejemplo, la respuesta del modelo lineal para la oscilación a través de $\pm 30°$ está dentro del 2% de la respuesta del péndulo no lineal real. ■

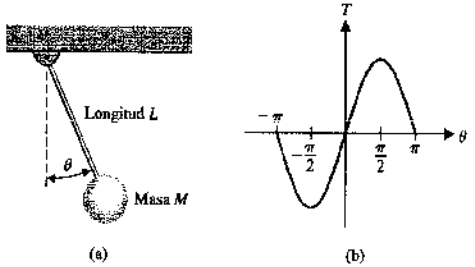


FIGURA 2.6
Oscilador de péndulo.

2.4. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La capacidad de obtener aproximaciones lineales de sistemas físicos permite al analista considerar el uso de la **transformación de Laplace**. El método de la transformada de Laplace sustituye por ecuaciones algebraicas de resolución relativamente fácil las ecuaciones diferenciales, más difíciles [1, 3]. La solución para la respuesta temporal se obtiene mediante las siguientes operaciones:

1. Obtener las ecuaciones diferenciales.
2. Obtener la transformación de Laplace de las ecuaciones diferenciales.
3. Resolver la transformada algebraica resultante para la variable de interés.

La transformada de Laplace existe para ecuaciones diferenciales lineales para las que la transformación integral converge. Por tanto, a fin de que $f(t)$ sea transformable, es suficiente que

$$\int_{0-}^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma_1 t}\,dt < \infty,$$

para algún número real positivo σ_1 [1]. Si la magnitud de $f(t)$ es $|f(t)| < Me^{\alpha t}$ para todo t positivo, la integral convergerá para $\sigma_1 > \alpha$. Por tanto, la región de convergencia viene dada por $\infty > \sigma_1 > \alpha$ y σ_1 se conoce como la abscisa de convergencia absoluta. Las señales que son físicamente realizables siempre tienen una transformada de Laplace. La **transformación de Laplace** para una función del tiempo, $f(t)$, es

$$\boxed{F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \mathcal{L}[f(t)].} \tag{2.14}$$

La **transformada inversa de Laplace** se escribe como

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{+st}\,ds.} \tag{2.15}$$

Las integrales de transformación se han usado para deducir tablas de transformadas de Laplace que se suelen emplear para la gran mayoría de los problemas. En la Tabla 2.3 se dan algunos pares importantes de transformadas de Laplace, y una lista más completa de pares de transformadas de Laplace se puede ver en el sitio web MCS.

Alternativamente, la variable s de Laplace se puede considerar como el operador diferencial, de modo que

$$s \equiv \frac{d}{dt}. \tag{2.16}$$

Entonces se tiene también el operador integral

$$\frac{1}{s} \equiv \int_{0^-}^{t} dt. \tag{2.17}$$

Tabla 2.3 Pares importantes de transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
Función escalón, $u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$f^{(k)}(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k}$	$s^k F(s) - s^{k-1}f(0^-) - s^{k-2}f'(0^-) - \cdots - f^{(k-1)}(0^-)$
$\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$
Función impulso $\delta(t)$	1
$e^{-at}\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\frac{1}{\omega}[(\alpha-a)^2+\omega^2]^{1/2}e^{-at}\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$, $\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha-a}$	$\frac{s+\alpha}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t$, $\zeta < 1$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
$\frac{1}{a^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}}e^{-at}\operatorname{sen}(\omega t-\phi)$, $\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{-a}$	$\frac{1}{s[(s+a)^2+\omega^2]}$
$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\phi)$, $\phi = \cos^{-1}\zeta$, $\zeta < 1$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$
$\frac{\alpha}{a^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega}\left[\frac{(\alpha-a)^2+\omega^2}{a^2+\omega^2}\right]^{1/2}e^{-at}\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$. $\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha-a} - \tan^{-1}\frac{\omega}{-a}$	$\frac{(s+\alpha)}{s[(s+a)^2+\omega^2]}$

La transformación inversa de Laplace generalmente se obtiene usando el desarrollo en fracciones simples de Heaviside. Este método es particularmente útil para el análisis y diseño de sistemas, ya que se puede observar de forma clara el efecto de cada raíz característica o valor propio.

Con el objeto de ilustrar la utilidad de la transformación de Laplace y los pasos necesitados en el análisis de sistemas, considérese de nuevo el sistema resorte-masa-amortiguador descrito por la Ecuación (2.1), que es

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = r(t). \tag{2.18}$$

Se desea obtener la respuesta, y, como una función del tiempo. La transformada de Laplace de la Ecuación (2.18) es

$$M\left(s^2Y(s) - sy(0^-) - \frac{dy(0^-)}{dt}\right) + b(sY(s) - y(0^-)) + kY(s) = R(s). \tag{2.19}$$

Cuando

$$r(t) = 0 \quad \text{y} \quad y(0^-) = y_0 \quad \text{y} \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^-} = 0,$$

se tiene

$$Ms^2Y(s) - Msy_0 + bsY(s) - by_0 + kY(s) = 0, \tag{2.20}$$

Resolviendo para $Y(s)$, se obtiene

$$Y(s) = \frac{(Ms + b)y_0}{Ms^2 + bs + k} = \frac{p(s)}{q(s)}. \tag{2.21}$$

El polinomio $q(s)$ del denominador, cuando se iguala a cero, se denomina **ecuación característica**, ya que las raíces de esta ecuación determinan el carácter de la respuesta temporal. Las raíces de esta ecuación característica también se denominan **polos** del sistema. Las raíces del polinomio $p(s)$ del numerador se conocen como los **ceros** del sistema; por ejemplo, $s = -b/M$ es un cero de la Ecuación (2.21). Los polos y ceros son frecuencias críticas. En los polos, la función $Y(s)$ se hace infinita, mientras que en los ceros la función se hace cero. Los puntos en el plano s de frecuencia compleja de los polos y ceros muestran gráficamente el carácter de la respuesta transitoria natural del sistema.

Para un caso específico, considérese el sistema cuando $k/M = 2$ y $b/M = 3$. Entonces la Ecuación (2.21) será

$$Y(s) = \frac{(s + 3)y_0}{(s + 1)(s + 2)}. \tag{2.22}$$

En la Figura 2.7 se muestran los polos y ceros de $Y(s)$ en el plano-s.

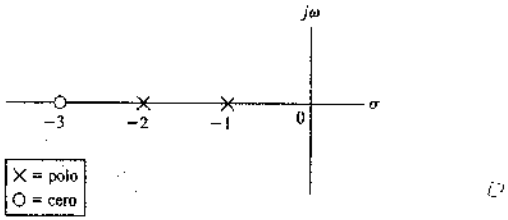


FIGURA 2.7
Gráfica de polos y ceros en el plano s.

Transformando la Ecuación (2.22) mediante un desarrollo de fracciones simples, se obtiene

$$Y(s) = \frac{k_1}{s + 1} + \frac{k_2}{s + 2}, \tag{2.23}$$

donde k_1 y k_2 son los coeficientes del desarrollo. Los coeficientes, k_i, se conocen como **residuos** y se calculan multiplicando por el factor del denominador de la Ecuación (2.22) que corresponde a k_i, y haciendo s igual a la raíz. Calculando k_i cuando $y_0 = 1$, se tiene

$$k_1 = \left.\frac{(s - s_1)p(s)}{q(s)}\right|_{s=s_1} = \left.\frac{(s + 1)(s + 3)}{(s + 1)(s + 2)}\right|_{s_1=-1} = 2 \tag{2.24}$$

y $k_2 = -1$. Alternativamente, los residuos de $Y(s)$ en los polos respectivos pueden calcularse gráficamente en la representación del plano s, ya que la Ecuación (2.24) puede escribirse como

$$k_1 = \left.\frac{s + 3}{s + 2}\right|_{s=s_1=-1} = \left.\frac{s_1 + 3}{s_1 + 2}\right|_{s_1=-1} = 2. \tag{2.25}$$

En la Figura 2.8 se muestra la representación gráfica de la Ecuación (2.25). El método gráfico para calcular los residuos es particularmente valioso cuando el orden de la ecuación característica es alto y algunos polos son pares complejos conjugados.

La transformada inversa de Laplace de la Ecuación (2.22) es entonces

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s + 1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s + 2}\right\}. \tag{2.26}$$

Usando la Tabla 2.3, se encuentra que

$$y(t) = 2e^{-t} - 1e^{-2t}. \tag{2.27}$$

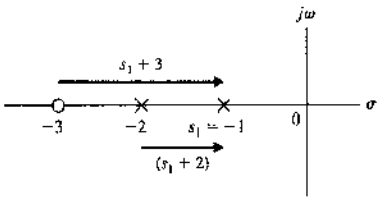


FIGURA 2.8
Cálculo gráfico de los residuos.

Finalmente, suele ser deseable determinar el **estado estacionario** o **valor final** de la respuesta de $y(t)$. Por ejemplo, si se desea calcular la posición en el estado de reposo o estado estacionario del sistema resorte-masa-amortiguador. El **teorema del valor final** expresa que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s), \tag{2.28}$$

donde se permite un solo polo de $Y(s)$ en el origen, pero se excluyen los polos en el eje imaginario, en la mitad derecha del plano, y los polos repetidos en el origen. Por tanto, para el caso específico del resorte-masa-amortiguador, se encuentra que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = 0. \tag{2.29}$$

Por consiguiente, la posición final para la masa es la posición de equilibrio normal $y = 0$.

Para ilustrar claramente los puntos principales del método de la transformada de Laplace, se reconsidera el sistema resorte-masa-amortiguador para el caso subamortiguado. La ecuación para $Y(s)$ puede escribirse como

$$Y(s) = \frac{(s + b/M)(y_0)}{(s^2 + (b/M)s + k/M)} = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)(y_0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{2.30}$$

donde ζ es la **razón de amortiguamiento** adimensional y ω_n es la **frecuencia natural** del sistema. Las raíces de la ecuación característica son

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \tag{2.31}$$

donde en este caso $\omega_n = \sqrt{k/M}$ y $\zeta = b/(2\sqrt{kM})$. Cuando $\zeta > 1$, las raíces son reales; cuando $\zeta < 1$, las raíces son complejas conjugadas. Cuando $\zeta = 1$, las raíces son repetidas y reales y la condición se llama **amortiguamiento crítico**.

Cuando $\zeta < 1$, la respuesta es subamortiguada y

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}. \tag{2.32}$$

En la Figura 2.9 se muestra la gráfica en el plano s de los polos y ceros de $Y(s)$, donde $\theta = \cos^{-1}\zeta$. Cuando ζ varía con ω_n constante, las raíces complejas conjugadas siguen un lugar geométrico circular, como se muestra en la Figura 2.10. La respuesta transitoria se hace más oscilatoria a medida que las raíces tienden al eje imaginario cuando ζ tiende a cero.

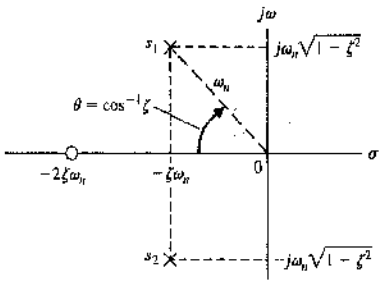


FIGURA 2.9
Gráfica en el plano s de los polos y ceros de $Y(s)$.

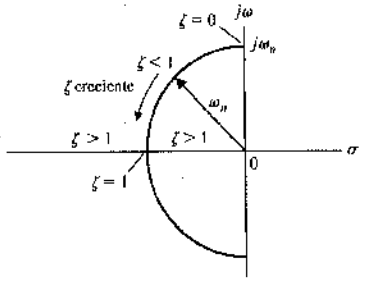


FIGURA 2.10
Lugar de las raíces cuando ζ varía con ω_n constante.

La transformada inversa de Laplace puede calcularse usando el cálculo gráfico del residuo. El desarrollo de la Ecuación (2.30) en fracciones simples es

$$Y(s) = \frac{k_1}{(s - s_1)} + \frac{k_2}{(s - s_2)}. \tag{2.33}$$

Como s_2 es el complejo conjugado de s_1, el residuo k_2 es el complejo conjugado de k_1, por lo cual se obtiene

$$Y(s) = \frac{k_1}{(s - s_1)} + \frac{k_1^*}{(s - s_1^*)},$$

donde el asterisco indica la relación conjugada. El residuo k_1 se calcula a partir de la Figura 2.11 como

$$k_1 = \frac{(y_0)(s_1 + 2\zeta\omega_n)}{(s_1 - s_1^*)} = \frac{(y_0)M_1 e^{j\theta}}{M_2 e^{j\pi/2}}, \tag{2.34}$$

donde M_1 es la magnitud de $(s_1 + 2\zeta\omega_n)$ y M_2 es la magnitud de $(s_1 - s_1^*)$. En este caso, se obtiene

$$k_1 = \frac{(y_0)(\omega_n e^{j\theta})}{(2\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}\, e^{j\pi/2})} = \frac{(y_0)}{2\sqrt{1 - \zeta^2}\, e^{j(\pi/2 - \theta)}}, \tag{2.35}$$

donde $\theta = \cos^{-1}\zeta$. Por tanto,

$$k_2 = \frac{(y_0)}{2\sqrt{1 - \zeta^2}}\, e^{j(\pi/2 - \theta)}. \tag{2.36}$$

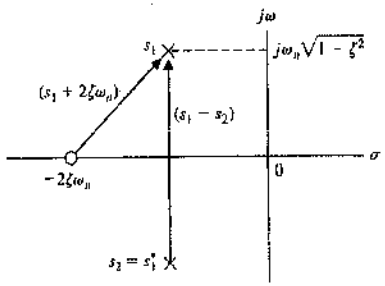


FIGURA 2.11
Cálculo del residuo k_1.

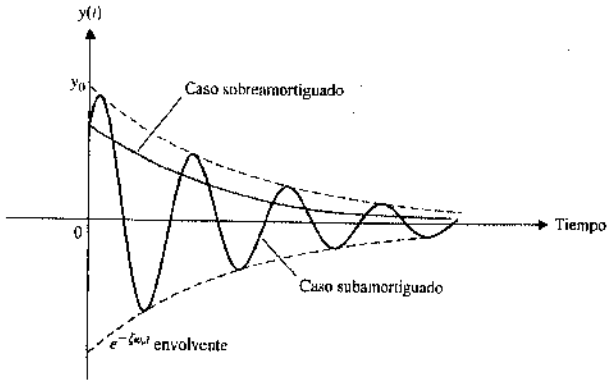


FIGURA 2.12
Respuesta del sistema amortiguador-resorte-masa.

Finalmente, utilizando $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$ se encuentra que

$$y(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

$$= \frac{y_0}{2\sqrt{1 - \zeta^2}} \left(e^{j(\theta - \pi/2)} e^{-\zeta\omega_n t} e^{j\omega_n \beta t} + e^{j(\pi/2 - \theta)} e^{-\zeta\omega_n t} e^{-j\omega_n \beta t}\right)$$

$$= \frac{y_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \theta). \tag{2.37}$$

La solución, Ecuación (2.37), se puede obtener también utilizando la entrada 11 de la Tabla 2.3. En la Figura 2.12 se muestran las respuestas transitorias de los casos sobreamortiguado ($\zeta > 1$) y subamortiguado ($\zeta < 1$). La respuesta transitoria que ocurre cuando $\zeta < 1$ muestra una oscilación cuya amplitud disminuye con el tiempo y se llama **oscilación amortiguada**.

La relación directa y clara entre la localización en el plano s de los polos y la forma de la respuesta transitoria se interpreta fácilmente a partir de las gráficas de los polos y ceros en el plano s. Además, la magnitud de la respuesta de cada raíz, representada por el residuo, se visualiza claramente examinando los residuos gráficos en el plano s. La transformación de Laplace y el método del plano s son técnicas muy útiles para el análisis y diseño de sistemas cuando se coloca el énfasis en el comportamiento transitorio y en estado estacionario. De hecho, como el estudio de los sistemas de control está relacionado principalmente con el comportamiento transitorio y en estado estacionario de sistemas dinámicos, tenemos motivos muy válidos para apreciar el valor de las técnicas de la transformada de Laplace.

2.5. LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE SISTEMAS LINEALES

La **función de transferencia** de un sistema se define como la relación entre la transformada de Laplace de la variable de salida y la transformada de Laplace de la variable de entrada, suponiendo que todas las condiciones iniciales se hacen iguales a cero. La función de transferencia de un sistema (o elemento) representa la relación que describe la dinámica del sistema considerado.

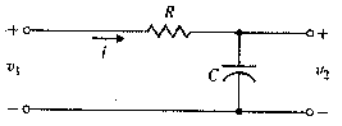


FIGURA 2.13
Circuito *RC*.

Una función de transferencia puede definirse solamente para un sistema lineal y estacionario (de parámetro constante). Un sistema no estacionario, denominado a veces sistema variable con el tiempo, tiene uno o más parámetros que varían en dicha forma y no puede utilizarse la transformación de Laplace. Además, una función de transferencia es una descripción entrada-salida del comportamiento de un sistema. Por tanto, la descripción de la función de transferencia no incluye ninguna información concerniente a la estructura interna del sistema y a su comportamiento.

La función de transferencia del sistema resorte-masa-amortiguador se obtiene de la Ecuación original (2.19), y se escribe con condiciones iniciales iguales a cero tal como sigue:

$$Ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = R(s). \tag{2.38}$$

Entonces la función de transferencia es

$$\frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} = G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}. \tag{2.39}$$

La función de transferencia del circuito *RC* mostrado en la Figura 2.13 se obtiene escribiendo la ecuación de Kirchhoff del voltaje, lo cual da

$$V_1(s) = \left(R + \frac{1}{Cs}\right) I(s). \tag{2.40}$$

El voltaje de salida es

$$V_2(s) = I(s)\left(\frac{1}{Cs}\right). \tag{2.41}$$

Por tanto, resolviendo la Ecuación (2.40) para $I(s)$ y sustituyendo en la Ecuación (2.41), se tiene

$$V_2(s) = \frac{(1/Cs)V_1(s)}{R + 1/Cs}.$$

Entonces se obtiene la función de transferencia como la relación $V_2(s)/V_1(s)$, la cual es

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{(1/\tau)}{s + 1/\tau}, \tag{2.42}$$

donde $\tau = RC$ es la **constante de tiempo** del circuito. El polo simple de $G(s)$ es $s = -1/\tau$. La Ecuación (2.42) puede obtenerse inmediatamente si se observa que el circuito es un divisor de voltaje, donde

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}, \tag{2.43}$$

y $Z_1(s) = R$, $Z_2 = 1/Cs$.

Un circuito eléctrico con lazos múltiples o un sistema mecánico análogo de masas múltiples da como resultado un sistema de ecuaciones simultáneas en la variable de Laplace. Generalmente es más conveniente resolver las ecuaciones simultáneas usando matrices y determinantes [1, 3, 16]. En el sitio web MCS se proporciona una introducción a las matrices y determinantes.

Se va a considerar la conducta a largo plazo de un sistema y a determinar la respuesta a ciertas entradas que permanecen después de que decae el transitorio. Sea el sistema dinámico representado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^n y}{dt^n} + q_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + q_0 y = p_{n-1}\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}} + p_{n-2}\frac{d^{n-2}r}{dt^{n-2}} + \cdots + p_0 r, \quad (2.44)$$

donde $y(t)$ es la respuesta y $r(t)$ es la entrada o función forzante. Si las condiciones iniciales son todas ceros, entonces la función de transferencia es

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{p(s)}{q(s)}R(s) = \frac{(p_{n-1}s^{n-1} + p_{n-2}s^{n-2} + \cdots + p_0)}{(s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \cdots + q_0)}R(s). \quad (2.45)$$

La respuesta de salida consiste en una respuesta natural (determinada por las condiciones iniciales) más una respuesta forzada determinada por la entrada. Ahora se tiene

$$Y(s) = \frac{m(s)}{q(s)} + \frac{p(s)}{q(s)}R(s),$$

donde $q(s) = 0$ es la ecuación característica. Si la entrada tiene la forma natural

$$R(s) = \frac{n(s)}{d(s)},$$

entonces

$$Y(s) = \frac{m(s)}{q(s)} + \frac{p(s)}{q(s)}\frac{n(s)}{d(s)} = Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s), \quad (2.46)$$

donde $Y_1(s)$ es el desarrollo en fracciones simples de la respuesta natural, $Y_2(s)$ es el desarrollo en fracciones simples de los términos que contienen factores de $q(s)$ e $Y_3(s)$ es el desarrollo en fracciones simples de los términos que contienen factores de $d(s)$.

Tomando la transformada inversa de Laplace da

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t).$$

La respuesta transitoria consiste en $y_1(t) + y_2(t)$ y la respuesta en estado estacionario es $y_3(t)$.

EJEMPLO 2.2. Solución de una ecuación diferencial

Sea un sistema representado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 2r(t),$$

donde las condiciones iniciales son $y(0) = 1$, $\frac{dy}{dt}(0) = 0$ y $r(t) = 1$, $t \geq 0$.

La transformada de Laplace da

$$[s^2Y(s) - sy(0)] + 4[sY(s) - y(0)] + 3Y(s) = 2R(s).$$

Como $R(s) = 1/s$ e $y(0) = 1$, se obtiene

$$Y(s) = \frac{(s+4)}{(s^2+4s+3)} + \frac{2}{s(s^2+4s+3)},$$

donde $q(s) = s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3) = 0$ es la ecuación característica y $d(s) = s$. Entonces el desarrollo en fracciones simples da

$$Y(s) = \left[\frac{3/2}{(s+1)} + \frac{-1/2}{(s+3)}\right] + \left[\frac{-1}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s+3)}\right] + \frac{2/3}{s} = Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s).$$

Por tanto, la respuesta es

$$y(t) = \left[\frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right] + \left[-1e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t}\right] + \frac{2}{3},$$

y la respuesta en estado estacionario es

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{2}{3}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2.3. Función de transferencia de un circuito con amplificador operacional

El amplificador operacional pertenece a una clase importante de circuitos integrados analógicos que se suelen utilizar como bloques de construcción en la implementación de sistemas de control y en muchas otras aplicaciones importantes. Los amplificadores operacionales son elementos activos (esto es, tienen fuentes de potencia externas) con una ganancia elevada cuando operan en su región lineal. En la Figura 2.14 se muestra un modelo de un amplificador operacional ideal.

Las condiciones de operación para el amplificador operacional ideal son (i) $i_1 = 0$ e $i_2 = 0$, lo que implica que la impedancia de entrada es infinita y (ii) $v_2 - v_1 = 0$ (o $v_1 = v_2$). La relación de entrada-salida para un amplificador operacional ideal es

$$v_0 = K(v_2 - v_1) = -K(v_1 - v_2),$$

donde la ganancia K tiende a infinito. En el análisis se supondrá que los amplificadores operacionales están operando con alta ganancia y en condiciones idealizadas.

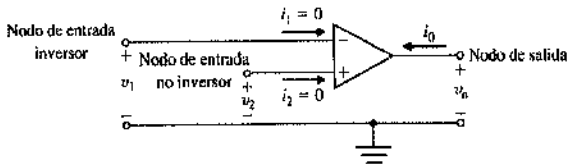


FIGURA 2.14
Amplificador operacional ideal.

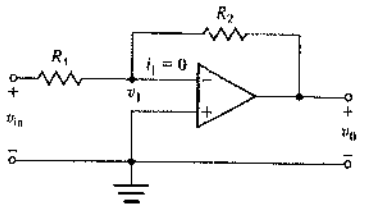


FIGURA 2.15
Amplificador inversor operando con condiciones ideales.

Considérese el amplificador inversor que se muestra en la Figura 2.15. Bajo condiciones ideales, se tiene que $i_1 = 0$, de forma que escribiendo la ecuación del nodo en v_1 da

$$\frac{v_1 - v_{in}}{R_1} + \frac{v_1 - v_0}{R_2} = 0.$$

Como $v_2 = v_1$ (en condiciones ideales) y $v_2 = 0$ (*véase* la Figura 2.15 y compárese con la Figura 2.14), se sigue que $v_1 = 0$. Por tanto,

$$-\frac{v_{in}}{R_1} - \frac{v_0}{R_2} = 0,$$

y reagrupando términos se obtiene

$$\frac{v_0}{v_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Se ve que cuando $R_2 = R_1$, el circuito del amplificador operacional ideal invierte el signo de la entrada, esto es $v_0 = -v_{in}$ cuando $R_2 = R_1$. ■

EJEMPLO 2.4. Función de transferencia de un sistema

Considérese el sistema mecánico de la Figura 2.16(a) y su circuito eléctrico análogo de la Figura 2.16(b). El circuito eléctrico análogo es una analogía del tipo fuerza-corriente, tal como se indica en la Tabla 2.1. Las velocidades $v_1(t)$ y $v_2(t)$ del sistema mecánico son directamente análogas a los voltajes de los nodos $v_1(t)$ y $v_2(t)$ del circuito eléctrico.

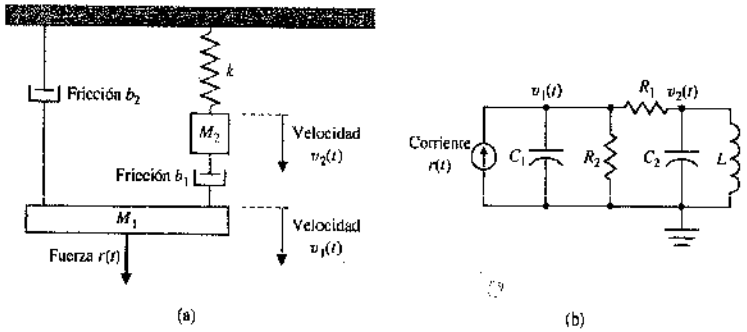


FIGURA 2.16
(a) Sistema mecánico de dos masas. (b) Circuito eléctrico análogo de dos nodos $C_1 = M_1$, $C_2 = M_2$, $L = 1/k$, $R_1 = 1/b_1$, $R_2 = 1/b_2$.

Suponiendo que las condiciones iniciales son iguales a cero, las ecuaciones simultáneas son

$$M_1 s V_1(s) + (b_1 + b_2)V_1(s) - b_1 V_2(s) = R(s), \tag{2.47}$$

y

$$M_2 s V_2(s) + b_1(V_2(s) - V_1(s)) + k\frac{V_2(s)}{s} = 0. \tag{2.48}$$

Las ecuaciones se obtienen utilizando las ecuaciones de fuerza para el sistema mecánico de la Figura 2.16(a). Reordenando las Ecuaciones (2.47) y (2.48), se obtiene

$$(M_1 s + (b_1 + b_2))V_1(s) + (-b_1)V_2(s) = R(s),$$

$$(-b_1)V_1(s) + \left(M_2 s + b_1 + \frac{k}{s}\right)V_2(s) = 0.$$

o, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} (M_1 s + b_1 + b_2) & (-b_1) \\ (-b_1) & \left(M_2 s + b_1 + \dfrac{k}{s}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.49}$$

Suponiendo que la velocidad de M_1 es la variable de salida, resolvemos para $V_1(s)$ por inversión matricial o la regla de Cramer para obtener [1, 3]

$$V_1(s) = \frac{(M_2 s + b_1 + (k/s))R(s)}{(M_1 s + b_1 + b_2)(M_2 s + b_1 + (k/s)) - b_1^2}. \tag{2.50}$$

Entonces la función de transferencia del sistema mecánico (o eléctrico) es

$$G(s) = \frac{V_1(s)}{R(s)} = \frac{(M_2 s + b_1 + (k/s))}{(M_1 s + b_1 + b_2)(M_2 s + b_1 + (k/s)) - b_1^2}$$

$$= \frac{(M_2 s^2 + b_1 s + k)}{(M_1 s + b_1 + b_2)(M_2 s^2 + b_1 s + k) - b_1^2 s}. \tag{2.51}$$

Si se desea la función de transferencia en términos de la posición $x_1(t)$, entonces se tiene

$$\frac{X_1(s)}{R(s)} = \frac{V_1(s)}{sR(s)} = \frac{G(s)}{s}, \tag{2.52}$$ ■

Como ejemplo, se obtiene la función de transferencia de un importante componente del control eléctrico, el **motor de cc** [8]. Un motor de cc se utiliza para mover cargas y se llama un **actuador**.

Un actuador es un dispositivo que proporciona la potencia motriz al proceso

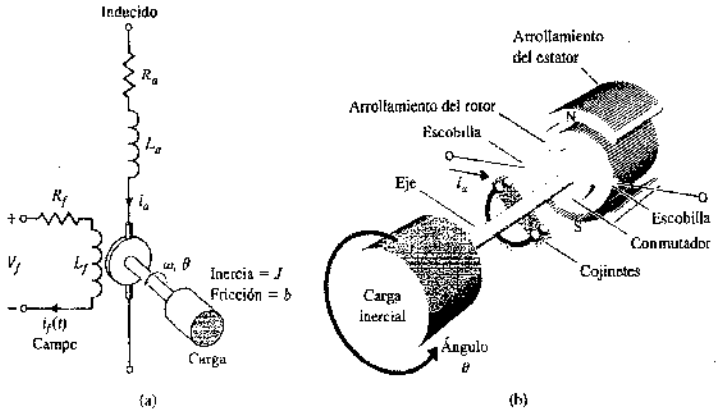


FIGURA 2.17
Motor de cc, (a) diagrama de cableado y (b) esquema

EJEMPLO 2.5. Función de transferencia del motor de cc

El motor de cc es un dispositivo actuador de potencia que proporciona energía a una carga, tal como se muestra en la Figura 2.17(a); en la Figura 2.17(b) se muestra un diagrama de un motor de cc. En la Figura 2.18 se presenta una vista en corte de un motor de cc. El motor cc convierte energía eléctrica en forma de corriente continua en energía mecánica rotacional. Una gran parte del par generado en el rotor (inducido) del motor está disponible para mover una carga externa. Debido a características tales como par elevado, controlabilidad de la velocidad en un amplio rango, portabilidad, características par-velocidad bien comportadas y adaptabilidad a diversos tipos de métodos de control, los motores de cc aún se utilizan en general en numerosas aplicaciones de control, incluyendo a manipuladores robóticos, mecanismos de transporte de cintas, unidades de disco, máquinas de herramientas y actuadotes de servo-válvulas.

La función de transferencia del motor de cc se establecerá para una aproximación lineal de un motor real y se despreciarán los efectos de segundo orden, como la histéresis y la caída de tensión en las escobillas. El voltaje de entrada se puede aplicar a los terminales de la excitación o a los del inducido. El flujo en el espacio de aire del motor es proporcional a la corriente de excitación, siempre que el campo no esté saturado, de modo que

$$\phi = K_f i_f. \tag{2.53}$$

Se supone que el par desarrollado por el motor está relacionado linealmente con ϕ y con la corriente del inducido como sigue:

$$T_m = K_1 \phi i_a(t) = K_1 K_f i_f(t) i_a(t). \tag{2.54}$$

Según la Ecuación (2.54), es evidente que para tener un elemento lineal debe mantenerse una corriente constante, mientras que la otra es la corriente de entrada. Primero se considera el **motor controlado por la corriente de la excitación**, lo que proporciona una sustancial amplificación de potencia. Entonces se tiene, en la notación de la transformada de Laplace,

$$T_m(s) = (K_1 K_f I_a) I_f(s) = K_m I_f(s), \tag{2.55}$$

donde $i_a = I_a$ es una corriente de inducido constante y K_m se define como la constante del motor. La corriente de excitación está relacionada con el voltaje de excitación por

$$V_f(s) = (R_f + L_f s) I_f(s). \tag{2.56}$$

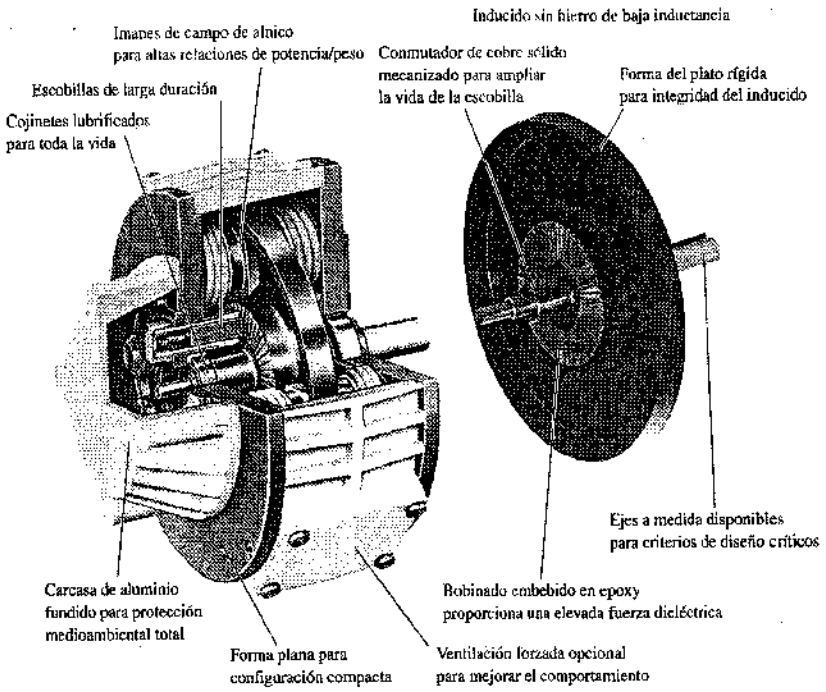

Inducido sin hierro de baja inductancia
Imanes de campo de alnico para altas relaciones de potencia/peso
Conmutador de cobre sólido mecanizado para ampliar la vida de la escobilla
Forma del plato rígida para integridad del inducido
Escobillas de larga duración
Cojinetes lubrificados para toda la vida
Ejes a medida disponibles para criterios de diseño críticos
Carcasa de aluminio fundido para protección medioambiental total
Robinado embebido en epoxy proporciona una elevada fuerza dieléctrica
Forma plana para configuración compacta
Ventilación forzada opcional para mejorar el comportamiento

FIGURA 2.18
Un motor de cc tipo disco con inducido plano enrollado y un rotor de imán permanente. Estos motores son capaces de proporcionar un par elevado con una inercia pequeña del rotor. Tienen una constante de tiempo mecánica típica del orden de 15 ms. (Cortesía de Mavilor Motors.)

El par motor $T_m(s)$ es igual al par proporcionado a la carga. Esta relación puede expresarse como

$$T_m(s) = T_L(s) + T_d(s), \tag{2.57}$$

donde $T_L(s)$ es el par de carga y $T_d(s)$ es el par de perturbación, que no suele tenerse en cuenta. Sin embargo, el par de perturbación, a menudo debe considerarse en sistemas sujetos a fuerzas externas, como las ráfagas del viento en las antenas. El par de carga para una inercia de rotación como la que se muestra en la Figura 2.17 se escribe como

$$T_L(s) = Js^2\theta(s) + bs\theta(s). \tag{2.58}$$

Reordenando las Ecuaciones (2.55), (2.56) y (2.57), se tiene

$$T_L(s) = T_m(s) - T_d(s), \tag{2.59}$$

$$T_m(s) = K_m I_f(s), \tag{2.60}$$

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{R_f + L_f s}. \tag{2.61}$$

Por tanto, la función de transferencia de la combinación motor-carga con $T_d(s) = 0$ es

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s(Js + b)(L_f s + R_f)} = \frac{K_m/JL_f}{s(s + b/J)(s + R_f/L_f)}. \tag{2.62}$$

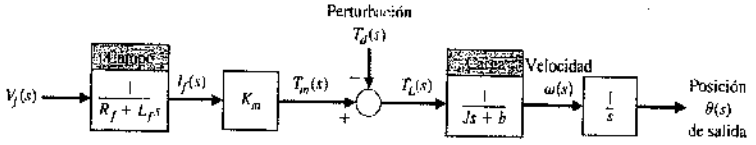


FIGURA 2.19
Diagrama de bloques de un motor de cc controlado por campo.

En la Figura 2.19 se muestra el modelo del diagrama de bloques para el motor de cc controlado por campo. En forma alterna, la función de transferencia puede escribirse en función de las constantes de tiempo del motor como

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = G(s) = \frac{K_m/bR_f}{s(\tau_f s + 1)(\tau_L s + 1)}, \tag{2.63}$$

donde $\tau_f = L_f/R_f$ y $\tau_L = J/b$. Habitualmente, se observa que $\tau_L > \tau_f$ y con frecuencia la constante de tiempo del campo puede despreciarse.

El **motor de cc controlado por inducido** utiliza la corriente del inducido i_a como la variable de control. El campo en el estator se puede establecer mediante una bobina de excitación y corriente o un imán permanente. Cuando se establece una corriente de campo constante en una bobina de excitación, el par motor es

$$T_m(s) = (K_1 K_f I_f) I_a(s) = K_m I_a(s). \tag{2.64}$$

Cuando se utiliza un imán permanente, se tiene

$$T_m(s) = K_m I_a(s),$$

donde K_m es una función de la permeabilidad del material magnético.

La corriente del inducido se relaciona con el voltaje de entrada aplicado al inducido por

$$V_a(s) = (R_a + L_a s) I_a(s) + V_b(s), \tag{2.65}$$

donde $V_b(s)$ es el voltaje de la fuerza contraelectromotriz proporcional a la velocidad del motor. Por tanto, se tiene

$$V_b(s) = K_b \omega(s), \tag{2.66}$$

y la corriente del inducido es

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_b \omega(s)}{(R_a + L_a s)}. \tag{2.67}$$

Las Ecuaciones (2.58) y (2.59) representan el par de carga, de modo que

$$T_L(s) = Js^2\theta(s) + bs\theta(s) = T_m(s) - T_d(s). \tag{2.68}$$

En la Figura 2.20 se muestran esquemáticamente las relaciones del motor de cc controlado por inducido. Usando las Ecuaciones (2.64), (2.67) y (2.68), o el diagrama de bloques, y haciendo $T_d(s) = 0$ se obtiene la función de transferencia

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(Js + b) + K_b K_m]} = \frac{K_m}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}. \tag{2.69}$$

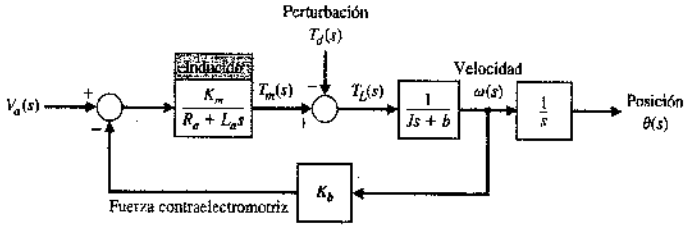


FIGURA 2.20
Motor de cc controlado por inducido.

Sin embargo, para muchos motores cc la constante de tiempo del inducido, $\tau_a = L_a/R_a$, es despreciable; por tanto

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[R_a(Js + b) + K_b K_m]} = \frac{[K_m/(R_a b + K_b K_m)]}{s(\tau_1 s + 1)}, \tag{2.70}$$

donde la constante de tiempo equivalente $\tau_1 = R_a J/(R_a b + K_b K_m)$.

Es interesante observar que K_m es igual a K_b. Esta igualdad puede comprobarse considerando la operación en estado estacionario del motor y el balance de potencia cuando se desprecia la resistencia del rotor. La potencia de entrada al rotor es $(K_b\omega)i_a$, y la potencia entregada al eje es $T\omega$. En la condición de estado estacionario, la potencia de entrada es igual a la potencia entregada al eje, de modo que $(K_b\omega)i_a = T\omega$; como $T = K_m i_a$ (Ecuación 2.64), se encuentra que $K_b = K_m$.

Los motores eléctricos se emplean para mover cargas cuando no se necesita una respuesta rápida y para requerimientos de potencia relativamente bajos. En la Tabla 2.4 se proporcionan constantes típicas para un motor fraccional. Para grandes cargas, se emplean actuadores que operan como resultado de una presión hidráulica. En la Figura 2.21

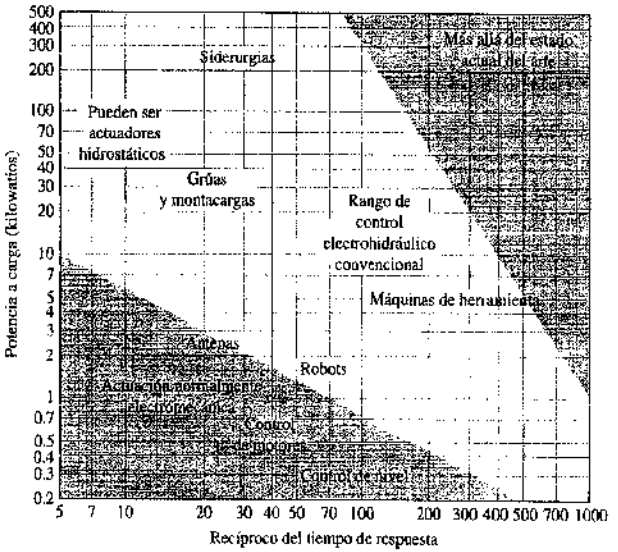


FIGURA 2.21
Rango de tiempo de respuesta de control y de potencia entregada a la carga para dispositivos electromecánicos y electrohidráulicos.

Tabla 2.5 Funciones de transferencia de elementos y redes dinámicas

Constante del motor, K_m	50×10^{-3} N·m/A
Inercia del rotor, J_m	1×10^{-3} N·m·s^2/rad
Constante de tiempo del campo, τ_f	1 ms
Constante de tiempo de rotor, τ	100 ms
Potencia de salida máxima	$\frac{1}{4}$hp, 187 W

se muestran los rangos usuales de empleo de unidades electromecánicas, en contraposición con las electrohidráulicas. También se muestran algunas aplicaciones típicas. ■

EJEMPLO 2.6. Función de transferencia de un actuador hidráulico

Un actuador útil para el posicionamiento lineal de una masa es el actuador hidráulico que se muestra en la Tabla 2.5, en la posición 9 [9, 10]. El actuador hidráulico puede proporcionar una gran amplificación de potencia. Se supondrá que el fluido hidráulico se obtiene de una fuente de presión constante y que su compresibilidad es despreciable. Un desplazamiento descendente de entrada x mueve la válvula de control; por tanto, el fluido pasa a la parte superior del cilindro y el pistón se fuerza hacia abajo. Un pequeño desplazamiento de baja potencia de $x(t)$ ocasiona un mayor desplazamiento $y(t)$ de alta potencia. El caudal volumétrico de fluido, Q, se relaciona con el desplazamiento de entrada $x(t)$ y la presión diferencial a través del pistón como $Q = g(x, P)$. Usando la linealización por serie de Taylor como en la Ecuación (2.11), se tiene

$$Q = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x_0, P_0} x + \left(\frac{\partial g}{\partial P}\right)_{P_0, x_0} P = k_x x - k_P P, \tag{2.71}$$

donde $g = g(x, P)$ y (x_0, P_0) es el punto de operación. La fuerza desarrollada por el pistón actuador es igual a la superficie del pistón, A, multiplicada por la presión, P. Esta fuerza se aplica a la masa y, por tanto, se tiene

$$AP = M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt}. \tag{2.72}$$

Así pues, sustituyendo la Ecuación (2.71) en la Ecuación (2.72), se obtiene

$$\frac{A}{k_P}(k_x x - Q) = M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt}. \tag{2.73}$$

Además, el caudal volumétrico se relaciona con el movimiento del pistón por

$$Q = A\frac{dy}{dt}. \tag{2.74}$$

Entonces, sustituyendo la Ecuación (2.74) en la Ecuación (2.73) y reordenando se obtiene

$$\frac{Ak_x}{k_P}x = M\frac{d^2y}{dt^2} + \left(b + \frac{A^2}{k_P}\right)\frac{dy}{dt}. \tag{2.75}$$

Por tanto, usando la transformación de Laplace, se tiene la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(Ms + B)}, \tag{2.76}$$

donde

$$K = \frac{Ak_x}{k_P} \quad \text{y} \quad B = \left(b + \frac{A^2}{k_P}\right).$$

Obsérvese que la función de transferencia del actuador hidráulico es semejante a la del motor eléctrico. Así mismo, para un actuador que opere en niveles de alta presión y que requiera una respuesta rápida de la carga, debe tenerse en cuenta el efecto de la compresibilidad del fluido [4, 5].

Símbolos, unidades y tablas de conversión asociadas con muchas de las variables de la Tabla 2.5 se encuentran en el sitio web MCS. Los símbolos y unidades para cada variable se pueden encontrar en tablas con los correspondientes factores de conversión entre los sistemas SI y británico de unidades. ■

El concepto y enfoque de función de transferencia es muy importante, ya que proporciona al analista y diseñador un modelo matemático útil de los elementos del sistema. La función de transferencia es una ayuda valiosa en el intento de modelar sistemas dinámicos. El método es particularmente útil, ya que los ceros y polos en el plano s de la función de transferencia representan la respuesta transitoria del sistema. En la Tabla 2.5 se dan las funciones de transferencia de algunos elementos dinámicos.

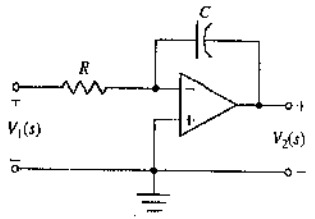
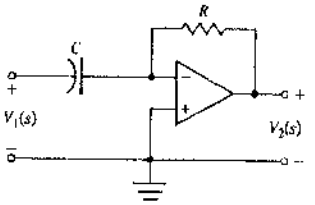
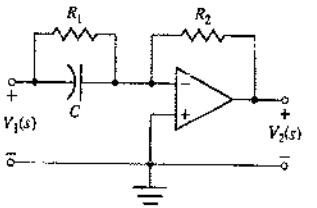
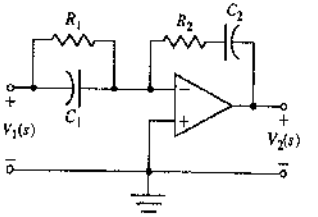
En muchas situaciones en ingeniería, la transmisión de movimiento rotatorio de un eje a otro es un requisito fundamental. Por ejemplo, la potencia de salida del motor de un automóvil se transfiere a las ruedas motrices por medio de la caja de cambios y el diferencial. La caja de cambios permite al conductor seleccionar diferentes relaciones de engranaje dependiendo de la situación del tráfico, mientras que el diferencial tiene un valor fijo. La velocidad del motor en este caso no es constante, puesto que está bajo control del conductor. Otro ejemplo es un conjunto de engranajes que transfiere la potencia en el eje de un motor eléctrico al eje de una antena giratoria. Ejemplos de convertidores mecánicos son engranajes, transmisión por cadenas y correas de transmisión. Un conversor eléctrico utilizado comúnmente es el transformador eléctrico. Un ejemplo de un dispositivo que convierte el movimiento rotacional en movimiento lineal es el engranaje de piñón y cremallera mostrado en el ítem 17 de la Tabla 2.5.

2.6. MODELOS DE DIAGRAMAS DE BLOQUES

Los sistemas dinámicos que constituyen los sistemas de control automático se representan matemáticamente mediante un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas. Como se ha indicado en las secciones previas, la transformación de Laplace reduce el problema a la solución de un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales. Como los sistemas de control se ocupan del control de variables específicas, las variables controladas deben relacionarse con las variables de control. Esta relación se representa típicamente mediante la función de transferencia del subsistema que relaciona las variables de entrada y salida. Por tanto, podemos suponer correctamente que la función de transferencia es una relación importante para la ingeniería de control.

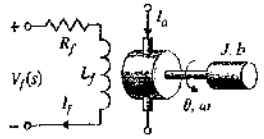
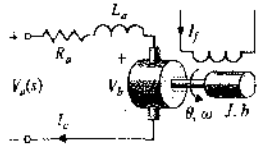
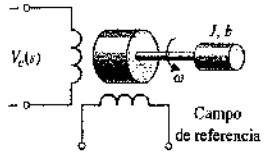
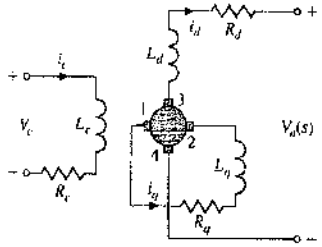
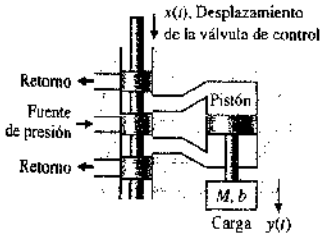
La importancia de esta relación causa-efecto se hace evidente por el interés en representar las relaciones de las variables del sistema por medio de diagramas. La representación por **diagrama de bloques** para las relaciones de los sistemas predomina en la ingeniería de sistemas de control. Los diagramas de bloques consisten en bloques

Tabla 2.5 Funciones de transferencia de elementos y redes dinámicas

Elemento de sistema	$G(s)$
1. Circuito de integración, filtro	
	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{1}{RCs}$
2. Inercia del rotor	
	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -RCs$
3. Circuito diferenciador	
	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{R_2(R_1Cs+1)}{R_1}$
4. Filtro integrador	
	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{R_1C_2s}$

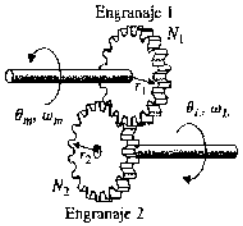
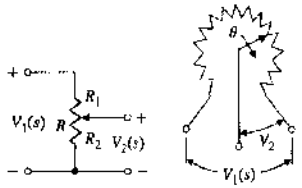
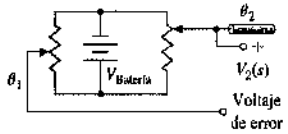
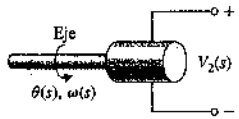
(continúa)

Tabla 2.5 *Continuación*

Elemento de sistema	$G(s)$
5. Motor de cc, controlado por campo, actuador rotacional	
	$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s(Js+b)(L_fs+R_f)}$
6. Motor de cc, controlado por inducido, actuador rotacional	
	$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a+L_as)(Js+b)+K_bK_m]}$
7. Motor de ca, control de campo bifásico, actuador rotacional	
	$\frac{\theta(s)}{V_c(s)} = \frac{K_m}{s(\tau s+1)}$ $\tau = J/(b-m)$ m = pendiente de la curva par-velocidad linealizada (normalmente negativa)
8. Amplidina, voltaje y amplificador de potencia	
	$\frac{V_o(s)}{V_c(s)} = \frac{(K/R_cR_q)}{(s\tau_c+1)(s\tau_q+1)}$ $\tau_c = L_c/R_c, \quad \tau_q = L_q/R_q$ Para el caso sin carga, $i_d \approx 0$, $\tau_c \approx \tau_q$, $0.05\text{ s} < \tau_c < 0.5\text{ s}$ $V_{12} = V_q$, $V_{34} = V_d$
9. Actuador hidráulico	
	$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(Ms+B)}$ $K = \frac{Ak_x}{k_p}, \quad B = \left(b + \frac{A^2}{k_p}\right),$ $k_x = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_{x_0}, \quad k_p = \left.\frac{\partial g}{\partial P}\right\|_{P_0},$ $g = g(x, P)$ = flujo $\quad A$ = área del pistón

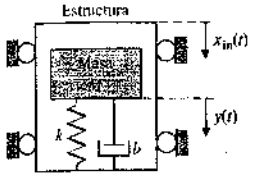
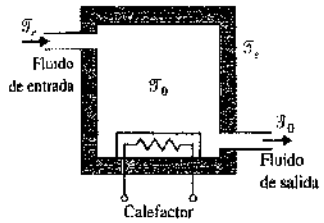
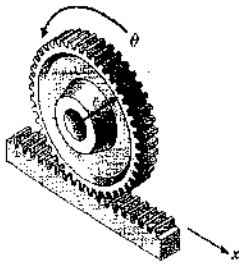
(continúa)

Tabla 2.5 Continuación

Elemento de sistema	$G(s)$
10. Tren de engranaje 	Relación de engranaje $= n = \dfrac{N_1}{N_2}$ $N_2\theta_L = N_1\theta_m \qquad \theta_L = n\theta_m$ $\omega_L = n\omega_m$
11. Potenciómetro, control de voltaje 	$\dfrac{V_2(s)}{V_1(s)} = \dfrac{R_2}{R} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ $\dfrac{R_2}{R} = \dfrac{\theta}{\theta_{\max}}$
12. Potenciómetro, puente detector de error 	$V_2(s) = k_s(\theta_1(s) - \theta_2(s))$ $V_2(s) = k_s\theta_{\text{error}}(s)$ $k_s = \dfrac{V_{\text{Batería}}}{\theta_{\max}}$
13. Tacómetro, sensor de velocidad 	$V_2(s) = K_t\omega(s) = K_t s\theta(s)$ K_t = constante
14. Amplificador cc	$\dfrac{V_2(s)}{V_1(s)} = \dfrac{k_a}{s\tau + 1}$ R_o = resistencia de salida C_o = capacitancia de salida $\tau = R_oC_o$, $\tau << 1$ s y es a menudo despreciable para el amplificador del controlador

(continúa)

Tabla 2.5 Continuación

Elemento de sistema	$G(s)$
15. Acelerómetro, sensor de aceleración 	$x_o(t) = y(t) - x_{in}(t)$, $\dfrac{X_o(s)}{X_{in}(s)} = \dfrac{-s^2}{s^2 + (b/M)s + k/M}$ Para oscilaciones de baja frecuencia, donde $\omega < \omega_n$, $\dfrac{X_o(j\omega)}{X_{in}(j\omega)} \simeq \dfrac{\omega^2}{k/M}$
16. Sistema de calentamiento térmico 	$\dfrac{\mathcal{J}(s)}{q(s)} = \dfrac{1}{C_t s + (QS + 1/R_t)}$, donde $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 - \mathcal{J}_e$ = diferencia de temperatura debida al proceso térmico C_t = capacitancia térmica Q = caudal de fluido = constante S = calor específico del agua R_t = resistencia térmica del aislamiento $q(s)$ = caudal de calor del elemento de calentamiento
17. Cremallera y piñón 	$x = r\theta$ convierte movimiento radial en movimiento lineal

operacionales y unidireccionales que representan la función de transferencia de las variables de interés. En la Figura 2.22 se muestra un diagrama de bloques de un motor de cc y carga controlado por campo. La relación entre el desplazamiento $\theta(s)$ y el voltaje de entrada $V_f(s)$ se muestra con claridad mediante el diagrama de bloques.

FIGURA 2.22
Diagrama de bloques de un motor de cc.

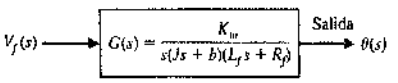


FIGURA 2.23
Representación general en bloques de un sistema de dos entradas, dos salidas.

Para representar un sistema con algunas variables bajo control, se utiliza una interconexión de bloques. Por ejemplo, el sistema que se muestra en la Figura 2.23 tiene dos variables de entrada y dos variables de salida [6]. Usando las relaciones de las funciones de transferencia, se pueden escribir las ecuaciones simultáneas para las variables de salida como

$$Y_1(s) = G_{11}(s)R_1(s) + G_{12}(s)R_2(s), \tag{2.77}$$

y

$$Y_2(s) = G_{21}(s)R_1(s) + G_{22}(s)R_2(s), \tag{2.78}$$

donde $G_{ij}(s)$ es la función de transferencia que relaciona la i-ésima variable de salida con la j-ésima variable de entrada. En la Figura 2.24 se muestra el diagrama de bloques que representa este conjunto de ecuaciones. En general, para J entradas e I salidas, se escribe la ecuación simultánea en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1J}(s) \\ G_{21}(s) & \cdots & G_{2J}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{I1}(s) & \cdots & G_{IJ}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \\ \vdots \\ R_J(s) \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

o, simplemente,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{GR}. \tag{2.80}$$

Aquí las matrices **Y** y **R** son matrices columna que contienen las I variables de salida y las J variables de entrada, respectivamente, y **G** es una matriz $I \times J$ de función de transferencia. La representación matricial de la interrelación entre muchas variables es particularmente valiosa para sistemas de control multivariables complejos. En el sitio web MCS se proporciona una introducción al álgebra matricial para aquellos que no están familiarizados con este tipo de álgebra o para quienes encuentren útil un repaso [22].

La representación en diagramas de bloques de un sistema dado, a menudo puede reducirse a un diagrama de bloques simplificado con menos bloques que el original. Como las funciones de transferencia representan sistemas lineales, la multiplicación es conmutativa. Por tanto, como en la Tabla 2.6, ítem 1, se tiene

$$X_2(s) = G_2(s)X_2(s) = G_1(s)G_2(s)X_1(s).$$

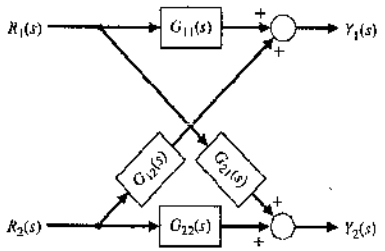


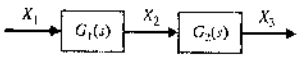
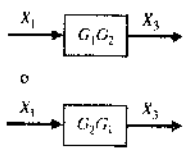
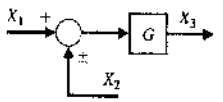
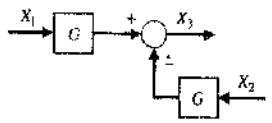
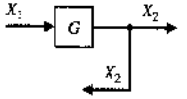
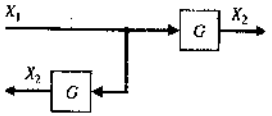
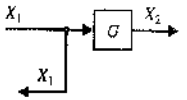
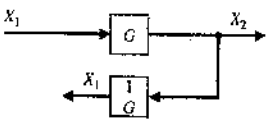
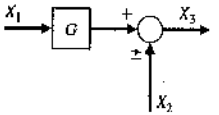
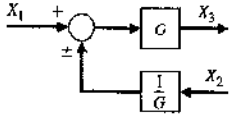
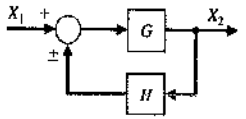
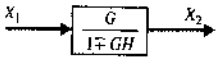
FIGURA 2.24
Diagrama de bloques de un sistema interconectado.

Cuando dos bloques se conectan en cascada como en el ítem 1 de la Tabla 2.6, se supone que

$$X_3(s) = G_2(s)G_1(s)X_1(s)$$

permanece válido. Esto supone que cuando el primer bloque se conecta al segundo bloque, el efecto de carga del primero es despreciable. Puede producirse carga e interacción entre componentes o sistemas interconectados. Si se produce la carga entre dispositivos interconectados, el ingeniero debe tener en cuenta este cambio en la función de transferencia y usar en los cálculos posteriores la función de transferencia corregida.

Tabla 2.6 Transformaciones de diagramas de bloques

Transformación	Diagrama original	Diagrama equivalente
1. Combinación de bloques en cascada		
2. Movimiento de un punto de suma anterior a un bloque		
3. Movimiento de un punto separación posterior a un bloque		
4. Movimiento de un punto de separación anterior a un bloque		
5. Movimiento de un punto de suma posterior a un bloque		
6. Eliminación de un lazo de realimentación		

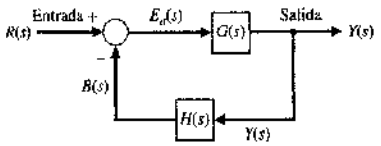


FIGURA 2.25
Sistema de control con realimentación negativa.

Las transformaciones y técnicas de reducción de diagrama de bloques se obtienen considerando el álgebra de las variables del diagrama. Por ejemplo, considérese el diagrama de bloques que se muestra en la Figura 2.25. Este sistema de control con realimentación negativa se describe mediante la ecuación para la señal que actúa, que es

$$E_a(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)Y(s). \tag{2.81}$$

Como la salida está relacionada con la señal que actúa mediante $G(s)$, se tiene

$$Y(s) = G(s)E_a(s); \tag{2.82}$$

y, por tanto,

$$Y(s) = G(s)[R(s) - H(s)Y(s)]. \tag{2.83}$$

Resolviendo para $Y(s)$, se obtiene

$$Y(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)R(s). \tag{2.84}$$

Por tanto, la función de transferencia que relaciona la salida $Y(s)$ con la entrada $R(s)$ es

$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}} \tag{2.85}$$

Esta **función de transferencia en lazo cerrado** es particularmente importante, porque representa muchos de los sistemas prácticos de control existentes.

La reducción del diagrama de bloques que se muestra en la Figura 2.25 a una representación con un solo bloque es un ejemplo de algunas técnicas útiles. En la Tabla 2.6 se dan estas transformaciones de diagramas. Todas las transformaciones de esta tabla pueden obtenerse mediante sencillas manipulaciones algebraicas de las ecuaciones que representan a los bloques. El análisis de sistemas por el método en los diagramas de bloques tiene la ventaja de ilustrar la contribución de cada elemento componente mejor que la que es posible obtener mediante la manipulación de ecuaciones. La utilidad de las transformaciones en los diagramas de bloques se ilustrará con un ejemplo de reducción.

EJEMPLO 2.7. Reducción de un diagrama de bloques

En la Figura 2.26 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control con realimentación de múltiples lazos. Es interesante observar que la señal de realimentación $H_1(s)Y(s)$ es una señal de realimentación positiva y el lazo $G_3(s)G_4(s)H_1(s)$ es un **lazo de realimentación positiva**. El procedimiento para reducir el diagrama de bloques se basa en la utilización de la regla 6 de la Tabla 2.6, que elimina los lazos de realimentación.

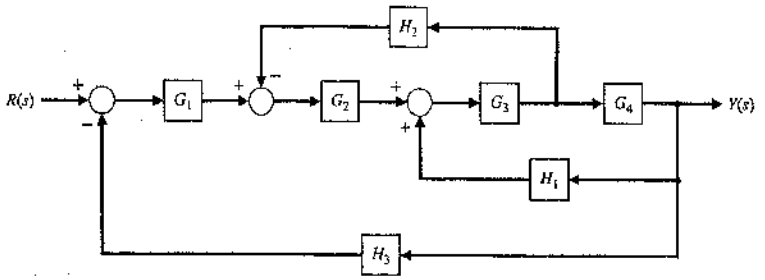


FIGURA 2.26
Sistema de control con realimentación de lazos múltiples.

Por tanto, las otras transformaciones se usan con el objeto de transformar el diagrama a una forma que permita eliminar los lazos de realimentación. En primer lugar, con el objeto de eliminar el lazo $G_3G_4H_1$ usando la regla 4 se mueve H_2 por detrás del bloque G_4 y se obtiene la Figura 2.27(a). Empleando la regla 6, se elimina el lazo $G_3G_4H_1$ y se obtiene la Figura 2.27(b). Eliminando el lazo interior que contiene H_2/G_4, se obtiene la Figura 2.27(c). Finalmente, reduciendo el lazo que contiene a H_3 se obtiene la función de transferencia del sistema en lazo cerrado, tal como se muestra en la Figura 2.27(d). Vale la pena examinar la forma del numerador y el denominador de esta función de transferencia de lazo cerrado. Se observa que el numerador está compuesto por la fun-

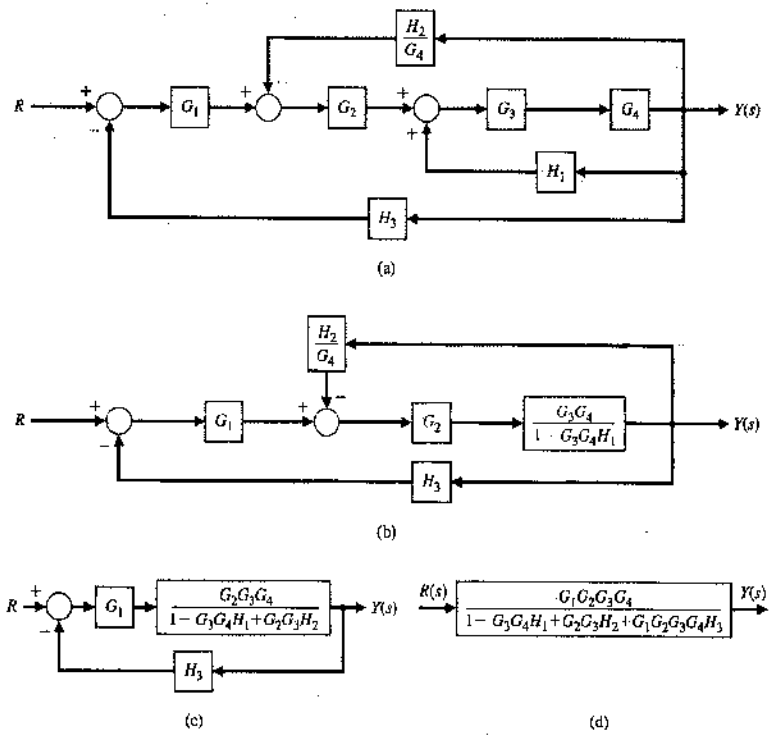


FIGURA 2.27
Reducción en el diagrama de bloques del sistema de la Figura 2.26.

ción de transferencia en cascada de los elementos de la cadena directa que conectan la entrada $R(s)$ y la salida $Y(s)$. El denominador está formado por 1 menos la suma de cada función de transferencia de lazo. El signo del lazo $G_3G_4H_1$ es más, ya que es un lazo con realimentación positiva, mientras que los lazos $G_1G_2G_3G_4H_3$ y $G_2G_3H_2$ son de realimentación negativa. A fin de ilustrar este punto, el denominador se puede escribir ahora como

$$q(s) = 1 - (+G_3G_4H_1 - G_2G_3H_2 - G_1G_2G_3G_4H_3). \tag{2.86}$$

Esta forma del numerador y del denominador es muy parecida a la forma general para sistemas con realimentación de lazos múltiples, tal como se verá en la siguiente sección. ■

La representación en diagramas de bloques de los sistemas de control con realimentación es un método muy valioso y ampliamente usado. Este diagrama proporciona al analista una representación gráfica de las relaciones entre las variables controladas y las variables de entrada. Además, el diseñador puede visualizar con facilidad las posibilidades de añadir bloques al diagrama existente del sistema con el objeto de modificar y mejorar el comportamiento del sistema. En la siguiente sección se presenta la transición del método de diagramas de bloques a un método que emplea una representación de trayectorias en lugar de una representación de bloques.

2.7. MODELOS DE GRAFOS DE FLUJO DE SEÑAL

Los diagramas de bloques son adecuados para la representación de las interrelaciones entre las variables controladas y las variables de entrada. Sin embargo, para un sistema con interrelaciones razonablemente complejas el proceso de reducción en el diagrama de bloques es engorroso y con frecuencia difícil de completar. Mason ha desarrollado un método alternativo para determinar la relación entre variables del sistema que se basa en la representación del sistema por segmentos de recta [4, 25]. La ventaja del método de las trayectorias, conocido como método del grafo de flujo de señal, es la disponibilidad de una fórmula de ganancia del grafo de flujo, que proporciona la relación entre las variables del sistema sin requerir ningún procedimiento de reducción o manipulación del grafo de flujo.

La transición de una representación en diagrama de bloques a una representación en segmentos de recta dirigidos es fácil de lograr considerando de nuevo los sistemas de la sección anterior. Un **grafo de flujo de señal** es un diagrama formado por nodos que se conectan mediante algunas ramas dirigidas y es una representación gráfica de un conjunto de relaciones lineales. Los grafos de flujo de señal son muy útiles para los sistemas de control con realimentación, porque la teoría de la realimentación se relaciona principalmente con el flujo y procesamiento de señales en los sistemas. El elemento básico de un grafo de flujo de señal es un segmento de trayectoria unidireccional denominado **rama**, que relaciona la dependencia de una variable de entrada con una variable de salida de forma equivalente a un bloque de un diagrama de bloques. Por tanto, la rama que relaciona la salida de un motor de cc, $\theta(s)$, con el voltaje del campo, $V_f(s)$, es similar al diagrama de bloques de la Figura 2.22 y se muestra en la Figura 2.28. Los puntos de

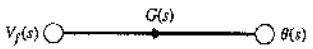


FIGURA 2.28
Grafo de flujo de señal del motor de cc.

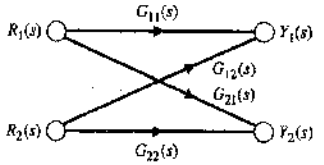


FIGURA 2.29
Grafo de flujo de señal del sistema interconectado.

entrada y salida o uniones se llaman **nodos**. Análogamente, el grafo de flujo de señal que representa las Ecuaciones (2.77) y (2.78), así como la Figura 2.24, se muestran en la Figura 2.29. La relación entre cada variable se escribe junto a la flecha de dirección. Todas las ramas que parten de un nodo pasan la señal nodal al nodo de salida de cada rama (unidireccionalmente). La suma de todas las señales que entran a un nodo es igual a la variable del nodo. Una **trayectoria** es una rama o una secuencia continua de ramas que pueden recorrerse desde una señal (nodo) a otra señal (nodo). Un **lazo** es una trayectoria cerrada que se origina y termina en el mismo nodo, y a lo largo de la trayectoria no se repite ningún nodo. Dos lazos se dicen que *no se tocan* si no tienen un nodo en común. Dos lazos que se tocan comparten uno o más nodos en común. Por tanto, considerando de nuevo la Figura 2.29, se obtiene

$$Y_1(s) = G_{11}(s)R_1(s) + G_{12}(s)R_2(s), \tag{2.87}$$

y

$$Y_2(s) = G_{21}(s)R_1(s) + G_{22}(s)R_2(s). \tag{2.88}$$

El grafo de flujo es simplemente un método gráfico de escribir un sistema de ecuaciones algebraicas de forma que indiquen las interdependencias de las variables. Como otro ejemplo, considérese el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1 = x_1 \tag{2.89}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 = x_2. \tag{2.90}$$

Las dos variables de entrada son r_1 y r_2, y las variables de salida son x_1 y x_2. En la Figura 2.30 se muestra un grafo de flujo de señal que representa las Ecuaciones (2.89) y (2.90). Estas ecuaciones pueden escribirse como

$$x_1(1 - a_{11}) + x_2(-a_{12}) = r_1, \tag{2.91}$$

y

$$x_1(-a_{21}) + x_2(1 - a_{22}) = r_2. \tag{2.92}$$

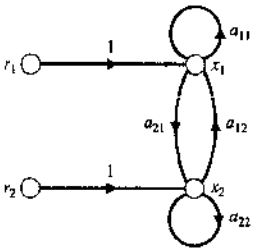


FIGURA 2.30
Grafo de flujo de señal de dos ecuaciones algebraicas.

Empleando la regla de Cramer, la solución simultánea de las Ecuaciones (2.91) y (2.92) es

$$x_1 = \frac{(1 - a_{22})r_1 + a_{12}r_2}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}} = \frac{(1 - a_{22})}{\Delta} r_1 + \frac{a_{12}}{\Delta} r_2, \tag{2.93}$$

y

$$x_2 = \frac{(1 - a_{11})r_2 + a_{21}r_1}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}} = \frac{(1 - a_{11})}{\Delta} r_2 + \frac{a_{21}}{\Delta} r_1, \tag{2.94}$$

El denominador de la solución es el determinante Δ del sistema de ecuaciones, y se escribe como

$$\Delta = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{2.95}$$

En este caso, el denominador es igual a 1 menos cada autolazo a_{11}, a_{22} y $a_{12}a_{21}$, más el producto de los dos lazos que no se tocan entre sí a_{11} y a_{22}. Los lazos a_{22} y $a_{21}a_{12}$ están tocándose, como lo están también a_{11} y $a_{21}a_{12}$.

El numerador para x_1 con la entrada r_1 es 1 por $(1 - a_{22})$, que es el valor de Δ que no toca la trayectoria 1 desde r_1 a x_1. Por tanto, el numerador de r_2 a x_1 es simplemente a_{12} pues la trayectoria que pasa por a_{12} toca todo los lazos. El numerador de x_2 es simétrico al de x_1.

En general, la dependencia lineal T_{ij} entre la variable independiente x_i (frecuentemente conocida como variable de entrada) y una variable dependiente x_j está dada por la fórmula de la ganancia del flujo de señal de Mason [11, 12]:

$$T_{ij} = \frac{\Sigma_k P_{ijk}\Delta_{ijk}}{\Delta}, \tag{2.96}$$

P_{ijk} = trayectoria k-ésima desde la variable x_i a la variable x_j,

Δ = determinante del grafo,

Δ_{ijk} = cofactor de la trayectoria P_{ijk},

y la suma se toma sobre todas las posibles k trayectorias desde x_i hasta x_j. El cofactor Δ_{ijk} es el determinante con los lazos que tocan la trayectoria k-ésima eliminada. El determinante Δ es

$$\Delta = 1 - \sum_{n=1}^{N} L_n + \sum_{m=1,\,q=1}^{M,Q} L_m L_q - \sum L_r L_s L_t + \cdots, \tag{2.97}$$

donde L_q es igual al valor de la transmitancia del q-ésimo lazo. Por tanto, la regla para el cálculo de Δ en términos de los lazos L_1, L_2, L_3, ..., L_N es

$\Delta = 1$ − (suma de todas las diferentes ganancias de los lazos)

− (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones de 2 lazos que no se tocan)

− (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones de 3 lazos que no se tocan)

+ ⋯,

La fórmula de la ganancia se usa frecuentemente para relacionar la variable de salida $Y(s)$ con la variable de entrada $R(s)$ y se da de forma simplificada como

$$\boxed{T = \frac{\Sigma_k P_k \Delta_k}{\Delta}} \tag{2.98}$$

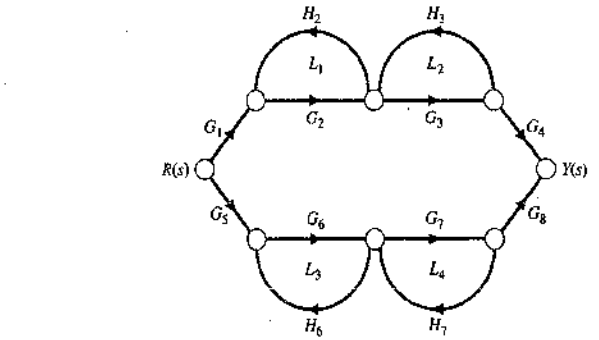
donde $T(s) = Y(s)/R(s)$. La ganancia de la trayectoria o transmitancia P_k (o P_{ijk}) se define como la sucesión continua de ramas que se recorren en la dirección de las flechas y que no encuentran ningún nodo más de una vez. Un lazo se define como una trayectoria cerrada en la cual no se encuentra un nodo más de una vez por recorrido.

Algunos ejemplos ilustrarán la utilidad y facilidad de este método. Aunque la Ecuación (2.96) de la ganancia parece confusa, se debe recordar que representa un proceso de suma y no un complicado proceso de solución.

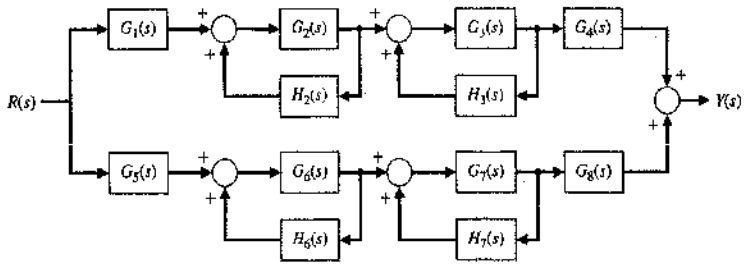
EJEMPLO 2.8. Función de transferencia de un sistema con interacciones

En la Figura 2.31(a) se muestra un grafo de flujo de señal de dos trayectorias y el correspondiente diagrama de bloques se muestra en la Figura 2.31(b). Un ejemplo de un sistema de control con múltiples trayectorias de señales es un robot de varias patas. Las trayectorias que conectan la entrada $R(s)$ y la salida $Y(s)$ son

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4 \text{ (trayectoria 1)} \quad \text{y} \quad P_2 = G_5G_6G_7G_8 \text{ (trayectoria 2).}$$



(a)



(b)

FIGURA 2.31
Sistema con interacción de dos trayectorias. (a) Grafo de flujo de señal. (b) Diagrama de bloques.

Existen cuatro lazos propios:

$$L_1 = G_2H_2, \quad L_2 = H_3G_3, \quad L_3 = G_6H_6 \quad \text{y} \quad L_4 = G_7H_7.$$

Los lazos L_1 y L_2 no tocan L_3 ni L_4. Por tanto, el determinante es

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4). \tag{2.99}$$

El cofactor del determinante a lo largo de la trayectoria 1 se calcula eliminando los lazos que tocan a la trayectoria 1 desde Δ. Por tanto, se tiene

$$L_1 = L_2 = 0 \quad \text{y} \quad \Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4).$$

Análogamente, el cofactor para la trayectoria 2 es

$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2).$$

Por tanto, la función de transferencia del sistema es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4(1 - L_3 - L_4) + G_5G_6G_7G_8(1 - L_1 - L_2)}{1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4}. \tag{2.100}$$

Un análisis similar se puede llevar a cabo utilizando técnicas de reducción de diagramas de bloques. El diagrama de bloques que se muestra en la Figura 2.31(b) tiene cuatro lazos de realimentación internos dentro del diagrama de bloques global. La reducción del diagrama de bloque se simplifica en primer lugar reduciendo los cuatro lazos de realimentación internos y a continuación colocando el sistema resultante en serie. A lo largo de la trayectoria superior, la función de transferencia es

$$Y_1(s) = G_1(s)\left[\frac{G_2(s)}{1 - G_2(s)H_2(s)}\right]\left[\frac{G_3(s)}{1 - G_3(s)H_3(s)}\right]G_4(s)R(s)$$

$$= \left[\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{(1 - G_2(s)H_2(s))(1 - G_3(s)H_3(s))}\right]R(s).$$

De forma similar a lo largo de la trayectoria inferior, la función de transferencia es

$$Y_2(s) = G_5(s)\left[\frac{G_6(s)}{1 - G_6(s)H_6(s)}\right]\left[\frac{G_7(s)}{1 - G_7(s)H_7(s)}\right]G_8(s)R(s)$$

$$= \left[\frac{G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)}{(1 - G_6(s)H_6(s))(1 - G_7(s)H_7(s))}\right]R(s).$$

La función de transferencia total viene entonces dada por

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$$

$$= \left[\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{(1 - G_2(s)H_2(s))(1 - G_3(s)H_3(s))} + \frac{G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)}{(1 - G_6(s)H_6(s))(1 - G_7(s)H_7(s))}\right]R(s).$$

■

EJEMPLO 2.9. Motor controlado por inducido

En la Figura 2.20 se muestra el diagrama de bloques del motor de cc controlado por inducido. El diagrama se obtuvo a partir de las Ecuaciones (2.64)-(2.68). El diagrama de flujo de señal se puede obtener o bien de de las Ecuaciones (2.64)-(2.68) o del diagrama de bloques y se muestra en la Figura 2.32. Utilizando la fórmula de la ganancia del flujo de señal de Mason se obtiene la función de transferencia para $\theta(s)/V_a(s)$ con $T_d(s) = 0$. La trayectoria directa es $P_1(s)$, que toca al lazo $L_1(s)$, donde

$$P_1(s) = \frac{1}{s}G_1(s)G_2(s) \quad \text{y} \quad L_1(s) = -K_bG_1(s)G_2(s).$$

Por tanto, la función de transferencia es

$$T(s) = \frac{P_1(s)}{1 - L_1(s)} = \frac{(1/s)G_1(s)G_2(s)}{1 + K_bG_1(s)G_2(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_as)(Js + b) + K_aK_m]},$$

que es exactamente la misma que se dedujo anteriormente (Ecuación 2.69). ■

La fórmula de la ganancia del grafo de flujo de señal proporciona un método razonablemente directo para la evaluación de sistemas complicados. Con el objeto de comparar el método con la reducción del diagrama de bloques, que realmente no es mucho más difícil, se considera de nuevo el sistema complejo del Ejemplo 2.7.

EJEMPLO 2.10. Función de transferencia de un sistema de lazo múltiple

En la Figura 2.26 se muestra un sistema con realimentación de lazos múltiples en forma de diagrama de bloques. No hay razón para dibujar de nuevo el diagrama en forma de grafo de flujo de señal, de modo que se procederá en la forma usual, empleando la fórmula de la ganancia del flujo de señal de Mason, Ecuación (2.98). Hay una trayectoria directa $P_1 = G_1G_2G_3G_4$. Los lazos de realimentación son

$$L_1 = -G_2G_3H_2, \quad L_2 = G_3G_4H_1 \quad \text{y} \quad L_3 = -G_1G_2G_3G_4H_3. \tag{2.101}$$

Todos los lazos tienen nodos comunes y, por tanto, todos se tocan. Además, la trayectoria P_1 toca todos los lazos y, por consiguiente, $\Delta_1 = 1$. Así pues, la función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{1 - L_1 - L_2 - L_3}$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 + G_2G_3H_2 - G_3G_4H_1 + G_1G_2G_3G_4H_3}. \tag{2.102}$$

■

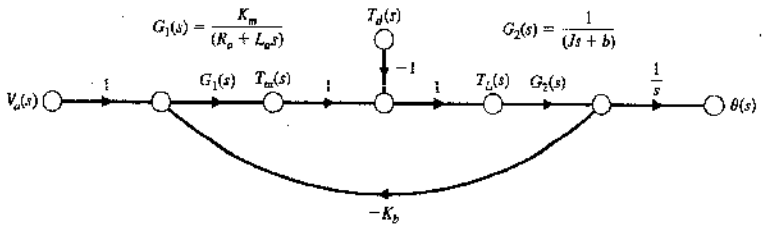


FIGURA 2.32
Grafo de flujo del motor de cc controlado por inducido.

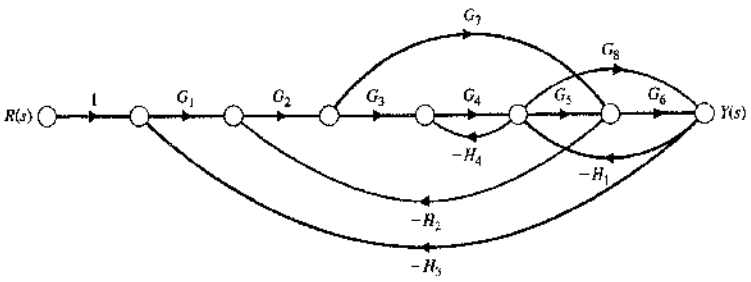


FIGURA 2.33
Sistema con lazos múltiples.

EJEMPLO 2.11. Función de transferencia de un sistema complejo

Finalmente, consideraremos un sistema razonablemente complejo que sería difícil de reducir por las técnicas de los diagramas de bloques. En la Figura 2.33 se muestra un sistema con varios lazos de realimentación y trayectorias directas. Las trayectorias directas son

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6, \quad P_2 = G_1G_2G_7G_6 \quad \text{y} \quad P_3 = G_1G_2G_3G_4G_8.$$

Los lazos de realimentación son

$$L_1 = -G_2G_3G_4G_5H_2, \quad L_2 = -G_5G_6H_1, \quad L_3 = -G_8H_1, \quad L_4 = -G_7H_2G_2,$$
$$L_5 = G_4H_4, \quad L_6 = -G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_3, \quad L_7 = -G_1G_2G_7G_6H_3 \quad \text{y}$$
$$L_8 = -G_1G_2G_3G_4G_8H_3.$$

El lazo L_5 no toca al lazo L_4 ni al lazo L_7 y el lazo L_3 no toca al lazo L_4; pero todos los lazos restantes se tocan. Por tanto, el determinante es

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8) + (L_5L_7 + L_5L_4 + L_3L_4). \quad (2.103)$$

Los cofactores son

$$\Delta_1 = \Delta_3 = 1 \quad \text{y} \quad \Delta_2 = 1 - L_5 = 1 + G_4H_4.$$

Finalmente, la función de transferencia es

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1 + P_2\Delta_2 + P_3}{\Delta}. \quad (2.104)$$ ■

Los grafos de flujo de señal y la fórmula de la ganancia del flujo de señal de Mason pueden emplearse ventajosamente para el análisis de sistemas de control con realimentación, circuitos amplificadores electrónicos y sistemas mecánicos, entre muchos otros ejemplos.

2.8. ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL POR COMPUTADOR

Un modelo de computador de un sistema, en una forma matemática adecuada se puede utilizar para investigar algunos diseños de un sistema planificado sin construirlo realmente. Una **simulación** de computador emplea un modelo y las condiciones reales del sistema que se modela, así como las entradas reales a las cuales estará sujeto el sistema.

Varios niveles de fidelidad de la simulación (esto es, exactitud) están disponibles para el ingeniero de control. En las primeras etapas del proceso de diseño, resultan particularmente eficaces paquetes de diseño software altamente interactivos. En esta etapa, la velocidad del computador no es tan importante como cuánto tiempo lleva el obtener una solución válida inicial para iterar y conseguir una sintonía fina de esa solución. Es crucial, pues, disponer de buenas capacidades de salida gráfica. Los análisis de simulación son generalmente de **baja fidelidad** en el sentido de que muchas de las simplificaciones (como la linealización) hechas en el proceso de diseño se retienen en la simulación. En este libro se utiliza MATLAB como el software de simulación, pero existen muchos otros paquetes de software similares para el diseño del sistema de control que pueden resultar igualmente útiles.

Cuando el diseño madura, normalmente es necesario realizar **experimentos numéricos** en un entorno de simulación más realista. Por ejemplo, si el diseño del controlador en altitud de un vehículo espacial suponía que no existía empuje aerodinámico, sería una buena idea incluir estos efectos de empuje en el entorno de simulación final. De esta manera, se puede cuantificar el comportamiento esperado del vehículo espacial cuando esté realmente en órbita. En este punto del proceso de diseño, la velocidad de procesamiento del computador se hace más importante, puesto que grandes tiempos de simulación necesariamente reducen el número de experimentos de computador que se pueden obtener y correspondientemente los costos aumentan. Normalmente estas simulaciones de **alta fidelidad** se programan en FORTRAN, C, C++, Ada o lenguajes similares.

Suponiendo que un modelo y la simulación son precisos de manera fiable, las ventajas de la simulación por computador son las siguientes [14]:

1. El comportamiento del sistema puede observarse en todas las condiciones concebibles.
2. Los resultados del comportamiento del sistema en el campo pueden extrapolarse con un modelo de simulación para fines de predicción.
3. Pueden examinarse las decisiones concernientes a sistemas futuros, en el momento actual en una etapa conceptual.
4. Pueden efectuarse pruebas de sistemas bajo examen en periodos de tiempo mucho más reducidos.
5. Los resultados de la simulación pueden obtenerse a un costo más bajo que el de la experimentación real.
6. Puede efectuarse estudio de situaciones hipotéticas aun cuando dichas situaciones no sean posibles en la vida real y en el tiempo presente.
7. El modelado y la simulación por computador es frecuentemente la única técnica viable o segura para analizar y evaluar un sistema.

El análisis y diseño de un sistema de control se mejora enormemente utilizando la simulación como parte del proceso que se representa en la Figura 2.34.

2.9. EJEMPLOS DE DISEÑO

EJEMPLO 2.12. Control de un motor de tracción eléctrico

Una mayoría de los trenes modernos y de los vehículos de tránsito locales utilizan motores de tracción eléctricos. En la Figura 2.35(b) se muestra en forma de diagrama de bloques el accionamiento motorizado eléctrico de un ferrocarril que incorpora el control necesario de velocidad del vehículo. El objetivo del diseño es obtener un modelo y la función de transferencia en lazo cerrado del sistema $\omega(s)/\omega_d(s)$, seleccionar resistencias apropiadas R_1, R_2, R_3 y R_4 y entonces predecir la respuesta del sistema.

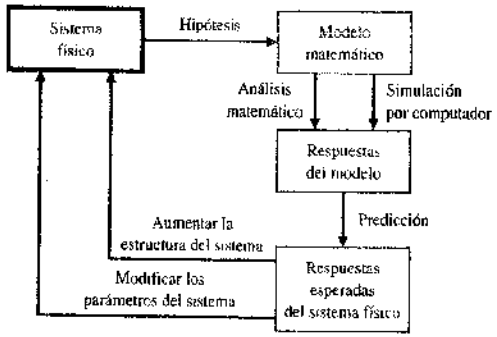


FIGURA 2.34
Análisis y diseño utilizando un modelo del sistema.

El primer paso es describir la función de transferencia de cada bloque. Se propone el uso de un tacómetro para generar un voltaje proporcional a la velocidad y conectar ese voltaje v_t a una entrada de un amplificador diferencial tal como se muestra en la Figura 2.35(b). El amplificador de potencia es no lineal y se puede representar aproximadamente por $v_2 = 2e^{3v_1} = 2\exp(3v_1) = g(v_1)$, una función exponencial con punto de operación normal, $v_{10} = 1.5V$. Utilizando la técnica de la Sección 2.3 se obtiene un modelo lineal:

$$v_2 = \left[\left.\frac{dg(v_1)}{dv_1}\right|_{v_{10}}\right]\Delta v_1 = 2[3\exp(3v_{10})]\Delta v_1 = 2[270]\Delta v_1 = 540\Delta v_1. \qquad (2.105)$$

Si no se toma en cuenta la notación delta y utilizando la transformada de Laplace, se encuentra que

$$V_2(s) = 540V_1(s).$$

También, para el amplificador diferencial se tiene

$$v_1 = \frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_3/R_4}\,v_{\text{in}} - \frac{R_2}{R_1}\,v_t. \qquad (2.106)$$

Se desea obtener un control de entrada que mantenga $\omega_d(t) = v_{\text{in}}$, donde las unidades de ω_d son rad/s y las unidades de v_{in} son voltios. Entonces, cuando $v_{\text{in}} = 10$ V, la velocidad en estado estacionario es $\omega = 10$ rad/s. Se observa que $v_t = K_t\omega_d$ en estado estacionario y se espera que en equilibrio la salida en estado estacionario sea

$$v_1 = \frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_3/R_4}\,v_{\text{in}} - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)K_t(v_{\text{in}}). \qquad (2.107)$$

Cuando el sistema está en equilibrio, $v_1 = 0$ y cuando $K_t = 0.1$ se tiene

$$\frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_3/R_4} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)K_t = 1.$$

Esta relación se puede conseguir cuando

$$R_2/R_1 = 10 \quad \text{y} \quad R_3/R_4 = 10.$$

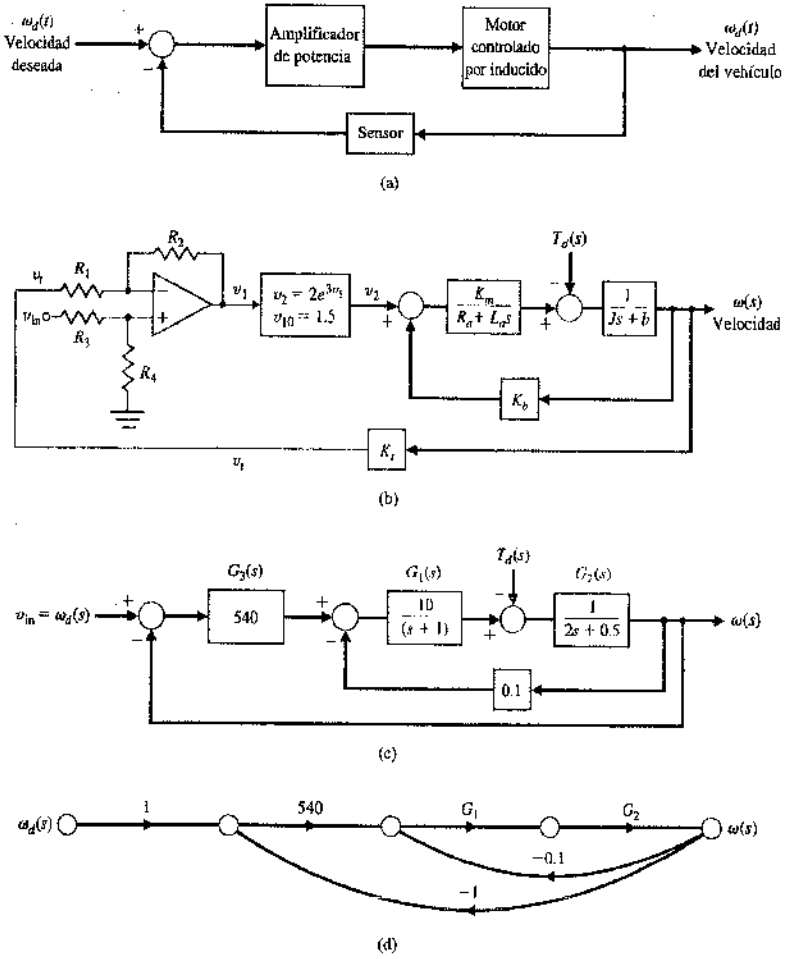


FIGURA 2.35
Control de velocidad de un motor eléctrico de tracción.

En la Tabla 2.7 se dan los parámetros del motor y la carga. El sistema global se muestra en la Figura 2.35(b). Utilizando la fórmula de ganancia de flujo de señal de Mason con el diagrama de flujo de señal de la Figura 2.35(d) se tiene

$$\frac{\omega(s)}{\omega_d(s)} = \frac{540G_1(s)G_2(s)}{1 + 0.1G_1G_2 + 540G_1G_2} = \frac{540G_1G_2}{1 + 540.1G_1G_2}$$
$$= \frac{5400}{(s+1)(2s+0.5) + 5401} = \frac{5400}{2s^2 + 2.5s + 5401.5}$$
$$= \frac{2700}{s^2 + 1.25s + 2700.75}. \qquad (2.108)$$

Tabla 2.7 Parámetros de un motor de CD

$K_m = 10$	$J = 2$
$R_a = 1$	$b = 0.5$
$L_a = 1$	$K_b = 0.1$

Como la ecuación característica es de segundo orden se observa que $\omega_n = 52$ y $\zeta = 0.012$ por lo que es de esperar que la respuesta del sistema es muy oscilatoria (subamortiguada). ■

EJEMPLO 2.13. Acelerómetro mecánico

Un acelerómetro mecánico se utiliza para medir la aceleración de una bancada de prueba levitada, tal como se muestra en la Figura 2.36. La bancada de prueba está levitada magnéticamente por encima de un raíl guiado una pequeña distancia δ. El acelerómetro proporciona una medida de la aceleración $a(t)$ de la bancada, ya que la posición y de la masa M con respecto a la caja del acelerómetro es proporcional a la aceleración de la caja (y de la bancada). El objetivo es diseñar un acelerómetro con una respuesta dinámica apropiada. Se desea diseñar un acelerómetro con un tiempo aceptable para que la característica de medida deseada $y(t) = qa(t)$ se logre (q es una constante).

La suma de las fuerzas que actúan sobre la masa es

$$-b\frac{dy}{dt} - ky = M\frac{d^2}{dt^2}(y + x)$$

o

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = -M\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{2.109}$$

Como

$$M_s\frac{d^2x}{dt^2} = F(t),$$

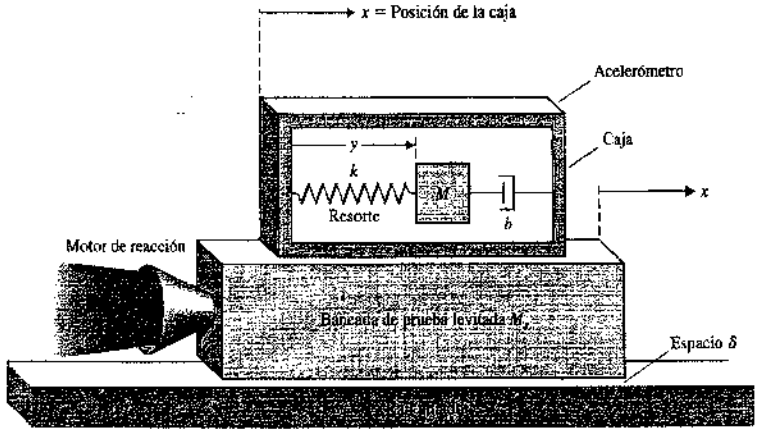


FIGURA 2.36
Un acelerómetro montado sobre una bancada de prueba de un motor de reacción.

se tiene

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = -\frac{M}{M_s}F(t),$$

o

$$\ddot{y} + \frac{b}{M}\dot{y} + \frac{k}{M}y = -\frac{F(t)}{M_s}. \tag{2.110}$$

Se seleccionan los coeficientes donde $b/M = 3$, $k/M = 2$, $F(t)/M_s = Q(t)$ y se consideran las condiciones iniciales $y(0) = -1$ e $\dot{y}(0) = 2$. Se obtiene entonces la ecuación transformada de Laplace, cuando la fuerza y por tanto $Q(t)$ es una función escalón, como sigue:

$$(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = -Q(s). \tag{2.111}$$

Como $Q(s) = P/s$, donde P es la magnitud de la función escalón, se obtiene

$$(s^2Y(s) + s - 2) + 3(sY(s) + 1) + 2Y(s) = -\frac{P}{s},$$

o

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = -\frac{-(s^2 + s + P)}{s}. \tag{2.112}$$

Así pues, la transformada de la salida es

$$Y(s) = \frac{-(s^2 + s + P)}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-(s^2 + s + P)}{s(s + 1)(s + 2)}. \tag{2.113}$$

Desarrollando en forma de fracciones simples da

$$Y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + 1} + \frac{k_3}{s + 2}. \tag{2.114}$$

Se tiene entonces

$$k_1 = \left.\frac{-(s^2 + s + P)}{(s + 1)(s + 2)}\right|_{s=0} = -\frac{P}{2}. \tag{2.115}$$

Análogamente, $k_2 = +P$ y $k_3 = (-P - 2)/2$. Así pues,

$$Y(s) = \frac{-P}{2s} + \frac{P}{s + 1} + \frac{-P - 2}{2(s + 2)}. \tag{2.116}$$

Por tanto, la medida de salida es

$$y(t) = \frac{1}{2}[-P + 2Pe^{-t} - (P + 2)e^{-2t}], \quad t \geq 0.$$

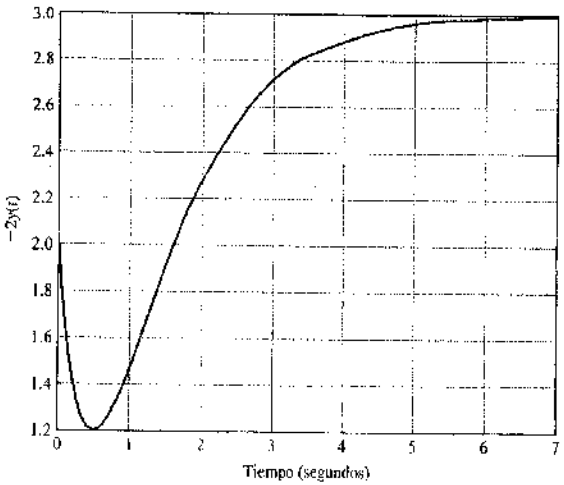


FIGURA 2.37
Respuesta del acelerómetro.

En la Figura 2.37 se muestra una gráfica de $y(t)$ para $P = 3$. Se puede ver que $y(t)$ es proporcional a la magnitud de la fuerza después de 5 segundos. Así en el estado estacionario, después de 5 segundos, la respuesta $y(t)$ es proporcional a la aceleración tal como se desea. Si este periodo es excesivamente largo, se debe aumentar la constante k del resorte y la fricción b, mientras que se reduce la masa M. Si se es capaz de seleccionar las componentes de forma tal que $b/M = 12$ y $k/M = 32$, el acelerómetro alcanzará la respuesta proporcional en 1 segundo. (Se deja al lector que demuestre esto.) ■

EJEMPLO 2.14. Diseño de un robot de laboratorio

En este ejemplo, se pretende mostrar el diseño físico de un dispositivo de laboratorio y demostrar su diseño complejo. También se exhibirán los muchos componentes que se utilizan normalmente en un sistema de control.

En la Figura 2.38 se muestra un robot para uso de un laboratorio. El volumen de trabajo del robot de laboratorio debe permitirle alcanzar la zona completa de una mesa de trabajo y acceder a los instrumentos analíticos existentes. Debe existir también un área suficiente para el almacenamiento de suministros de operaciones no atendidas.

El robot de laboratorio puede estar inmerso en tres tipos de tareas durante un experimento analítico. La primera es la introducción de la muestra, donde el robot se entrena para aceptar una serie de bandejas, estantes y contenedores de muestras diferentes e introducirlos en el sistema. El segundo conjunto de tareas a las que se dedica el robot es al transporte de las muestras entre estaciones automatizadas individuales dedicadas a la preparación química y al análisis instrumental. Las muestras deben planificarse y moverse entre estaciones cuando sea necesario para completar el análisis. En el tercer conjunto de tareas para el robot, la automatización flexible proporciona nuevas capacidades al laboratorio analítico. El robot debe programarse para emular al operador humano o trabajar con diferentes dispositivos. Todos estos tipos de operaciones se requieren para que un robot de laboratorio sea realmente efectivo.

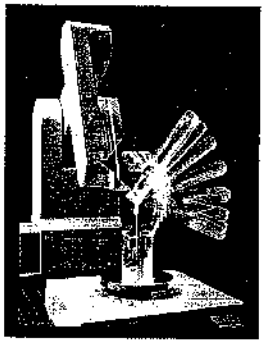


FIGURA 2.38
Robot de laboratorio utilizado para preparación de muestras. El robot manipula pequeños objetos, tales como tubos de ensayo y probetas colocadas en lugares precisos a velocidades relativamente altas [15] (© Copyright 1993 Hewlett-Packard Company. Reproducido con permiso.)

Hewlett-Packard ha diseñado el robot de laboratorio ORCA, que es un brazo antropomórfico, montado sobre un raíl y concebido como la configuración óptima para el laboratorio analítico [15]. El raíl se puede localizar en la parte frontal o trasera de un banco de trabajo o colocarse en el punto medio de una mesa cuando se precisa el acceso a ambos lados del raíl. Mediante órdenes sencillas de software se puede mover el brazo de un lado del raíl al otro mientras que se mantiene la posición de la muñeca (para transferir objetos prácticamente en cualquier orientación). La geometría rectilínea, en contraste con la geometría cilíndrica utilizada por muchos robots, permite que se coloquen más accesorios dentro del espacio de trabajo del robot y proporciona una excelente concordancia con la mesa de laboratorio. El movimiento de todas las articulaciones se coordina a través de software, que simplifica el uso del robot al representar sus posiciones y movimientos en el espacio más familiar de coordenadas cartesianas.

En la Tabla 2.8 se muestran las especificaciones físicas y de comportamiento del sistema ORCA de Hewlett-Packard.

Tabla 2.8 Especificaciones físicas de un brazo de robot ORCA

Brazo	Articulado, montado en el raíl	Dispositivo de confianza	Palanca de mando con parada de emergencia
Grados de libertad	6	Tiempo de ciclo	4 s (mover 1 pulgada arriba, 12 pulgadas a lo largo, 1 pulgada abajo y volver)
Alcance	±54 cm	Velocidad máxima	75 cm/s
Altura	78 cm	Tiempo de residencia	50 ms típicoi (para movimientos dentro de un recorrido)
Raíl	1 y 2 m	Carga	0.5 kg continuo, 2.5 kg transitorio (con restricciones)
Peso	8.0 kg	Deflexión vertical	< 1.5 mm de carga continua
Precisión	±0.25 mm	Sección transversal de la envolvente de trabajo	1 m^2
Recorrido de los dedos (pinza)	40 mm		
Rotación de la pinza	±77 revoluciones		

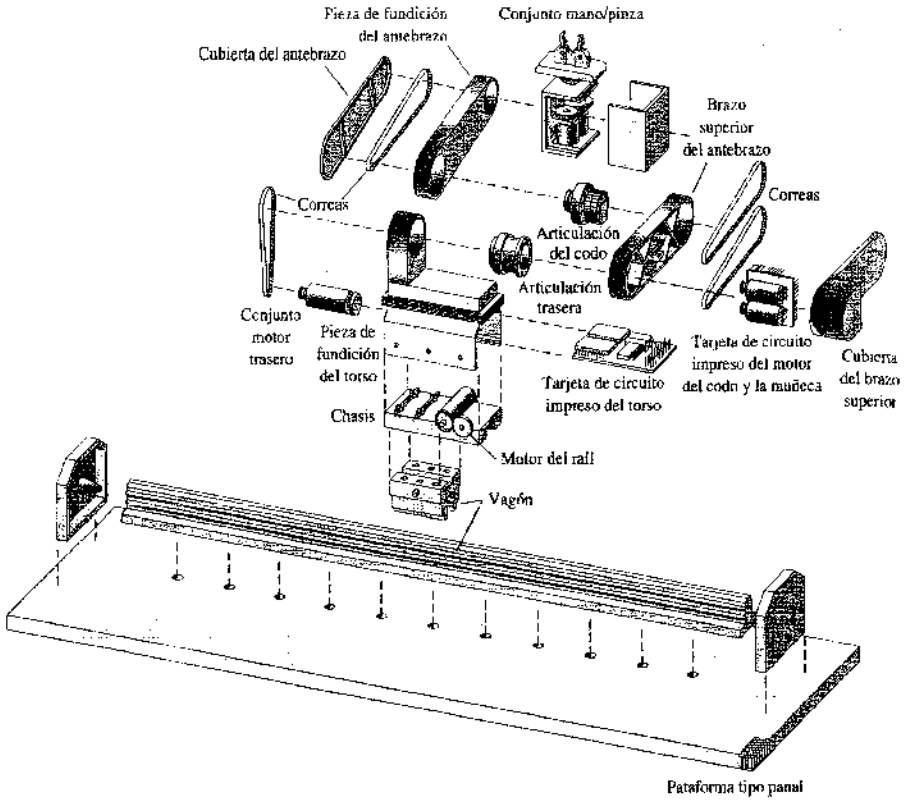


FIGURA 2.39. Despiece del robot ORCA que muestra los componentes [15]. (*Fuente:* © Copyright 1993 Hewlett-Packard Company. Reproducido con permiso.)

El diseño del robot de laboratorio ORCA progresó a la selección de las piezas componentes requeridas para obtener el sistema total. En la Figura 2.39 se muestra la vista despiezada del robot. Este dispositivo utiliza seis motores de cc, engranajes, transmisiones por correa y un raíl y carro. Las especificaciones son exigentes y requieren que el diseñador modele las componentes del sistema y sus interconexiones de forma precisa. ■

EJEMPLO 2.15. Diseño de un filtro paso-baja

El objetivo es diseñar un filtro paso-baja de primer orden que deje pasar señales por debajo de una frecuencia de 106.1 Hz y que atenúe las señales con una frecuencia por encima de 106.1 Hz. Además, la ganancia cc debería ser $^1/_2$.

En la Figura 2.40(a) se muestra un circuito en escalera con un elemento almacenador de energía, que actúa como una red paso-baja de primer orden. Obsérvese que la ganancia cc será igual a $^1/_2$ (circuito abierto del condensador). Las ecuaciones de corriente y voltaje son

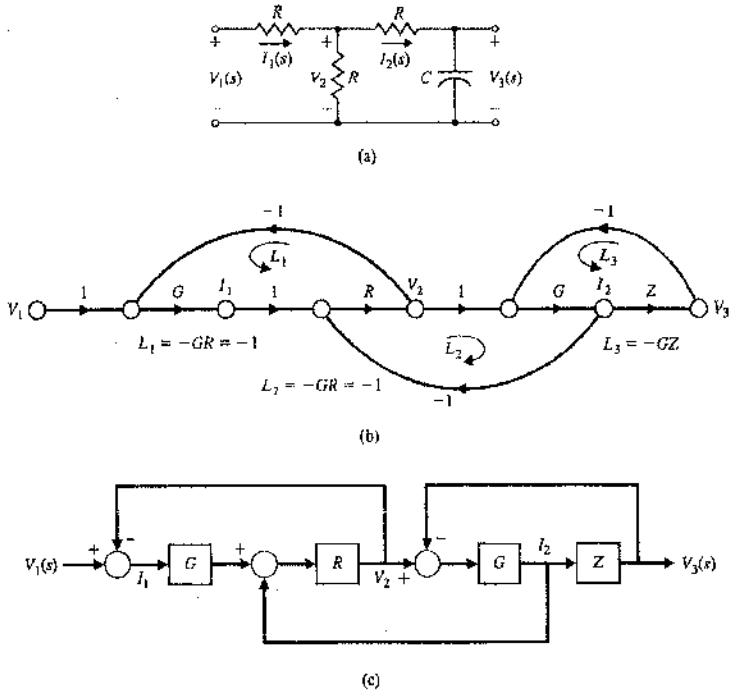


FIGURA 2.40
(a) Red en escalera, (b) su grafo de flujo de señal y (c) su diagrama de bloques.

$$I_1 = (V_1 - V_2)G,$$

$$I_2 = (V_2 - V_3)G,$$

$$V_2 = (I_1 - I_2)R,$$

y

$$V_3 = I_2 Z,$$

donde, $G = 1/R$, $Z(s) = 1/Cs$ y $I_1(s) = I_1$ (se omite la s). En la Figura 2.40(b) se muestra el grafo de flujo de señal construido para las cuatro ecuaciones y en la Figura 2.40(c) se muestra el correspondiente diagrama de bloques. Los tres lazos son $L_1 = -GR = -1$, $L_2 = -GR = -1$ y $L_3 = -GZ$. Todos los lazos tocan a la trayectoria directa. Los lazos L_1 y L_3 no se tocan. Por tanto, la función de transferencia es

$$T(s) = \frac{V_3}{V_1} = \frac{P_1}{1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3} = \frac{GZ}{3 + 2GZ}$$

$$= \frac{1}{3RCs + 2} = \frac{(1/3RC)}{(s + 2/3RC)}.$$

Si prefiere utilizar técnicas de reducción de diagrama de bloques, puede comenzar en la salida con

$$V_3(s) = ZI_2(s).$$

Pero el diagrama de bloques muestra que

$$I_2(s) = ZG(V_2(s) - V_3(s)).$$

Por tanto,

$$V_3(s) = ZI_2(s) = ZG(V_2(s) - V_3(s)) = ZGV_2(s) - ZGV_3(s).$$

Utilizando la relación dada anteriormente se obtiene

$$V_2(s) = \frac{1 + ZG}{ZG} V_3(s).$$

Se utilizará esta relación entre $V_3(s)$ y $V_2(s)$ en el desarrollo subsiguiente. Continuando con la reducción del diagrama de bloques, se tiene

$$V_3(s) = ZGV_2(s) - ZGV_3(s) = -ZGV_3(s) + ZGR(GI_1(s) - I_2(s)),$$

pero del diagrama de bloques se ve que

$$I_2 = \frac{V_3(s)}{Z}.$$

Por tanto,

$$V_3(s) = -ZGV_3(s) + ZGR(GI_1(s) - I_2(s)) = -ZGV_3(s) + ZG^2RI_1(s) - ZGRI_2(s)$$
$$= -ZGV_3(s) + ZG^2R(V_1(s) - V_2(s)) - GRV_3(s).$$

Sustituyendo para $V_2(s)$ da

$$V_3(s) = \frac{(GR)(GZ)}{1 + 2GR + GZ + (GR)(GZ)} V_1(s).$$

Pero se sabe que $GR = 1$; a partir de esto se obtiene

$$V_3(s) = \frac{GZ}{3 + 2GZ} V_1(s).$$

Obsérvese que la ganancia cc es $^1/_2$ tal como cabía esperar. El polo se desea en $p = 2\pi(106.1) = 666.7 = 2000/3$. Por tanto, se requiere $RC = 0.001$. Se selecciona $R = 1$ kΩ y $C = 1$ μF. De todo esto se obtiene el filtro

$$T(s) = \frac{333.35}{(s + 666.7)}.$$ ■

2.10. LA SIMULACIÓN DE SISTEMAS UTILIZANDO MATLAB†

La aplicación de muchas de las herramientas de análisis y diseño de sistemas de control clásico y moderno se basa en modelos matemáticos. MATLAB se puede utilizar con sistemas descritos en la forma de función de transferencia.

Se comienza esta sección demostrando cómo utilizar MATLAB para ayudar en el análisis de un típico modelo matemático de un sistema mecánico formado por un resorte-masa-amortiguador. Utilizando un programa escrito en MATLAB, se desarrollará una capacidad de análisis interactivo para estudiar los efectos de la frecuencia natural y el amortiguamiento sobre la respuesta no forzada del desplazamiento de la masa. Este análisis utilizará el hecho de que se dispone de una solución analítica que describe la respuesta temporal no forzada del desplazamiento de la masa.

Posteriormente, se presentarán las funciones de transferencias y los diagramas de bloques. En particular, el interés se centra en cómo MATLAB puede servir de ayuda para manipular polinomios, calcular funciones de transferencia en lazo cerrado, obtener reducciones de los diagramas de bloques y calcular la respuesta de un sistema a un escalón de entrada unitario. La sección concluye con el diseño del control del motor de tracción eléctrico del Ejemplo 2.12.

Las funciones incluidas en esta sección son: roots, poly, conv, polyval, tf, pzmap, pole, zero, series, parallel, feedback, minreal y step.

Sistema resorte-masa-amortiguador. En la Figura 2.2 se muestra un sistema mecánico resorte-masa-amortiguador. El movimiento de la masa, denotado por $y(t)$, se describe por la ecuación diferencial

$$M\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = r(t).$$

La respuesta dinámica no forzada, $y(t)$, del sistema mecánico resorte-masa-amortiguador es

$$y(t) = \frac{y(0)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t + \theta),$$

donde $\theta = \cos^{-1}\zeta$. El desplazamiento inicial es $y(0)$. La respuesta transitoria del sistema es **subamortiguada** cuando $\zeta < 1$, **sobreamortiguada** cuando $\zeta > 1$ y **críticamente amortiguada** cuando $\zeta = 1$. Se puede utilizar MATLAB para visualizar la respuesta temporal no forzada del desplazamiento de la masa a partir de un desplazamiento inicial $y(0)$. Sea el caso subamortiguado

- $y(0) = 0.15\ m$, $\omega_n = \sqrt{2}\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\zeta_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{k}{M} = 2, \frac{b}{M} = 1\right)$

En la Figura 2.41 se muestran las órdenes de MATLAB para generar la gráficas de la respuesta no forzada. En la preparación de MATLAB, las variables $y(0)$, ω_n, t y ζ son entradas al espacio de trabajo al nivel de órdenes. A continuación se ejecuta el programa noforzado.m para generar las gráficas deseadas. Esto crea una capacidad de análisis interactivo para estudiar los efectos de la frecuencia natural y el amortiguamiento sobre

† *Véase* el Apéndice A para una introducción a MATLAB.

```
>>y0=0.15;
>>wn=sqrt(2);
>>zeta=1/(2*sqrt(2));
>>t=[0:0.1:10];
>>unforced
```

unforced.m

```
%Calcular la respuesta no forzada a una condición inicial
%
c=(y0/sqrt(1-zeta^2));
y=c*exp(-zeta*wn*t).*sin(wn*sqrt(1-zeta^2)*t+acos(zeta));
%
bu=c*exp(-zeta*wn*t);bl=-bu;
%
plot(t,y,t,bu,'--',t,bl,'--'), grid
xlabel('Time (sec)'), ylabel('y(t) (meters)')
legend(['\omega_n=',num2str(wn),'   \zeta=',num2str(zeta)])
```

FIGURA 2.41
Programa para analizar el resorte-masa-amortiguador.

la respuesta no forzada del desplazamiento de la masa. Se pueden investigar los efectos de la frecuencia natural y del amortiguamiento sobre la respuesta temporal simplemente introduciendo los nuevos valores de ω_n y ζ en la línea de órdenes de MATLAB y ejecutando el programa noforzado.m otra vez. En la Figura 2.42 se muestra la gráfica de la respuesta temporal. Obsérvese que el programa automáticamente etiqueta la gráfica con los valores del coeficiente de amortiguamiento y de la frecuencia natural. Esto evita confusión cuando se hacen muchas simulaciones interactivas. La utilización de programas es un aspecto importante del desarrollo de una capacidad de análisis y diseño interactivo efectiva en MATLAB.

Para el problema resorte-masa-amortiguador, la solución no forzada de la ecuación diferencial está disponible de forma inmediata. En general, cuando se simula un sistema de control con realimentación sujeto a una variedad de entradas y condiciones iniciales, es difícil obtener la solución analíticamente. En estos casos, se puede utilizar MATLAB para calcular las soluciones numéricamente y visualizar la solución de forma gráfica.

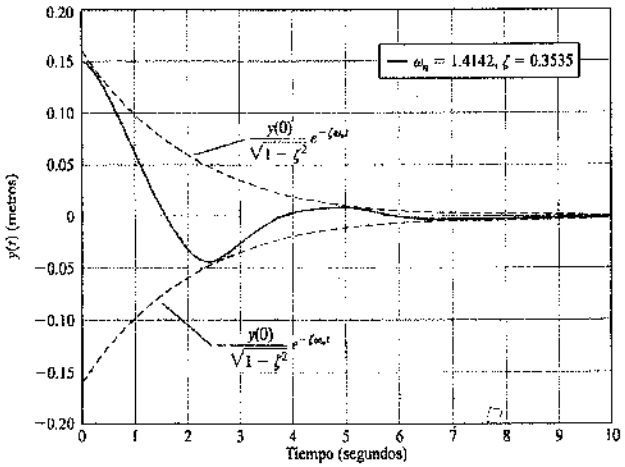


FIGURA 2.42
Respuesta no forzada del resorte-masa-amortiguador.


```
>>p=[1 3 0 4];
>>r=roots(p)
r =
 -3.3553
  0.1777+ 1.0773i
  0.1777- 1.0773i
>>p=poly(r)
p =
  1.0000    3.0000    0.0000    4.0000
```

FIGURA 2.43
Introducción del polinomio $p(s) = s^3 + 3s^2 + 4$ y cálculo de sus raíces.

MATLAB se puede utilizar para analizar sistemas descritos por funciones de transferencia. Como la función de transferencia es una razón de polinomios, se comienza por investigar cómo MATLAB maneja polinomios, recordando que con funciones de transferencia ese trabajo significa que ambos polinomios del numerador y del denominador deben especificarse.

En MATLAB, los polinomios se representan por vectores filas que contienen los coeficientes del polinomio en orden descendente. Por ejemplo, el polinomio

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + 4$$

se introduce tal como se muestra en la Figura 2.43. Obsérvese que incluso aunque el coeficiente del término en s es cero, se incluye en la definición de la entrada de $p(s)$.

Si p es un vector fila que contiene los coeficientes de $p(s)$ en orden descendente, entonces roots(p) es un vector columna que contiene las raíces del polinomio. Inversamente, si r es un vector columna que contiene las raíces del polinomio, entonces poly(r) es un vector fila con los coeficientes del polinomio en orden descendente. En la Figura 2.43 se muestra cómo pueden calcularse las raíces del polinomio $p(s) = s^3 + 3s^2 + 4$ con la función roots. En esta figura, se muestra como recomponer el polinomio con la función poly.

La multiplicación de polinomios se lleva a cabo con la función conv. Supóngase que se desea expandir el polinomio

$$n(s) = (3s^2 + 2s + 1)(s + 4)$$

En la Figura 2.44 se muestran las órdenes de MATLAB asociadas con la utilización de la función conv. Así el polinomio expandido es

$$n(s) = 3s^2 + 14s^2 + 9s + 4.$$

```
>>p=[3 2 1]; q=[1 4];
>>n=conv(p,q)
n=
   3   14    9    4
>>value=polyval(n,-5)
value =
   -66
```

FIGURA 2.44
Utilización de conv y polyval para multiplicar y evaluar los polinomios $(3s^2 + 2s + 1)(s + 4)$.

La función polyval se utiliza para evaluar el valor de un polinomio en el valor dado de la variable. El polinomio $n(s)$ tiene el valor $n(-5) = -66$, tal como se muestra en la Figura 2.44.

MATLAB trata a los modelos lineales invariantes en el tiempo como *objetos*, permitiéndole manipular los modelos del sistema como entidades únicas. En el caso de las funciones de transferencias, crea los modelos del sistema utilizando la función tf; para modelos en variables de estado se emplea la función ss (*véase* el Capítulo 3). El uso de tf se ilustra en la Figura 2.45(a). Basándose en las capacidades de *programación orientada a objetos* de MATLAB, los objetos modelos de sistemas poseen *propiedades de objeto* que se pueden modificar; de igual forma las funciones que operan sobre objetos del tipo modelo de sistema se llaman *métodos*. Por ejemplo, si dispone de los dos modelos de sistemas

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 5} \quad \text{y} \quad G_2(s) = \frac{1}{s + 1},$$

puede sumarlos utilizando el operador «+» para obtener

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{s^2 + 12s + 15}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}.$$

En la Figura 2.45(b) se muestran las correspondientes órdenes de MATLAB, donde sys1 representa $G_1(s)$ y sys2 representa $G_2(s)$. El cálculo de los polos y ceros asociados con una función de transferencia se lleva a cabo operando sobre el objeto modelo del sistema con las funciones pole y zero, respectivamente, tal como se muestra en la Figura 2.46.

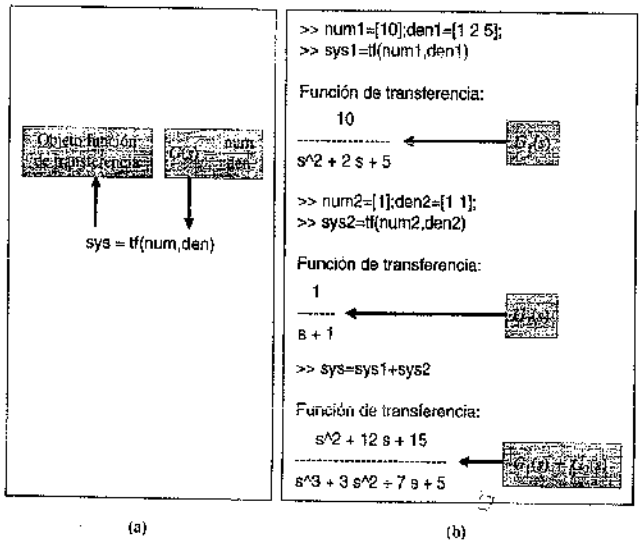


FIGURA 2.45
(a) La función **tf**.
(b) Utilización de la función **tf** para crear objetos del tipo función de transferencia y sumarlos utilizando el operador «+».

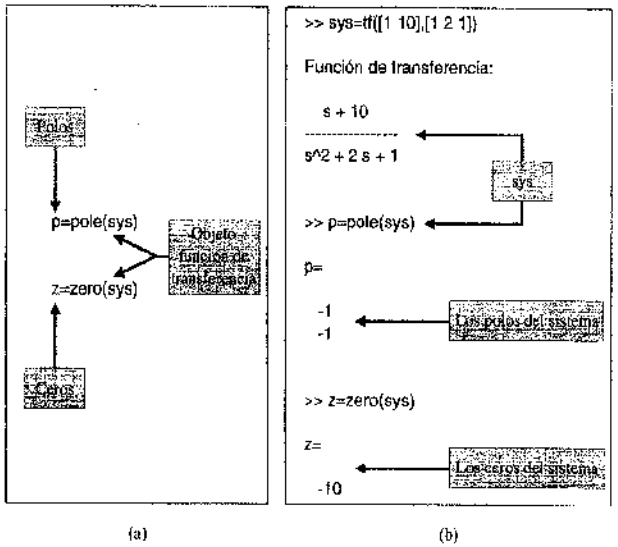


FIGURA 2.46
(a) Las funciones **pole** y **zero**.
(b) Utilización de las funciones pole y zero para calcular la localización de los polos y ceros de un sistema lineal.

En el capítulo siguiente, se obtendrá una gráfica de la localización de los polos y ceros en el plano complejo. Esto se hace utilizando la función pzmap, tal como se indica en la Figura 2.47. En el mapa de polos-ceros, los ceros se denotan por un «o» y los polos por un «×». Si se llama a la función pzmap sin ningún argumento en el lado izquierdo, se genera automáticamente la gráfica.

EJEMPLO 2.16. Funciones de transferencia

Sean las funciones de transferencias

$$G(s) = \frac{6s^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \quad \text{y} \quad H(s) = \frac{(s + 1)(s + 2)}{(s + 2i)(s - 2i)(s + 3)}.$$

Utilizando un programa de MATLAB se pueden calcular los polos y ceros de $G(s)$, la ecuación característica de $H(s)$ y dividir $G(s)$ por $H(s)$. Se puede también obtener una gráfica del mapa de polos-ceros de $G(s)/H(s)$ en el plano complejo.

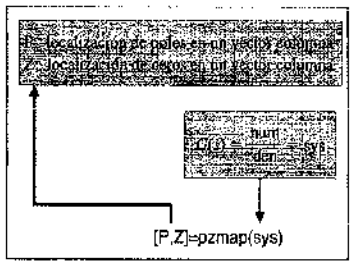


FIGURA 2.47
La función **pzmap**.

En la Figura 2.48 se muestra el mapa de polos-ceros de la función de transferencia $G(s)/H(s)$ y en la Figura 2.49 las órdenes de MATLAB asociadas. El mapa de polos-ceros muestra claramente las cinco localizaciones de los ceros pero parece que sólo hay dos polos. Esto no puede ser así porque, como se sabe, el número de polos debe ser mayor o igual que el número de ceros. Utilizando la función roots, se puede asegurar

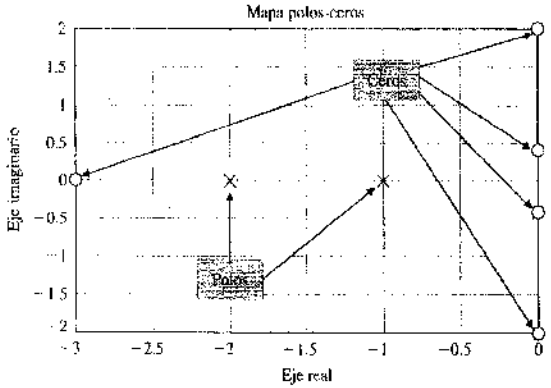


FIGURA 2.48
Mapa de polos y ceros de $G(s)/H(s)$.

```
>>numg=[6 0 1]; deng=[1 3 3 1];sysg=tf(numg,deng);
>>z=zero(sysg)

z =
   0 + 0.4082i
   0 - 0.4082i

>>p=pole(sysg)

p =
  -1.0000
  -1.0000 + 0.0000i
  -1.0000 - 0.0000i

>>n1=[1 1]; n2=[1 2]; d1=[1 2*i]; d2=[1 -2*i]; d3=[1 3];
>>numh=conv(n1,n2); denh=conv(d1,conv(d2,d3));
>>sysh=tf(numh,denh)

Función de transferencia:

  s^2 + 3 s + 2
-----------------
s^3 + 3 s^2 + 4 s + 12

>>sys=sysg/sysh

Función de transferencia:

6 s^5 + 18 s^4 + 25 s^3 + 75 s^2 + 4 s + 12
-------------------------------------------
s^6 + 6 s^4 + 14 s^3 + 16 s^2 + 9 s + 2

>>pzmap(sys)
```

FIGURA 2.49
Ejemplo de función de transferencia para $G(s)$ y $H(s)$.

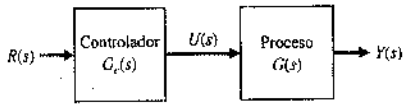


FIGURA 2.50
Sistema de control en lazo abierto (sin realimentación).

que hay de hecho cuatro polos en $s = -1$. Por tanto, los polos o ceros múltiples en la misma posición no pueden discernirse en el mapa de polos-ceros. ■

Modelos de diagramas de bloques. Supóngase que se han desarrollado modelos matemáticos en la forma de funciones de transferencia para la planta, representada por $G(s)$, y el controlador representado por $G_c(s)$, y posiblemente muchos otros componentes del sistema tales como sensores y actuadores. El objetivo es interconectar estos componentes para formar un sistema de control. Se utilizarán las funciones de MATLAB para efectuar las transformaciones del diagrama de bloques.

Un sencillo sistema de control en lazo abierto se puede obtener interconectando una planta y un controlador en serie tal como se ilustra en la Figura 2.50. Se puede emplear MATLAB para calcular la función de transferencia de $R(s)$ a $Y(s)$, tal como sigue.

EJEMPLO 2.17. Conexión serie

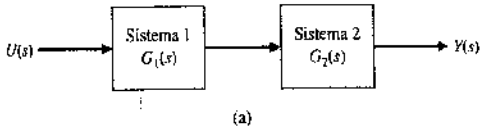
Sea el proceso $G(s)$ representado por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{500s^2},$$

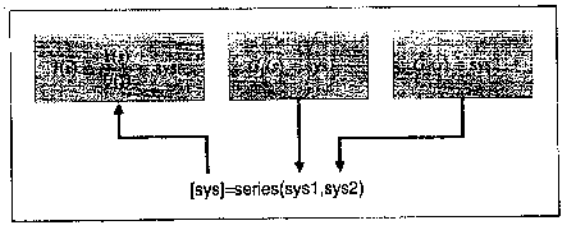
y el controlador $G_c(s)$ representado por la función de transferencia

$$G_c(s) = \frac{s+1}{s+2}.$$

Se puede emplear la función series para poner en cascada dos funciones de transferencia $G_1(s)$ y $G_2(s)$, tal como se muestra en la Figura 2.51.

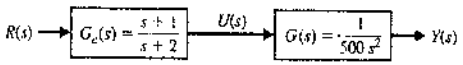


(a)



(b)

FIGURA 2.51
(a) Diagrama de bloques. (b) La función series.



(a)

```
>>numg=[1]; deng=[500 0 0]; sysg=tf(numg,deng);
>>numh=[1 1]; denh=[1 2]; sysh=tf(numh,denh);
>>sys=series(sysg,sysh);
>>sys
```

Función de transferencia:

$$\frac{s+1}{500\,s^3 + 1000\,s^2}$$

(b)

FIGURA 2.52 Aplicación de la función series.

La función de transferencia $G_c(s)G(s)$ se calcula utilizando la función series tal como se muestra en la Figura 2.52. La función de transferencia resultante es

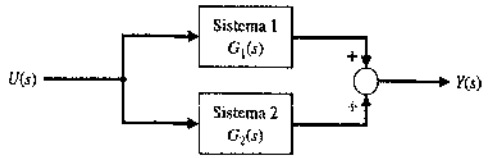
$$G_c(s)G(s) = \frac{s+1}{500s^3 + 1000s^2} = \text{sys},$$

donde sys es el nombre de la función de transferencia en el programa en MATLAB. ■

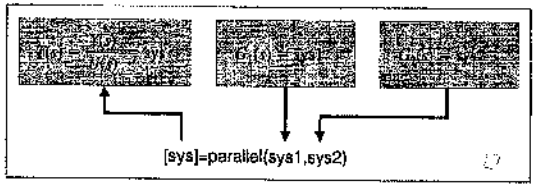
Los diagramas de bloques con frecuencia tienen funciones de transferencia en paralelo. En tales casos, la función parallel puede resultar bastante útil. En la Figura 2.53 se describe la función parallel.

Se puede introducir una **señal de realimentación** en el sistema de control cerrando el lazo con **realimentación unitaria**, tal como se muestra en la Figura 2.54. La señal $E_a(s)$ es una **señal de error**; la señal $R(s)$ es una **entrada de referencia**. En este sistema de control, el controlador está en la trayectoria directa y la función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 \mp G_c(s)G(s)}.$$



(a)



(b)

FIGURA 2.53 (a) Diagrama de bloques. (b) La función **parallel**.

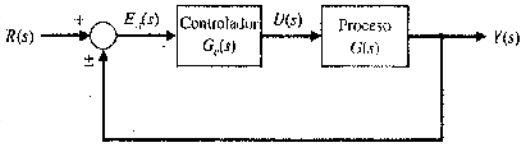
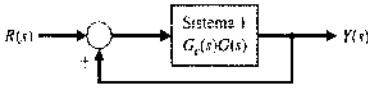


FIGURA 2.54 Un sistema de control básico con realimentación unitaria.

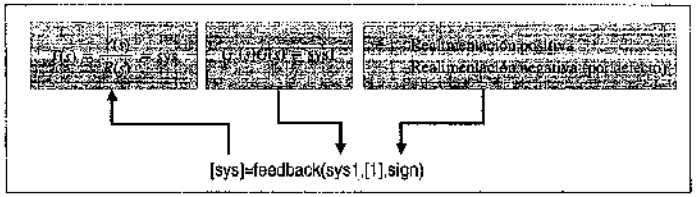
Se puede utilizar la función feedback con el fin de ayudar en el proceso de reducción del diagrama de bloques para calcular la función de transferencia en lazo cerrado para sistemas de control de lazo simple y de múltiples lazos.

Como se ilustra en la Figura 2.54, con frecuencia sucede que el sistema de control en lazo cerrado tiene realimentación unitaria. Se puede emplear la función feedback para calcular la función de transferencia en lazo cerrado haciendo $H(s) = 1$. En la Figura 2.55 se representa la utilización de la función feedback para realimentación unitaria.

En la Figura 2.56 se muestra la función feedback con la configuración del sistema asociado que incluye a $H(s)$ en el camino de realimentación. Si se omite la entrada «signo», se supone que la realimentación es negativa.

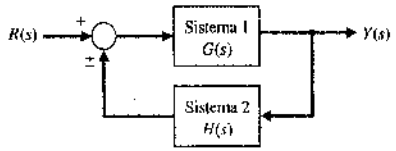


(a)

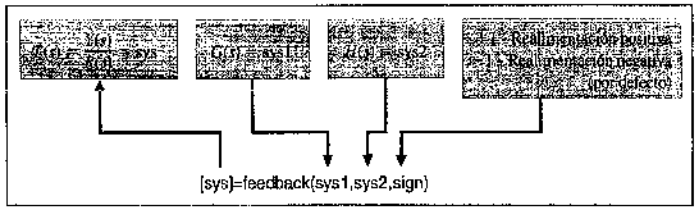


(b)

FIGURA 2.55 (a) Diagrama de bloques. (b) La función **feedback** con realimentación unitaria.

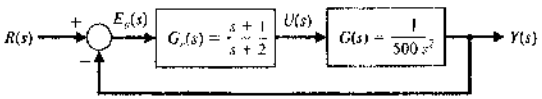


(a)



(b)

FIGURA 2.56 (a) Diagrama de bloques. (b) La función **feedback**.



(a)

```
>>numg=[1]; deng=[500 0 0]; sys1=tf(numg,deng);
>>numc=[1 1]; denc=[1 2]; sys2=tf(numc,denc);
>>sys3=series(sys1,sys2);
>>sys=feedback(sys3,[1])

Función de transferencia:
                s + 1
  ---------------------------------
  500 s^3 + 1000 s^2 + s + 1
```

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

(b)

FIGURA 2.57
(a) Diagrama de bloques.
(b) Aplicación de la función **feedback**.

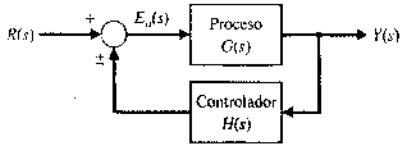


FIGURA 2.58
Un sistema de control básico con el controlador en el lazo de realimentación.

EJEMPLO 2.18. La función feedback con realimentación unitaria

Sea el proceso $G(s)$ y el controlador $G_c(s)$ tal como se muestra en la Figura 2.57(a). Para aplicar la función feedback, se utiliza primero la función series para calcular $G_c(s)G(s)$, seguida por la función feedback para cerrar el lazo. En la Figura 2.57(b) se muestra la secuencia de órdenes. La función de transferencia en lazo cerrado, tal como se muestra en la Figura 2.57(b), es

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{s+1}{500s^3 + 1000s^2 + s + 1} = \text{sys.} \qquad \blacksquare$$

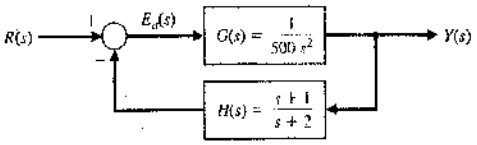
En la Figura 2.58 se muestra otra configuración de control con realimentación básica. En este caso, el controlador se localiza en el camino de realimentación. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}.$$

EJEMPLO 2.19. La función feedback

Sea el proceso $G(s)$ y el controlador $H(s)$ tal como se muestra en la Figura 2.59(a). Para calcular la función de transferencia en lazo cerrado con el controlador en el lazo de realimentación, se utiliza la función feedback. En la Figura 2.59(b) se muestra la secuencia de órdenes. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{s+2}{500s^3 + 1000s^2 + s + 1} = \text{sys.} \qquad \blacksquare$$



(a)

```
>>numg=[1]; deng=[500 0 0]; sys1=tf(numg,deng);
>>numh=[1 1]; denh=[1 2]; sys2=tf(numh,denh)
>>sys=feedback(sys1,sys2);
>>sys

Función de transferencia:
                s + 2
  ---------------------------------
  500 s^3 + 1000 s^2 + s + 1
```

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

(b)

FIGURA 2.59
Aplicación de la función **feedback**.
(a) Diagrama de bloques.
(b) Programa en MATLAB.

Las funciones de MATLAB series, parallel y feedback se pueden usar como ayudas en las manipulaciones de los diagramas de bloques para el caso de lazos múltiples.

EJEMPLO 2.20. Reducción multilazo

En la Figura 2.26 se muestra un sistema de realimentación multilazo. El objetivo es calcular la función de transferencia en lazo cerrado

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

cuando

$$G_1(s) = \frac{1}{s+10}, \qquad G_2(s) = \frac{1}{s+1},$$

$$G_3(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4s+4}, \qquad G_4(s) = \frac{s+1}{s+6},$$

y

$$H_1(s) = \frac{s+1}{s+2}, \qquad H_2(s) = 2, \quad \text{y} \quad H_3(s) = 1.$$

Para este ejemplo, se sigue un procedimiento de cinco pasos:

- Paso 1. Entrar la función de transferencia en MATLAB.
- Paso 2. Mover H_2 por detrás de G_4.
- Paso 3. Eliminar el lazo $G_3G_4H_1$.
- Paso 4. Eliminar el lazo que contiene H_2.
- Paso 5. Eliminar el lazo restante y calcular $T(s)$.

```
>>ng1=[1]; dg1=[1 10]; sysg1=tf(ng1,dg1);
>>ng2=[1]; dg2=[1 1]; sysg2=tf(ng2,dg2);
>>ng3=[1 0 1]; dg3=[1 4 4]; sysg3=tf(ng3,dg3);
>>ng4=[1 1]; dg4=[1 6]; sysg4=tf(ng4,dg4);          Paso 1
>>nh1=[1 1]; dh1=[1 2]; sysh1=tf(nh1,dh1);
>>nh2=[2]; dh2=[1]; sysh2=tf(nh2,dh2);
>>nh3=[1]; dh3=[1]; sysh3=tf(nh3,dh3);
>>sys1=sysh2/sysg4;                                 Paso 2
>>sys2=series(sysg3,sysg4);
>>sys3=feedback(sys2,sysh1,+1);                     Paso 3
>>sys4=series(sysg2,sys3);
>>sys5=feedback(sys4,sys1);                         Paso 4
>>sys6=series(sysg1,sys5);
>>sys=feedback(sys6,[1]);                           Paso 5
Función de transferencia:
          s^5 + 4 s^4 + 6 s^3 + 6 s^2 + 5 s + 2
-------------------------------------------------------------
12 s^6 + 205 s^5 + 1066 s^4 + 2517 s^3 + 3128 s^2 + 2196 s + 712
```

FIGURA 2.60
Reducción de bloques de lazo múltiple.

Los cinco pasos se utilizan en la Figura 2.60 y la correspondiente reducción del diagrama de bloques se muestra en la Figura 2.27. El resultado de ejecutar las órdenes de MATLAB es

$$\text{sys} = \frac{s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 6s^2 + 6s^2 + 5s + 2}{12s^6 + 205s^5 + 1066s^4 + 2517s^3 + 3128s^2 + 2196s + 712}$$

Se debe ser cuidadoso en llamar a esto la función de transferencia en lazo cerrado. La función de transferencia se define como la relación entrada-salida después de las cancelaciones polo-cero. Si se calculan los polos y ceros de $T(s)$, se observa que los polinomios del numerador y del denominador tienen a $(s + 1)$ como factor común. Esto debe cancelarse antes de que se pueda decir que se tiene la función de transferencia en lazo cerrado. Para ayudar en la cancelación polo-cero, se utilizará la función minreal. La función minreal, mostrada en la Figura 2.61, quita los factores polo-cero que son comunes en una función de transferencia. El paso final en el proceso de reducción del bloque es cancelar los factores comunes tal como se muestra en la Figura 2.62. Después de la aplicación de la función minreal, se observa que el orden del polinomio del denominador ha sido reducido de seis a cinco, lo que implica una cancelación polo-cero. ■

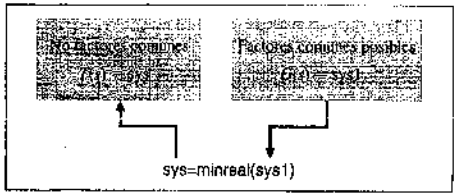


FIGURA 2.61
La función minreal.

```
>>num=[1 4 6 6 5 2]; den=[12 205 1066 2517 3128 2196 712];
>>sys1=tf(num,den);
>>sys=minreal(sys1);          Cancelar factores comunes.
Función de transferencia:
          0.08333 s^4 + 0.25 s^3 + 0.25 s^2 + 0.25 s + 0.1667
-------------------------------------------------------------
s^5 + 16.08 s^4 + 72.75 s^3 + 137 s^2 + 123.7 s + 59.33
```

FIGURA 2.62
Aplicación de la función minreal.

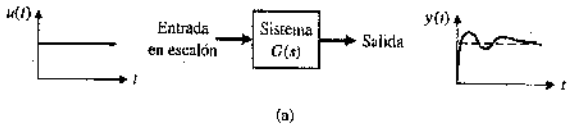

```
>>num1=[10]; den1=[1 1]; sys1=tf(num1,den1);
>>num2=[1]; den2=[2 0.5]; sys2=tf(num2,den2);
>>num3=[540]; den3=[1]; sys3=tf(num3,den3);
>>num4=[0.1]; den4=[1]; sys4=tf(num4,den4);
>>sys5=series(sys1,sys2);          Eliminar lazo interior
>>sys6=feedback(sys5,sys4)
>>sys7=series(sys3,sys6);
>>sys=feedback(sys7,[1])          Calcular función de transferencia en lazo cerrado
Función de transferencia:
          5400
-------------------------
2 s^2 + 2.5 s + 5402
```

FIGURA 2.63
Reducción de bloques del motor de tracción eléctrica.

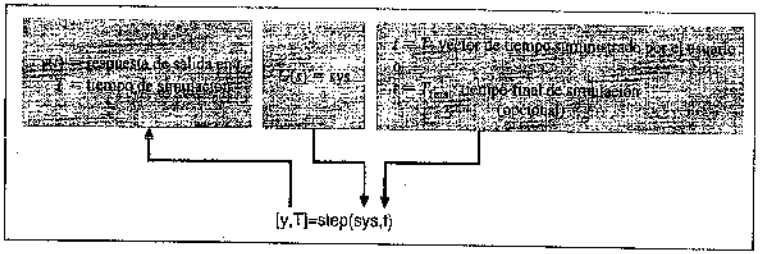
EJEMPLO 2.21. Control del motor de tracción eléctrico

Finalmente, se reconsidera el sistema del motor de tracción eléctrico del Ejemplo 2.12. En la Figura 2.35(b) se muestra el diagrama de bloques. El objetivo es calcular la función de transferencia en lazo cerrado e investigar la respuesta de $\omega(s)$ a una entrada $\omega_d(s)$. El primer paso, tal como se muestra en la Figura 2.63, es calcular la función de transferencia en lazo cerrado $\omega(s)/\omega_d(s) = T(s)$. La ecuación característica en lazo cerrado es de segundo orden con $\omega_n(s) = 52$ y $\zeta = 0.012$. Como el amortiguamiento es bajo, es de esperar que la respuesta sea fuertemente oscilatoria. Se puede investigar la respuesta $\omega(t)$ a una entrada de referencia $\omega_d(t)$ utilizando la función step. La función step, que se muestra en la Figura 2.64, calcula la respuesta a un escalón unitario de un sistema lineal. La función step es muy importante, puesto que las especificaciones de comportamiento del sistema de control se suelen dar con frecuencia en función de la respuesta a un escalón unitario.

Si el objetivo solamente es dibujar la salida $y(t)$, se puede utilizar la función step sin los argumentos del lado izquierdo y obtener así de forma automática la gráfica con

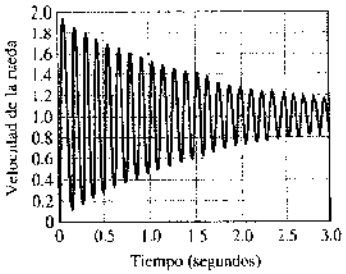


(a)


y(t) = respuesta de salida en el tiempo
t = tiempo de simulación
G(s) = sys
t = T_final = tiempo final de simulación (opcional)
[y,T]=step(sys,t)

(b)

FIGURA 2.64
La función step.



(a)

rmresp.m

```
% Este programa calcula la respuesta
% a un escalón de la velocidad de la
% rueda del motor de tracción
%
num=[5400]; den=[2 2.5 5402]; sys=tf(num,den);
t=[0:0.005:3];
[y,t]=step(sys,t);
plot(t,y),grid
xlabel('Time (seconds)')
ylabel('Wheel velocity')
```

(b)

FIGURA 2.65
(a) Respuesta a un escalón de velocidad de la rueda del motor de tracción. (b) Programa en MATLAB.

etiquetas en los ejes. Si se necesita $y(t)$ con cualquier otra finalidad distinta a su representación, se debe emplear la función step con argumentos en el lado izquierdo, seguida por la función plot para dibujar $y(t)$. Se define t como un vector fila que contiene los instantes de tiempo en los que se desea el valor de la variable de salida $y(t)$. Se puede también seleccionar $t = t_{final}$ que da lugar a una respuesta escalón desde $t = 0$ hasta $t = t_{final}$ y el número de puntos intermedios se escogen por MATLAB.

En la Figura 2.65 se muestra la respuesta a un escalón del motor de tracción eléctrico. Como cabía esperar, la respuesta de la velocidad de la rueda dada por $y(t)$ es altamente oscilatoria. Obsérvese que la salida es $y(t) \equiv \omega(t)$. ■

2.11. EJEMPLO DE DISEÑO SECUENCIAL: SISTEMA DE LECTURA DE UNA UNIDAD DE DISCO

En la Sección 1.13 se desarrolló un objetivo inicial para la unidad de disco: posicionar la cabeza de lectura de forma precisa en la pista deseada y moverse de una pista a otra dentro de 10 ms si ello es posible. En este capítulo se completarán los pasos 4 y 5 del proceso de diseño (Figura 1.22). Se necesita identificar el actuador, el sensor y el controlador (paso 4). A continuación se obtendrá un modelo de la planta $G(s)$ y del sensor. La lectora de la unidad de disco usa un motor cc de imán permanente para girar el brazo de lectura (*véase* la Figura 1.28). El motor de cc se llama un motor de bobina de voz en la industria de unidades de disco. La cabeza de lectura se monta sobre un dispositivo deslizante que se conecta al brazo tal como se muestra en la Figura 2.66. Se emplea un flexor

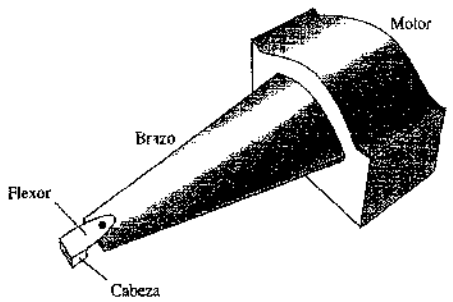


FIGURA 2.66
Soporte de la cabeza de lectura que muestra un flexor.

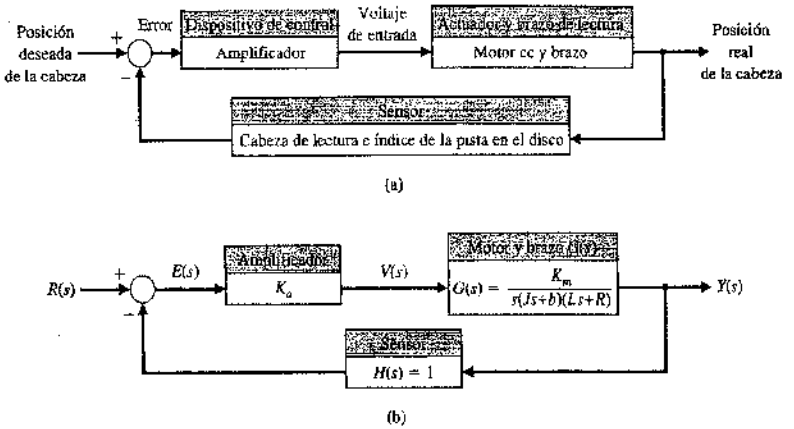


FIGURA 2.67
Diagrama de bloques del sistema de lectura de la unidad de disco.

de menos de 100 nm. La cabeza de película delgada lee el flujo magnético y proporciona una señal a un amplificador. La señal de error de la Figura 2.67(a) se proporciona al leer (resorte de metal) para permitir a la cabeza flotar por encima del disco con una separación el error de una pista de índice pregrabado. Suponiendo una cabeza de lectura precisa el sensor tiene una función de transferencia $H(s) = 1$, tal como se muestra en la Figura 2.67(b). En la Figura 2.67(b) se muestra el modelo del motor de cc de imán permanente y un amplificador lineal. Como una buena aproximación se utiliza el modelo del motor cc controlado por inducido tal como se mostró anteriormente en la Figura 2.20 con $K_b = 0$. El modelo que se muestra en la Figura 2.67(b) supone que el flexor es enteramente rígido y no flexa de forma significativa. En el Capítulo 4 se considerará el modelo cuando no se puede asumir que la flexión sea completamente rígida.

En la Tabla 2.9 se dan parámetros típicos para el sistema de la unidad de disco. Así se tiene

$$G(s) = \frac{K_m}{s(Js + b)(Ls + R)}$$

$$= \frac{5000}{s(s + 20)(s + 1000)}. \tag{2.117}$$

Tabla 2.9 Parámetros típicos de una lectora de unidad de disco

Parámetro	Símbolo	Valor típico
Inercia del brazo y cabeza de lectura	J	1 N·m·s²/rad
Fricción	b	20 kg/m/s
Amplificador	K_a	10-1000
Constante de la fuerza contraelectromotriz	R	1 Ω
Resistencia del motor	K_m	5 N·m/A
Inductancia del motor	L	1 mH

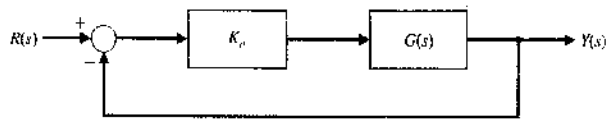


FIGURA 2.68
Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado.

Se puede también escribir

$$G(s) = \frac{K_m/bR}{s(\tau_L s + 1)(\tau s + 1)}, \tag{2.118}$$

donde $\tau_L = J/b = 50$ ms y $\tau = L/R = 1$ ms. Como $\tau \ll \tau_L$ a menudo se desprecia τ. Se tendría entonces

$$G(s) \approx \frac{K_m/bR}{s(\tau_L s + 1)} = \frac{0.25}{s(0.05s + 1)},$$

o

$$G(s) = \frac{5}{s(s + 20)}.$$

En la Figura 2.68 se muestra el diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado. Utilizando la transformación del diagrama de bloques de la Tabla 2.6 se tiene

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G(s)}{1 + K_a G(s)}, \tag{2.119}$$

Utilizando el modelo de segundo orden aproximado para $G(s)$ se obtiene

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5K_a}{s^2 + 20s + 5K_a}.$$

Cuando $K_a = 40$, se tiene

$$Y(s) = \frac{200}{s^2 + 20s + 200} R(s).$$

Utilizando la función step de MATLAB, se obtiene la respuesta a un escalón para $R(s) = 0.1/s$ rad, tal como se muestra en la Figura 2.69.

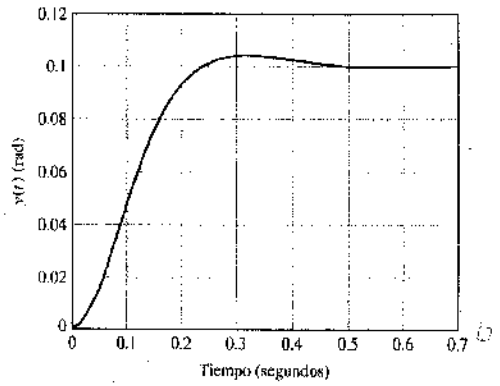


FIGURA 2.69
Respuesta del sistema que se muestra en la Figura 2.68 para $R(s) = 0.1/s$.

2.12. RESUMEN

En este capítulo se han considerado modelos matemáticos cuantitativos de componentes y sistemas de control. Las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del sistema físico se utilizaron para construir un modelo matemático. Los sistemas físicos considerados incluían sistemas mecánicos, eléctricos, de fluidos y termodinámicos. Se utilizó una aproximación lineal usando un desarrollo en serie de Taylor respecto del punto de operación, para obtener una aproximación lineal de pequeña señal para componentes de control no lineales. Entonces, con la aproximación de un sistema lineal, se puede emplear la transformación de Laplace y su relación de entrada-salida asociada dada por la función de transferencia. El método de la función de transferencia para sistemas lineales permite al analista determinar la respuesta del sistema a diferentes señales de entrada en términos de la localización de los polos y ceros de la función de transferencia. Empleando las notaciones de la función de transferencia, se desarrollaron los modelos de los diagramas de bloques para los sistemas de componentes interconectados y se obtuvieron las funciones de los bloques. Además, se investigó un uso alternativo de los modelos de la función de transferencia en grafos de flujo de señal. Se encontró que el grafo de flujo de señal de la fórmula de ganancia es útil para obtener la relación entre las variables del sistema en un sistema complejo con realimentación. La ventaja del método del grafo de flujo de señal fue la obtención de la fórmula de Mason para la ganancia del grafo de flujo, que proporciona la relación entre las variables del sistema sin requerir ninguna reducción o manejo de grafos de flujo. Por tanto, en el Capítulo 2 se ha obtenido un modelo matemático útil para sistemas de control con realimentación desarrollando el concepto de función de transferencia para un sistema lineal y la relación entre las variables del sistema usando el diagrama de bloques y los modelos de grafos de flujo de señal. Finalmente, se consideró la utilidad de la simulación por computador para sistemas lineales y no lineales, con el objeto de determinar la respuesta de un sistema para diferentes condiciones de sus parámetros y el entorno. Finalmente se continuó el desarrollo del Sistema de Lectura de una Unidad de Disco obteniendo un modelo en forma de función de transferencia del motor y del brazo.

EJERCICIOS

(Los ejercicios son aplicaciones directas de los conceptos del capítulo.)

E2.1. En la Figura E2.1 se muestra un sistema con realimentación negativa unitaria que tiene una función no lineal $y = f(e) = e^2$. Para una entrada r en el intervalo de cero a cuatro, calcúlense y represéntese gráficamente las salidas en lazos abierto y cerrado respecto de la entrada, y demuéstrese que el sistema con realimentación da como resultado una relación más lineal.

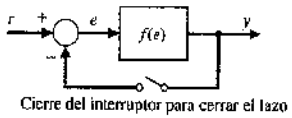


FIGURA E2.1. Lazo abierto y cerrado.

E2.2. Un termistor tiene una respuesta a la temperatura representada por:

$$R = R_0 e^{-0.1T},$$

donde $R_0 = 10\,000\ \Omega$, R = resistencia y T = temperatura en grados Celsius. Hállese el modelo lineal para el termistor operando a $T = 20\,^{\circ}\text{C}$ y para un pequeño rango de variación de la temperatura.

Respuesta: $\Delta R = -135\Delta T$

E2.3. En la Figura E2.3 se muestra la fuerza respecto del desplazamiento del resorte para el sistema resorte-masa-amortiguador de la Figura 2.1. Hállese gráficamente la constante del resorte para el punto de equilibrio $y = 0.5$ cm y un rango de operación de ± 1.5 cm.

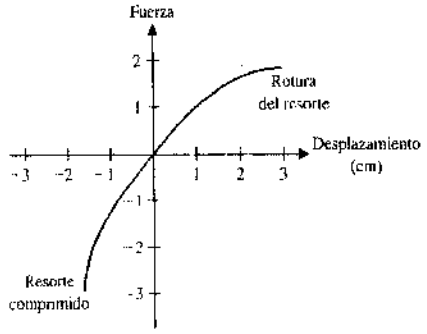


FIGURA E2.3. Conducta del resorte.

E2.4. Una impresora láser emplea un haz de láser para copiar con gran rapidez en un computador. El láser se posiciona mediante una entrada de control, $r(t)$, de manera que se tiene:

$$Y(s) = \frac{5(s + 100)}{s^2 + 60s + 500} R(s).$$

La entrada $r(t)$ representa la posición deseada del haz de láser.

(a) Si $r(t)$ es una entrada en escalón unitario, averígüese la salida $y(t)$. (b) ¿Cuál es el valor final de $y(t)$?

Respuesta: (a) $y(t) = 1 - 0.125e^{-50t} - 1.125e^{-10t}$, (b) $y_{ss} = 1$

E2.5. Un amplificador no inversor utiliza un amplificador no lineal tal como se muestra en la Figura E2.5. Supóngase un modelo de amplificador operacional y determínese v_0/v_{in}.

Respuesta: $\dfrac{v_0}{v_{in}} = \left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right)$.

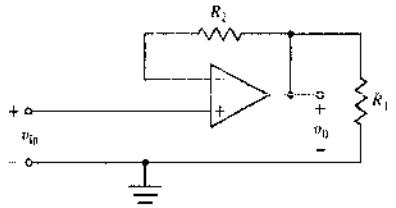


FIGURA E2.5. Un amplificador no inversor que utiliza un amplificador operacional.

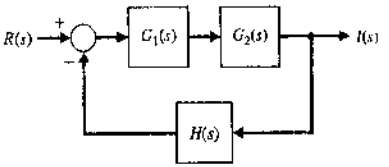
E2.6. Un dispositivo no lineal se representa con la función

$$y = f(x) = x^{1/2},$$

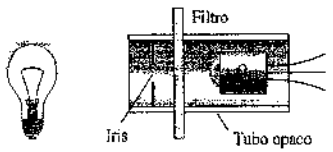
donde el punto de operación para la entrada x es $x_0 = 1/2$. Determínese la aproximación lineal en la forma de la Ecuación (2.9).

Respuesta: $\Delta y = \Delta x/\sqrt{2}$

E2.7. La intensidad de una lámpara permanece constante cuando se monitoriza mediante un lazo con realimentación controlado por un optotransistor. Cuando el voltaje disminuye, también lo hace la salida de la lámpara, y el optotransistor Q_1 necesita menos corriente. Esto provoca que el transistor de potencia conduzca con mayor dificultad y que el condensador se cargue más rápidamente [25]. El voltaje del condensador controla directamente el voltaje de la lámpara. En la Figura E2.7 se muestra un diagrama de bloques del sistema. Averígüese la función de transferencia en lazo cerrado $I(s)/R(s)$, donde $I(s)$ es la intensidad de la lámpara y $R(s)$ es el nivel de luz deseado.



(a)



(b)

FIGURA E2.7. Controlador de lámpara.

E2.8. N. Minorsky, ingeniero de control, diseñó en la década de 1930 un nuevo sistema de dirección para la Marina de Estados Unidos. El sistema está representado por el diagrama de bloques que se muestra en la Figura E2.8, donde $Y(s)$ es el rumbo del barco, $R(s)$ es el rumbo deseado y $A(s)$ es el ángulo del timón [17]. Averígüese la función de transferencia $Y(s)/R(s)$.

Respuesta: $\dfrac{Y(s)}{R(s)} =$

$$\frac{KG_1(s)G_2(s)/s}{1 + G_1(s)H_3(s) + G_1(s)G_2[H_1(s) + H_2(s)] + KG_1(s)G_2(s)/s}$$

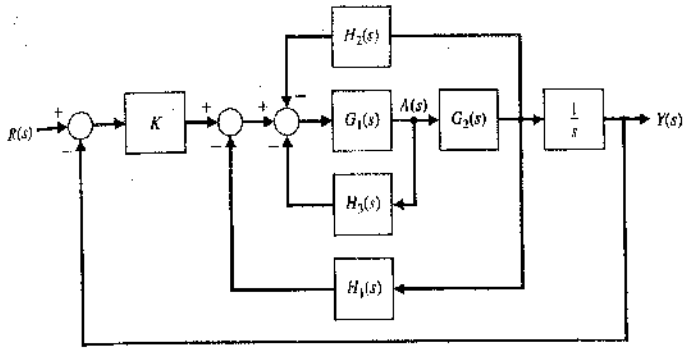


FIGURA E2.8. Sistema de dirección de un barco.

E2.9. Un sistema de frenos de un automóvil de cuatro ruedas independientes emplea realimentación electrónica para controlar automáticamente la fuerza de frenado en cada rueda [16]. En la Figura E2.9 se muestra un diagrama de bloques del modelo del sistema de control de frenos, donde $F_f(s)$ y $F_R(s)$ son la fuerza de frenado de las ruedas delanteras y de las traseras, respectivamente y $R(s)$ es la respuesta deseada del automóvil en un carretera cubierta con una capa de hielo. Determínese $F_f(s)/R(s)$.

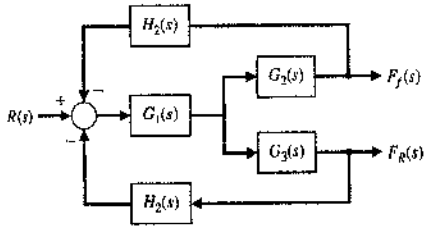


FIGURA E2.9. Sistema de control de frenos.

E2.10. Una de las aplicaciones potencialmente más beneficiosas de un sistema de control en un automóvil es el control activo del sistema de suspensión. Un sistema de control con realimentación utiliza un amortiguador que consiste en un cilindro relleno con un fluido compresible que proporciona ambas fuerzas elástica y de amortiguamiento [18]. El cilindro tiene un émbolo activado por un motor con engranaje reductor, un sensor de medida del desplazamiento y un pistón. La fuerza elástica se genera por el desplazamiento de un pistón que comprime al fluido. Durante el desplazamiento del pistón, el desequilibrio de presión a través del pistón se utiliza para amortiguar el control. El émbolo varía el volumen interno del cilindro. En la Figura E2.10 se muestra este sistema de control con realimentación. Desarróllese un modelo lineal para este dispositivo utilizando un modelo de diagrama de bloques.

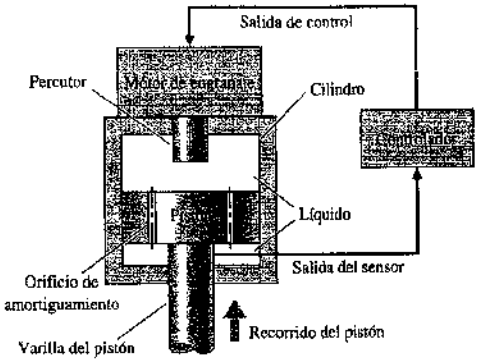


FIGURA E2.10. Amortiguador.

E2.11. Un resorte exhibe una característica fuerza-desplazamiento tal como se muestra en la Figura E2.11. Para pequeñas desviaciones del punto de operación, calcúlese la constante del resorte cuando x_0 es (a) -1.4; (b) 0; (c) 3.5.

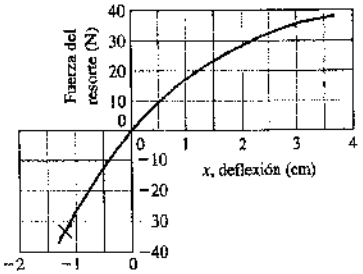


FIGURA E2.11. Característica del resorte.

E2.12. Un vehículo experimenta muchas entradas de perturbación cuando recorre una carretera bacheada. Un sistema de suspensión activa puede estar controlado por un sensor que mira «hacia delante» las condiciones de la carretera. En la Figura E2.12 se muestra un ejemplo de un sistema sencillo de suspensión que puede acomodar cambios bruscos. Encontrar la ganancia apropiada K_1 de forma que el vehículo no rebote cuando la deflexión deseada es $R(s) = 0$ y la perturbación es $D(s)$.

Respuesta: $K_1K_2 = 1$

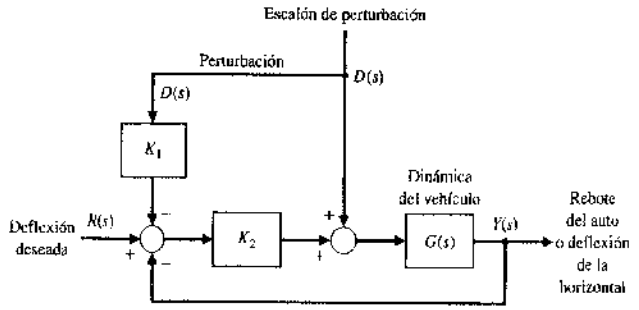


FIGURA E2.12
Sistema de suspensión activa.

E2.13. Encontrar la función de transferencia

$$\frac{Y_1(s)}{R_2(s)}$$

para el sistema multivariable de la Figura E2.13.

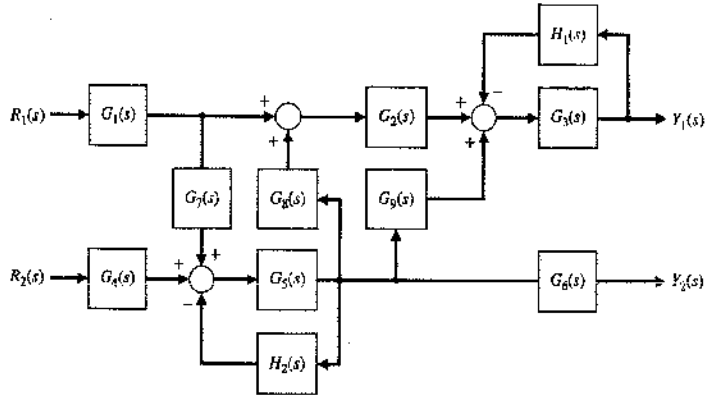


FIGURA E2.13
Sistema multivariable.

E2.14. Obténgase la ecuación diferencial en función de i_1 e i_2 para el circuito de la Figura E2.14.

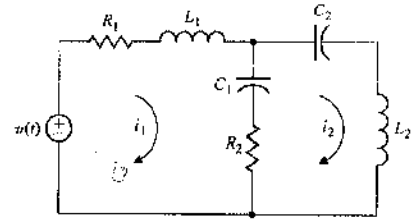


FIGURA E2.14
Circuito eléctrico.

E2.15. El sistema de control de posición de una plataforma espacial está gobernado por las ecuaciones siguientes:

$$\frac{d^2p}{dt^2} + 2\frac{dp}{dt} + 4p = \theta$$

$$v_1 = r - p$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.6v_2$$

$$v_2 = 7v_1$$

Las variables que están implicadas son:

$r(t)$ = posición deseada de la plataforma

$p(t)$ = posición real de la plataforma

$v_1(t)$ = voltaje de entrada del amplificador

$v_2(t)$ = voltaje de salida del amplificador

$\theta(t)$ = posición del eje del motor

Realícese un esquema en un diagrama de flujo de señal o en un diagrama de bloques del sistema, identificando las partes que lo componen y sus transmitancias; a continuación determínese la función de transferencia del sistema $P(s)/R(s)$.

E2.16. Un resorte utilizado en un amortiguador de un automóvil desarrolla una fuerza f, representada por la relación

$$f = kx^4,$$

donde x es el desplazamiento del resorte. Determínese un modelo lineal para el resorte cuando $x_0 = 1$.

E2.17. La salida y y la entrada x de un dispositivo están relacionadas por

$$y = x + 1.4x^3.$$

(a) Calcúlese los valores de la salida para operación en estado estacionario en los dos puntos de operación $x_0 = 1$ y $x_0 = 2$. (b) Obténgase un modelo linealizado para ambos puntos de operación y compararlos.

E2.18. La función de transferencia de un sistema es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10(s+2)}{s^2 + 8s + 15}.$$

Determínese $y(t)$ cuando $r(t)$ es una entrada en escalón unitario.

Respuesta: $y(t) = 1.33 + 1.67e^{-3t} - 3e^{-5t}$, $t \geq 0$

E2.19. Determínese la función de transferencia $V_0(s)/V(s)$ del circuito con amplificador operacional que se muestra en la Figura E2.19. Supóngase un amplificador operacional ideal. Determínese la función de transferencia cuando $R_1 = R_2 = 100$ kΩ, $C_1 = 10$ μF y $C_2 = 5$ μF.

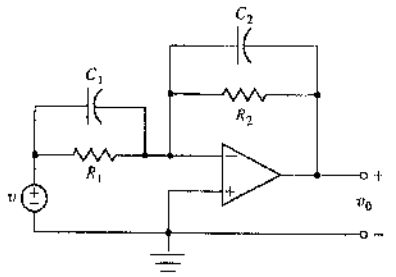


FIGURA E2.19. Circuito con amplificador operacional.

E2.20. En la Figura E2.20 se muestra una guía de deslizamiento de alta precisión. Determínese la función de transferencia $X_p(s)/X_{in}(s)$ cuando la fricción del eje motor es $b_d = 0.7$, la constante elástica del eje motor es $k_d = 2$, $m_c = 1$ y el rozamiento del deslizamiento es $b_s = 0.8$.

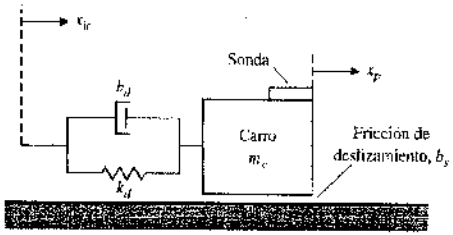


FIGURA E2.20. Guía deslizante de precisión.

E2.21. La velocidad rotacional ω del satélite mostrado en la Figura E2.21 se ajusta cambiando la longitud L de la varilla. La función de transferencia entre $\omega(s)$ y el cambio incremental en la longitud $\Delta L(s)$ de la varilla es

$$\frac{\omega(s)}{\Delta L(s)} = \frac{2.5(s+2)}{(s+5)(s+1)^2}.$$

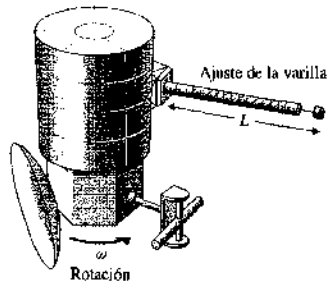


FIGURA E2.21. Satélite.

El cambio en la longitud del haz es $\Delta L(s) = 1/(4s)$. Determínese la respuesta de la velocidad $\omega(t)$.

Respuesta: $\omega(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{128}e^{-5t} - \frac{35}{128}e^{-t} - \frac{5}{32}te^{-t}$

E2.22. Determinar la función de transferencia en lazo cerrado $T(s) = (Y(s))/(R(s))$ para el sistema de la Figura E2.22.

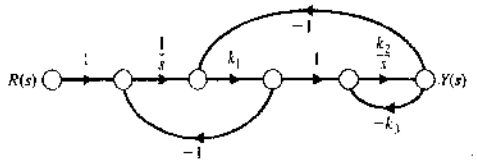


FIGURA E2.22

E2.23. En la Figura E2.23 se muestra el diagrama de bloques de un sistema. Determínese la función de transferencia $T(s) = Y(s)/R(s)$.

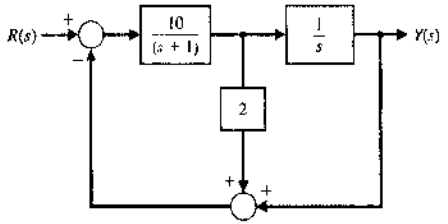


FIGURA E2.23

E2.24. Un amplificador puede tener una región de zona muerta tal como se muestra en la Figura E2.24. Utilícese una aproximación que emplee una ecuación cúbica $y = ax^3$ en la región aproximadamente lineal. Selecciónese a y determínese una aproximación lineal para el amplificador cuando el punto de operación es $x = 0.6$.

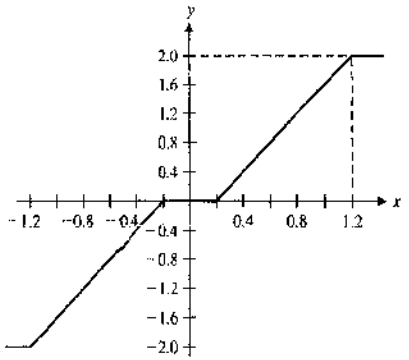


FIGURA E2.24. Un amplificador con zona muerta.

E2.25. Determínese la función de transferencia $X_2(s)/F(s)$ para el sistema que se muestra en la Figura E2.25. Ambas masas deslizan sobre una superficie sin rozamiento y $k = 1$N/M.

Respuesta: $\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2(s^2 + 2)}$

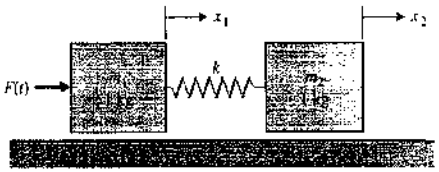


FIGURA E2.25

E2.26. Calcúlese la función de transferencia $Y(s)/D(s)$ para el sistema que se muestra en la Figura E2.26.

Respuesta: $\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$

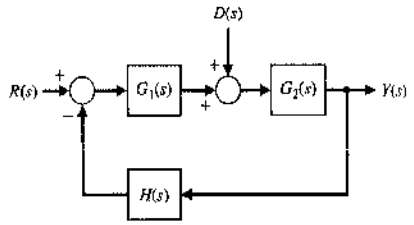


FIGURA E2.26. Sistema con perturbación.

E2.27. Determínese la función de transferencia $V_0(s)/V(s)$ para el circuito con amplificador operacional que se muestra en la Figura E2.27 [1]. Sea $R_1 = 167$ kΩ, $R_2 = 240$ kΩ, $R_3 = 1$ kΩ, $R_4 = 100$ kΩ y $C = 1$ μF. Supóngase un amplificador operacional ideal.

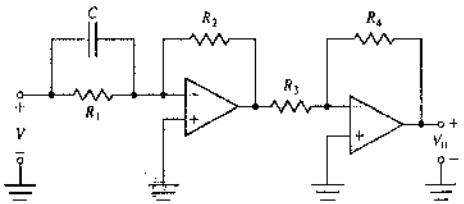


FIGURA E2.27. Circuito con amplificador operacional.

E2.28. En la Figura E2.28(a) se muestra un sistema.
(a) Determínese $G(s)$ y $H(s)$ del diagrama de bloques mostrado en la Figura E2.28(b) que son equivalente a los del diagrama de bloques de la Figura E2.28(b).
(b) Determínese $Y(s)/R(s)$ para la Figura E2.28(b).

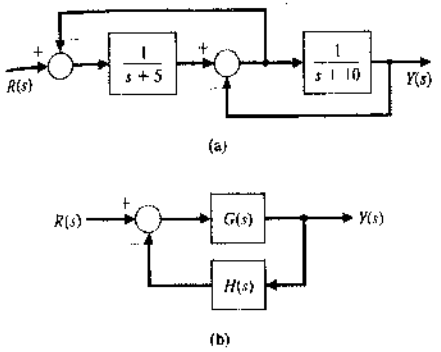


FIGURA E2.28

E2.29. En la Figura E2.29 se muestra un sistema.
(a) Averígüese la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$ cuando $G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$.
(b) Determínese $Y(s)$ cuando la entrada $R(s)$ es un escalón unitario.
(c) Calcúlese $y(t)$.

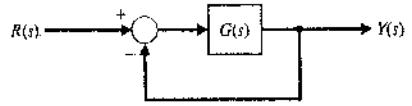


FIGURA E2.29

E2.30. Determínese los residuos del desarrollo en fracciones simples de $V(s)$ mediante evaluación numérica

$$V(s) = \frac{400}{s^2 + 8s + 400}$$

PROBLEMAS

(Los problemas requieren una extensión de los conceptos del capítulo a situaciones nuevas.)

P2.1. En la Figura P2.1 se muestra un circuito eléctrico. Obténgase un sistema de ecuaciones íntegro-diferenciales simultáneas que representen al circuito.

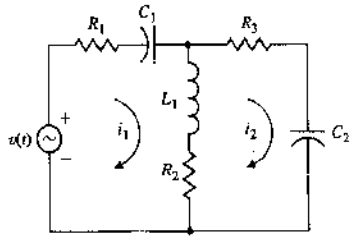


FIGURA P2.1. Circuito eléctrico.

P2.2. En la Figura P2.2 se muestra un amortiguador de vibraciones dinámico. Este sistema es representativo de muchas situaciones que entrañan la vibración de máquinas que contienen componentes desequilibrados. Los parámetros M_2 y k_{12} pueden elegirse de forma que la masa principal M_1 no vibre en el estado estacionario cuando $F(t) = a \operatorname{sen} \omega_0 t$. Obténgase la ecuación diferencial que describe el sistema.

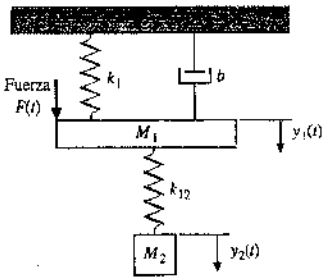


FIGURA P2.2. Amortiguador de vibraciones.

P2.3. En la Figura P2.3 se muestra un sistema acoplado de resortes y masas. Se supone que las masas y los resortes son iguales. Obténgase la ecuación diferencial que describe el sistema.

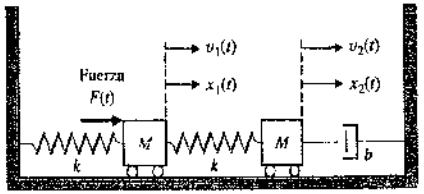


FIGURA P2.3. Sistema de dos masas.

P2.4. Un amplificador no lineal puede describirse por las siguientes características:

$$v_0(t) = \begin{cases} v_{in}^2 & v_{in} \geq 0 \\ -v_{in}^2 & v_{in} < 0 \end{cases}$$

El amplificador operará sobre un rango para v_{in} de $+0.5$ voltios en el punto de operación. Describase el amplificador mediante una aproximación lineal (a) cuando el punto de operación es $v_{in} = 0$, y (b) cuando el punto de operación es $v_{in} = 1$ voltios. Represéntese un diagrama de la función no lineal y la aproximación para cada caso.

P2.5. El fluido que pasa por un orificio puede representarse mediante la ecuación no lineal

$$Q = K(P_1 - P_2)^{1/2},$$

donde las variables se muestran en la Figura P2.5 y K es una constante. (a) Determínese una aproximación lineal para la ecuación del caudal del fluido. (b) ¿Qué sucede con la aproximación obtenida en (a) si el punto de operación es $P_1 - P_2 = 0$?

FIGURA P2.5. Caudal a través de un orificio.

P2.6. Usando la transformación de Laplace, obténgase la corriente $I_2(s)$ del Problema 2.1. Supóngase que todas las corrientes iniciales son cero, el voltaje inicial a través del condensador C_1 es cero, $v(t)$ es cero y el voltaje inicial a través de C_2 es de 10 voltios.

P2.7. Obténgase la función de transferencia del circuito diferenciador mostrado en la Figura P2.7.

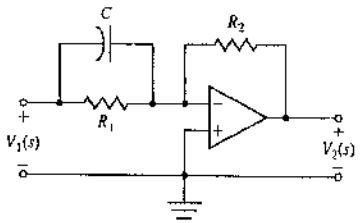


FIGURA P2.7. Un circuito diferenciador.

P2.8. Una red de puente en T se utiliza frecuentemente en sistemas de control de ca como una red de filtro [8]. En la Figura P2.8 se muestra el circuito de una red de puente en T. Demuéstrese que la función de transferencia de la red es

$$\frac{V_0(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1 + 2R_1Cs + R_1R_2C^2s^2}{1 + (2R_1 + R_2)Cs + R_1R_2C^2s^2}$$

Dibújese el diagrama de polos-ceros cuando $R_1 = 0.5$, $R_2 = 1$ y $C = 0.5$.

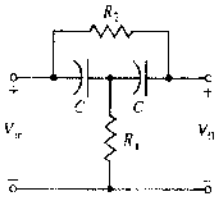


FIGURA P2.8. Red de un puente en T.

P2.9. Determínese la función de transferencia $X_1(s)/F(s)$ para el sistema acoplado resorte-masa del Problema 2.3. Dibújese el diagrama de polos-ceros en el plano-s para un sistema con amortiguamiento pequeño cuando $M = 1$, $b/k = 1$ y

$$\zeta = \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{kM}} = 0.1.$$

P2.10. Determínese la función de transferencia $Y_1(s)/F(s)$ para el sistema amortiguador de vibración del Problema 2.2. Determínense los parámetros necesarios M_2 y k_{12} de forma que la masa M_1 no vibre cuando $F(t) = a \operatorname{sen} \omega_0 t$.

P2.11. Para los sistemas electromecánicos que requieren una gran amplificación de potencia, se emplean con frecuencia amplificadores rotatorios. Una amplidina es un amplificador de potencia rotatorio. En la Figura P2.11 se muestran una amplidina y un servomotor. Obténgase la función de transferencia $\theta(s)/V_c(s)$ y dibújese el diagrama de bloques del sistema. Supóngase que $v_d = k_2 i_q$ y $v_q = k_1 i_c$.

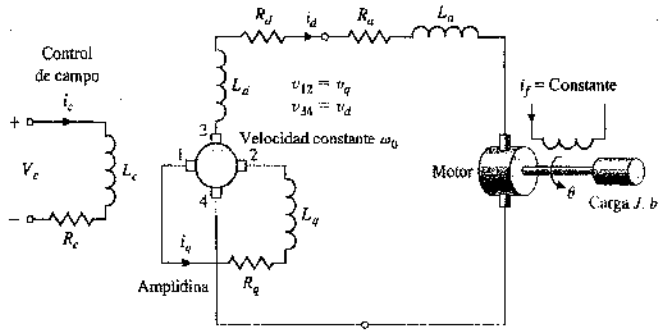


FIGURA P2.11
Amplidina y motor controlado por inducido.

P2.12. En la Figura P2.12 se muestra un sistema de control de caudal, donde un fluido incompresible entra en un depósito abierto. Supóngase que el cambio en el caudal de salida ΔQ_2 es proporcional al cambio en altura ΔH. En el estado estacionario, $Q_1 = Q_2$ y $Q_2 = kH^{1/2}$. Usando una aproximación lineal, obténgase la función de transferencia del depósito, $\Delta Q_2(s)/\Delta Q_1(s)$ [19].

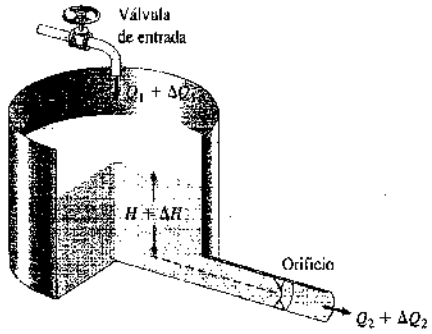


FIGURA P2.12
Sistema de caudal de fluido.

P2.13. En la Figura P2.13 se muestra un sistema de control electromecánico en lazo abierto. El generador, que se mueve a una velocidad constante, proporciona el voltaje de excitación para el motor. El motor tiene una inercia J_m y una fricción f_m. Obténgase la función de transferencia $\theta_L(s)/V_f(s)$ y dibújese un diagrama de bloques del sistema. El voltaje del generador v_g puede suponerse proporcional a la corriente de excitación i_f.

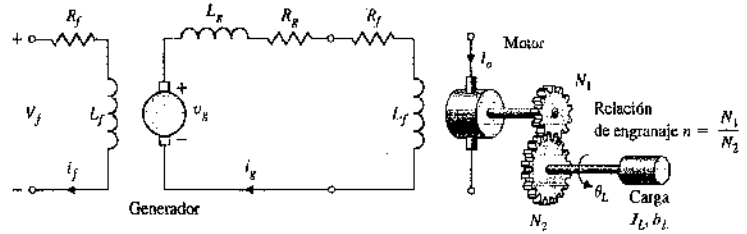


FIGURA P2.13
Motor y generador.

P2.14. Una carga giratoria se conecta a un motor eléctrico cc controlado por campo mediante un sistema de engranajes. Se supone que el motor es lineal. En una prueba se obtiene que en la carga de salida se alcanza una velocidad de 1 rad/s en 0.5 s cuando se aplica un voltaje constante de 80 V a los terminales del motor. La velocidad de salida en el estado estacionario es de 2.4 rad/s. Determínese la función de transferencia del motor, $\theta(s)/V_t(s)$ en rad/V. Puede suponerse que la inductancia del campo es despreciable (*véase* la Figura 2.17). Así mismo, obsérvese que la aplicación de 80 V a los terminales del motor es una entrada en escalón con una magnitud de 100 V.

P2.15. Sea el sistema resorte-masa representado en la Figura P2.15. Determínese una ecuación diferencial que describa el movimiento de la masa m. Obténgase la respuesta del sistema a un desplazamiento inicial $x(0) = 1$. Supóngase que el movimiento es sólo en el plano vertical.

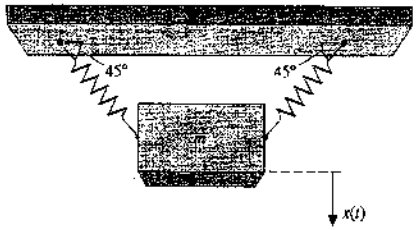


FIGURA P2.15. Sistema resorte-masa suspendido.

P2.16. Obténgase un grafo de flujo de señal para representar el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas donde x_1 y x_2 se consideran las variables dependientes y 6 y 11 son las entradas:

$$x_1 + 1.5x_2 = 6, \qquad 2x_1 + 4x_2 = 11.$$

Determínese el valor de cada variable dependiente usando la fórmula de la ganancia. Después, resuélvase para x_1 mediante la fórmula de ganancia del flujo de señal de Mason y verifíquese la solución usando la regla de Cramer.

P2.17. En la Figura P2.17 se muestra un sistema mecánico, que está sujeto a un desplazamiento conocido $x_3(t)$, con respecto a la referencia. (a) Determínense las dos ecuaciones independientes de movimiento. (b) Obténganse las ecuaciones de movimiento en función de la transformada de Laplace, suponiendo que las condiciones iniciales son iguales a cero. (c) Dibújese un grafo de flujo de señal que represente el sistema de ecuaciones. (d) Obténgase la relación $T_{13}(s)$ entre $X_1(s)$ y $X_3(s)$, empleando la fórmula de la ganancia de flujo de señal de Mason. Compárese el trabajo necesario para obtener $T_{13}(s)$ por métodos matriciales o utilizando la fórmula de la ganancia de flujo de señal de Mason.

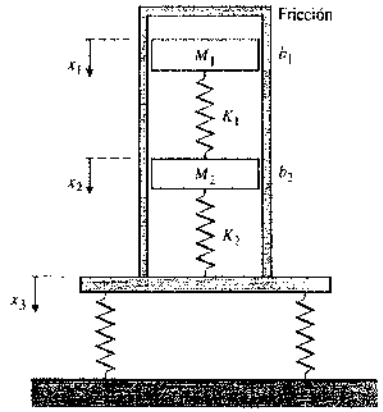


FIGURA P2.17. Sistema mecánico.

P2.18. En la Figura P2.18 se muestra una red LC en escalera. Se pueden escribir las ecuaciones que describen la red tal como sigue:

$$I_1 = (V_1 - V_a)Y_1, \qquad V_a = (I_1 - I_a)Z_2,$$
$$I_a = (V_a - V_2)Y_3, \qquad V_2 = I_aZ_4.$$

Constrúyase un grafo de flujo a partir de las ecuaciones y determínese la función de transferencia $V_2(s)/V_1(s)$.

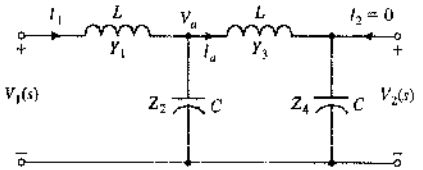


FIGURA P2.18. Red en escalera LC.

P2.19. En la Figura P2.19 se muestra un seguidor de voltaje (amplificador buffer). Demuéstrese que $T = v_0/v_{in} = 1$. Supóngase un amplificador operacional ideal.

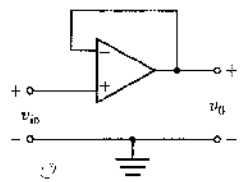


FIGURA P2.19. Amplificador buffer.

P2.20. El amplificador con seguidor de fuente proporciona una impedancia de salida menor y una ganancia esencialmente unitaria. En la Figura P2.20(a) se muestra el diagrama del circuito, y en la Figura P2.20(b), el modelo de pequeña señal. Este circuito emplea un FET y proporciona una ganancia aproximada igual a uno. A efectos de polarización, supóngase que $R_2 \gg R_1$, y $R_g \gg R_2$. (a) Calcúlese la ganancia del amplificador. (b) Calcúlese la ganancia cuando $g_m = 2000$ $\mu\Omega$ y $R_s = 10$ kΩ, donde $R_s = R_1 + R_2$. (c) Dibújese un diagrama de bloques que represente las ecuaciones del circuito.

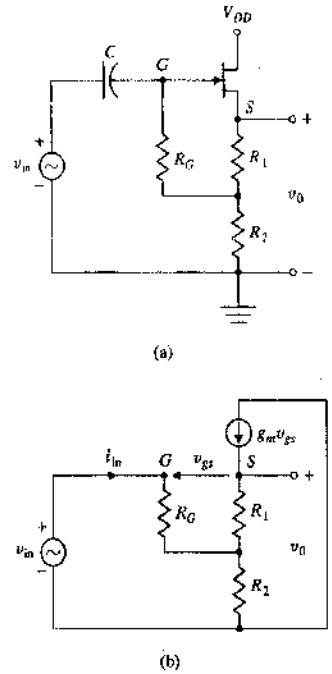


FIGURA P2.20. El seguidor de fuente o amplificador de drenaje común utilizando un FET.

P2.21. En la Figura P2.21 se muestra un servomecanismo hidráulico con realimentación mecánica [19]. El pistón de potencia tiene un área igual a A. Cuando se mueve la válvula una pequeña cantidad Δz, entonces el aceite fluye a través del cilindro a una velocidad $p \cdot \Delta z$, donde p es el coeficiente de la obstrucción. Se supone que la presión de entrada del aceite es constante. De la geometría del servomecanismo se deduce que $\Delta z = k\dfrac{l_1 - l_2}{l_1}(x - y) - \dfrac{l_2}{l_1}y$. (a) Determínese el grafo de flujo de señal en lazo cerrado para este sistema mecánico. (b) Obténgase la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/X(s)$.

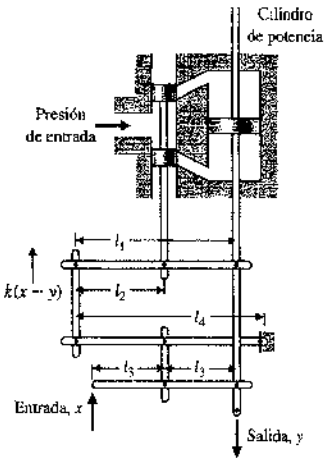


FIGURA P2.21. Servomecanismo hidráulico.

P2.22. En la Figura P2.22 se muestran dos péndulos suspendidos de pivotes sin fricción y conectados en sus puntos centrales por un resorte [1]. Supóngase que cada péndulo se puede representar por medio de una masa M en el extremo de una barra sin masa de longitud L. Supóngase también que el desplazamiento es pequeño y que se pueden usar aproximaciones lineales para sen θ y cos θ. Cuando $\theta_1 = \theta_2$, el resorte colocado en el centro no está estirado. La fuerza de entrada se representa por $f(t)$, que influye sólo en la barra izquierda. (a) Obténganse las ecuaciones del movimiento y dibújese un diagrama de bloques para dichas ecuaciones. (b) Determínese la función de transferencia $T(s) = \theta_1(s)/F(s)$. (c) Dibújese la localización de los polos y ceros de $T(s)$ en el plano s.

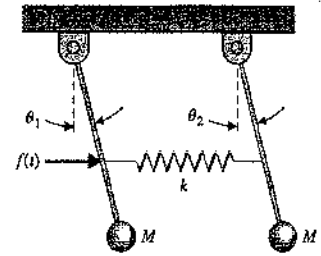


FIGURA P2.22. Las barras son de longitud L y el resorte está localizado en $L/2$.

P2.23. En la Figura P2.23 se muestra el circuito equivalente para pequeña señal de un amplificador de transistores con emisor común. El amplificador de transistores incluye una resistencia de realimentación R_f. Determínese la relación entrada-salida v_{ce}/v_{in}.

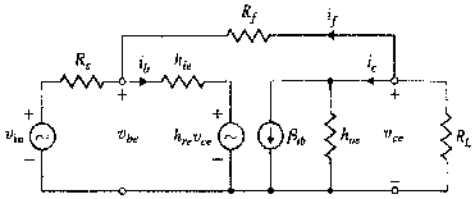
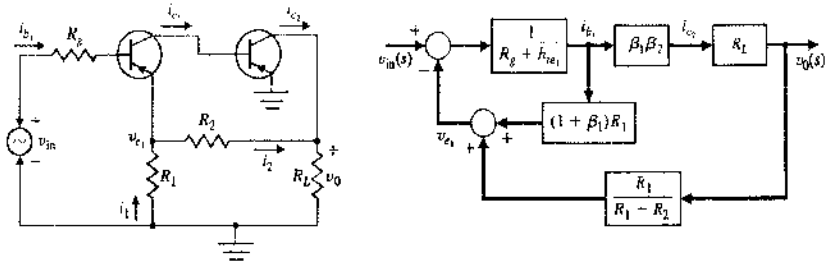


FIGURA P2.23
Amplificador CE.

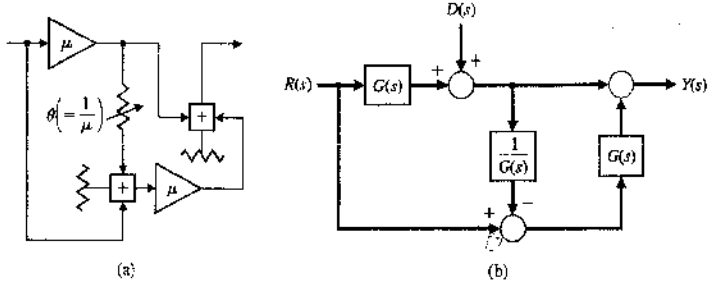
P2.24. En la Figura P2.24(a) se muestra un amplificador de dos transistores en serie con realimentación por voltaje. Este circuito equivalente ca no tiene en cuenta las resistencias de polarización y los condensadores en paralelo. En la Figura P2.24(b) se muestra un diagrama de bloques que representa al circuito. Este diagrama de bloques no tiene en cuenta el efecto de h_{re}, que es generalmente una aproximación adecuada y supone que $(R_2 + R_L) \gg R_1$. (a) Determínese la ganancia de voltaje, v_0/v_{in}. (b) Determínese la ganancia de corriente, i_{c_2}/i_{b_1}. (c) Determínese la impedancia de entrada, v_{in}/i_{b_1}.



(a) (b)

FIGURA P2.24. Amplificador de realimentación.

P2.25. A H. S. Black se le reconoce por haber desarrollado un amplificador con realimentación negativa. Con frecuencia se pasa por alto el hecho de que tres años había inventado una técnica para diseñar circuitos conocida como corrección de alimentación directa [20]. Algunos experimentos recientes han mostrado que esta técnica ofrece el potencial para dar una excelente estabilización del amplificador. En la Figura P2.25(a) se muestra el amplificador de Black en la forma que se registró en 1924. En la Figura P2.25(b) se muestra el diagrama de bloques. Determínese la función de transferencia entre la salida $Y(s)$ y la entrada $R(s)$, así como entre la salida y la perturbación $D(s)$. Se emplea $G(s)$ para el amplificador representado por μ en la Figura P2.25(a).



(a) (b)

FIGURA P2.25
Amplificador de H. S. Black.

P2.26. Un robot incluye una flexibilidad significativa en los brazos con una carga pesada en la pinza. En la Figura P2.26 se muestra un modelo del robot con dos masas. Determínese la función de transferencia $Y(s)/F(s)$.

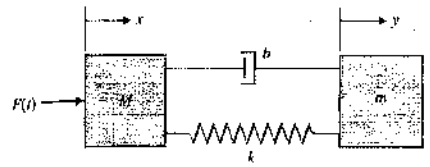


FIGURA P2.26. El modelo resorte-masa-amortiguador de un brazo de robot

P2.27. Los trenes con levitación magnética proporcionan una alternativa de alta velocidad y muy baja fricción en comparación con las ruedas de acero sobre rieles de acero. Como se muestra en la Figura P2.27 [27], el tren flota en un colchón de aire. La fuerza de levitación F_L está controlada por la corriente i en las bobinas de levitación y se puede aproximar por

$$F_L = k\frac{i^2}{z^2},$$

donde z es el espacio de aire. A esta fuerza se opone la fuerza descendente $F = mg$. Determínese la relación linealizada entre el espacio de aire z y la corriente de control cerca de la condición de equilibrio.

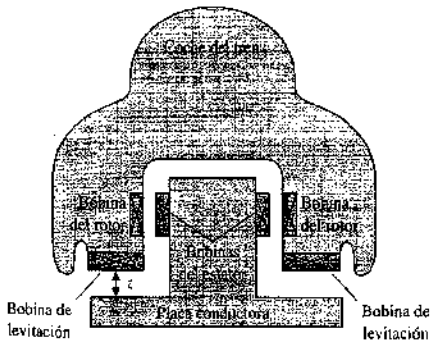


FIGURA P2.27. Vista en corte del tren.

P2.28. Un modelo de lazos múltiples para un sistema ecológico urbano podría incluir las siguientes variables: número de personas en la ciudad (P), modernización (M), migración hacia la ciudad (C), instalaciones sanitarias (S), número de enfermedades (D), bacterias/área (B) y cantidad de desperdicios/área (G), donde el símbolo para la variable se coloca entre paréntesis. Se establecen como hipótesis los siguientes lazos causales:

1. $P \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow P$
2. $P \rightarrow M \rightarrow C \rightarrow P$
3. $P \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow D \rightarrow P$
4. $P \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow P$

Dibújese un grafo de flujo de señal para estas relaciones causales, usando los símbolos de ganancia apropiados. Indíquese si cada transmisión de ganancia se considera positiva o negativa. Por ejemplo, el enlace causal de S a B es negativo, ya que mejores instalaciones sanitarias conllevan menos bacterias/área. ¿Cuáles de los cuatro lazos tienen realimentación positiva y cuáles negativa?

P2.29. Se desea equilibrar una pelota que rueda sobre una viga inclinada, tal como se muestra en la Figura P2.29. Se supondrá que la corriente de entrada al motor i controla el par con una fricción despreciable. Supóngase que la viga se puede equilibrar cerca de la horizontal ($\phi = 0$); por tanto, se tendrá una pequeña desviación de ϕ. Averígüese la función de transferencia $X(s)/I(s)$ y dibújese un diagrama de bloques que ilustre la función de transferencia que muestre $\phi(s)$, $X(s)$ e $I(s)$.

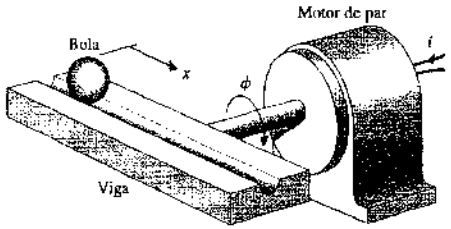


FIGURA P2.29. Inclinación del sistema bola-viga.

P2.30. La medida o elemento sensor en un sistema con realimentación es muy importante para la precisión del sistema [6]. La respuesta dinámica del sensor es importante. La mayoría de los elementos sensores tienen función de transferencia

$$H(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

Supóngase que un foto-detector que mide la posición tiene $\tau = 4$ μs y $0.999 < k < 1.001$. Obténgase la respuesta a un escalón del sistema y hállese el valor de k que produce la respuesta más rápida —esto es, el tiempo más rápido en alcanzar el 98% del valor final.

P2.31. Un sistema de control para el carrete de un cable usa un tacómetro para medir la velocidad del cable a medida que sale del carrete. La salida del tacómetro se usa para controlar la velocidad del motor del carrete a medida que éste se desenrolla. En la Figura P2.31 se muestra el sistema. El radio del carrete, R, es de 4 m cuando está lleno y de 2 m cuando está vacío. El momento de inercia del carrete es $I = 18.5R^4 - 221$. La velocidad de cambio del radio es

$$\frac{dR}{dt} = \frac{-D^2\dot{\omega}}{2\pi W}$$

donde W = ancho del carrete y D = diámetro del cable. La velocidad real del cable es $v(t) = R\dot{\omega}$. La velocidad deseada del cable es 50 m/s. Desarróllese una simulación por computador de este sistema y obténgase la respuesta de la velocidad durante 20 s para los tres valores de ganancia $K = 0.2$, 0.4 y 0.6. La velocidad angular de carrete $\dot{\omega} = d\theta/dt$ es igual a $1/I$ veces la integral del par. Obsérvese que la inercia varía con el tiempo a medida que se desenrolla el carrete. Una ecuación para I en la simulación dará cuenta de este cambio. Selecciónese la ganancia K para limitar la sobreelongación a menos del 9% y al mismo tiempo tener la respuesta más rápida. Supóngase $W = 2.0$, $D = 0.1$ y $R = 3.5$ en $t = 0$.

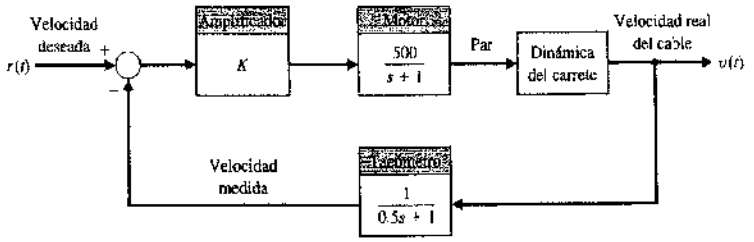


FIGURA P2.31
Sistema de control del tambor de arrollamiento de cable.

P2.32. En la Figura P2.32 se muestra un sistema de control interactuante con dos entradas y dos salidas. Determínense $Y_1(s)/R_1(s)$ e $Y_2(s)/R_1(s)$ cuando $R_2 = 0$.

P2.33. Un sistema consta de dos motores eléctricos que se acoplan mediante una correa flexible continua. La correa también pasa sobre un brazo oscilante que se instrumenta para permitir medir la velocidad y la tensión de la correa. El problema de control básico es regular la velocidad y tensión de la correa modificando los pares motores.

Un ejemplo de un sistema práctico similar al que se muestra ocurre en los procesos de fabricación de fibra textil cuando el hilo se enrolla de una bobina en otra a alta velocidad. Entre las dos bobinas, el hilo se procesa de una forma que puede requerir que la velocidad y tensión del hilo se controle dentro de límites definidos. En la Figura P2.33 se muestra un modelo del sistema. Averígüese $Y_2(s)/R_1(s)$. Determínese una relación para el sistema que hará Y_2 independiente de R_1.

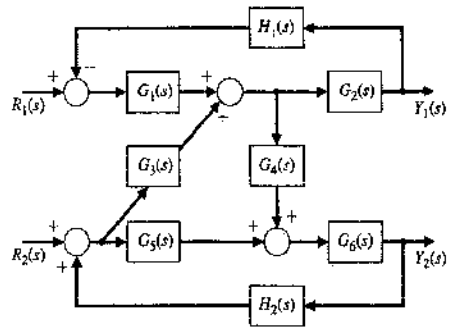


FIGURA P2.32
Sistema con interacción.

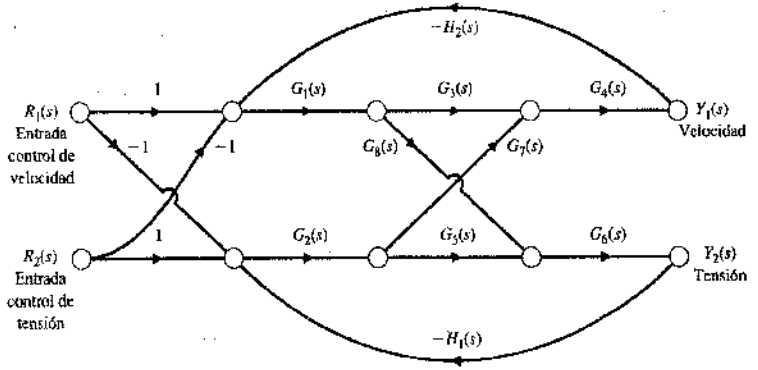


FIGURA P2.33
Un modelo de los motores acoplados.

2.34. Determínese la función de transferencia $Y(s)/R(s)$ para el sistema de control de velocidad en vacío de un motor de gasolina tal como se muestra en la Figura P2.34.

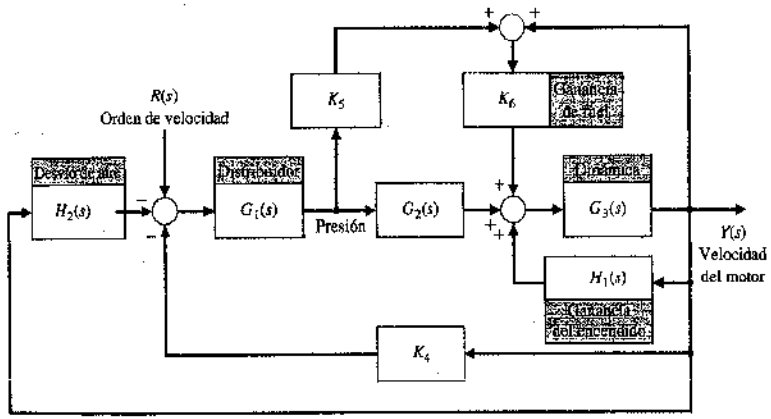


FIGURA P2.34. Sistema de control del régimen de marcha en vacío.

P2.35. En la Figura P2.35 se ilustra el sistema de suspensión de una rueda de un camión antiguo. La masa del vehículo es m_1 y la masa de la rueda es m_2. El muelle de suspensión tiene una constante elástica k_1 y la rueda tiene una constante elástica k_2. La constante de amortiguamiento del amortiguador es b. Obténgase la función de transferencia $Y_1(s)/X(s)$, que representa la respuesta del vehículo a baches en la carretera.

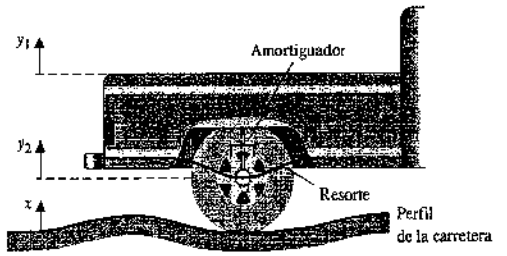


FIGURA P2.35. Suspensión de un camión de reparto.

P2.36. Un sistema de control con realimentación tiene la estructura que se muestra en la Figura P2.36. Determínese la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$ (a) por manipulación del diagrama de bloques y (b) utilizando un grafo de flujo de señal y la fórmula de ganancia de flujo de señal de Mason. (c) Selecciónese las ganancias K_1 y K_2 de forma que la respuesta en lazo cerrado a una entrada en escalón esté críticamente amortiguada con dos raíces iguales en $s = -10$. (d) Represéntense gráficamente la respuesta amortiguada crítica para una entrada en escalón unitario ¿Cuál es el tiempo que se necesita para que la respuesta a un escalón alcance el 90% de su valor final?

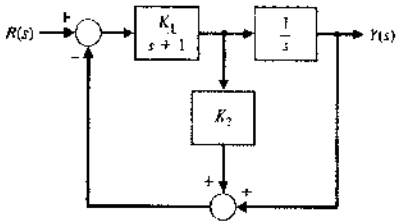


FIGURA P2.36

P2.37. Un sistema está representado por la Figura P2.37. (a) Determínese el desarrollo en fracciones simples e $y(t)$ para una entrada en rampa, $r(t) = t$, $t \geq 0$. (b) Obténgase una gráfica de $y(t)$ para la parte (a) y hállese $y(t)$ para $t = 1.5s$. (c) Determínese la respuesta impulsional del sistema $y(t)$ para $t \geq 0$. (d) Obténgase una gráfica de $y(t)$ para la parte (c), y averígüese $y(t)$ para $t = 1.5s$.

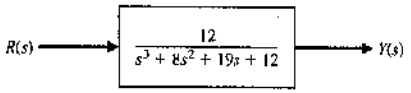


FIGURA P2.37

P2.38. En la Figura P2.38 se muestra un sistema de dos masas con una fuerza de entrada $u(t)$. Cuando $m_1 = m_2 = 1$ y $K_1 = K_2 = 1$, determínese el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen al sistema.

P2.39. Un oscilador con devanado consiste en dos esferas de acero colocadas en cada extremo de una larga barra delgada tal como se muestra en la Figura P2.39. La barra está colgada de un cable fino que se puede torcer muchas revoluciones sin romperse. El dispositivo se arrolla 4000 grados. ¿Cuánto tiempo tardará hasta que el movimiento decaiga a una oscilación de sólo 10 grados? Supóngase que el cable fino tiene una constante elástica de rotación de 2×10^{-4} N m/rad y que el coeficiente de rozamiento viscoso de la esfera en el aire es 2×10^{-4} N·m/rad. La esfera tiene una masa de 1 kg.

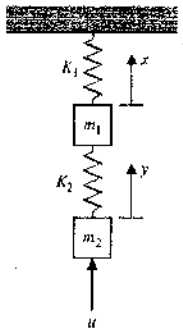


FIGURA P2.38. Sistemas de dos masas

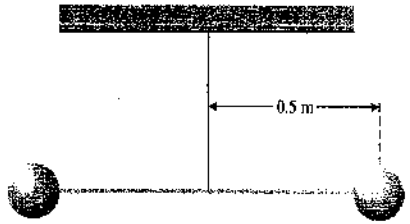


FIGURA P2.39. Oscilador con devanado.

P2.40. Para el circuito de la Figura P2.40, determínese la transformada del voltaje de salida $V_0(s)$. Supóngase que el circuito está en estado estacionario cuando $t < 0$. Supóngase también que el conmutador se mueve instantáneamente del contacto 1 al contacto 2 en $t = 0$.

P2.41. Un dispositivo de amortiguamiento se utiliza para reducir las vibraciones no deseadas de máquinas. Un fluido viscoso, tal como aceite pesado, se coloca entre las ruedas tal como se muestra en la Figura P2.41. Cuando la vibración se hace excesiva, el movimiento relativo de las dos ruedas crea amortiguamiento. Cuando el dispositivo está rotando sin vibración, no hay movimiento relativo y no se produce amortiguamiento. Determínense $\theta_1(s)$ y $\theta_2(s)$. Supóngase que el eje tiene una constante elástica K y que b es la constante de amortiguamiento del fluido. El par de carga es T.

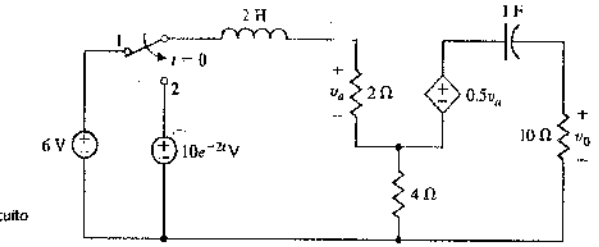


FIGURA P2.40
Modelo de un circuito electrónico.

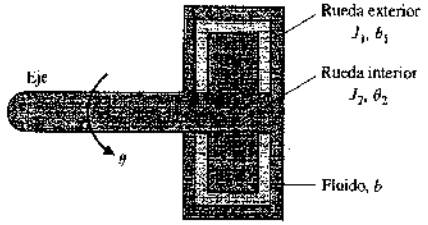


FIGURA P2.41
Vista en corte del dispositivo de amortiguamiento.

P2.42. En la Figura P2.42 se muestra el control lateral de un cohete con suspensión cardan. La desviación lateral de la trayectoria deseada es h y la velocidad del cohete es V. El par de control del motor es T_c y el par de perturbación es T_d. Derívense las ecuaciones que describen un modelo lineal del sistema y dibújese el diagrama de bloques con las funciones de transferencias apropiadas.

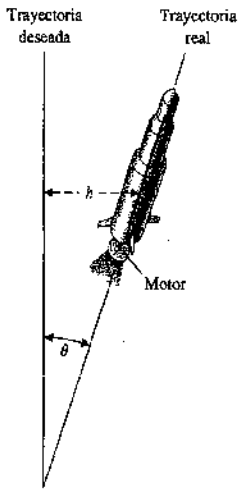


FIGURA P2.42. Cohete con motor en suspensión cardan.

P2.43. En muchas aplicaciones, tales como códigos de lectura de productos en supermercados y en impresión y en fabricación, se utiliza un lector óptico para leer códigos tal como se muestra en la Figura P2.43. Cuando el espejo gira, se desarrolla una fuerza de fricción que es proporcional a su velocidad angular. La constante de fricción es igual a 0.06 N·s/rad, y el momento de inercia es igual a 0.1 kg-m^2. La variable de salida es la velocidad $\omega(t)$. (a) Obténgase la ecuación diferencial para el motor. (b) Averígüese la respuesta del sistema cuando el par motor de entrada es un escalón unitario y la velocidad inicial en $t = 0$ es igual a 0.7.

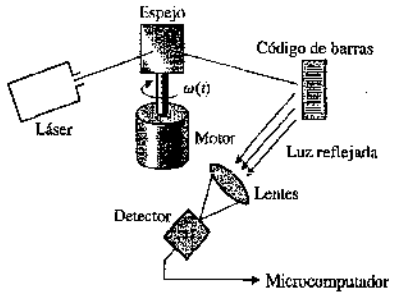


FIGURA P2.43. Lector óptico.

P2.44. En el ítem 10 de la Tabla 2.5 se muestra un conjunto ideal de engranajes. Omítase la inercia y la fricción de los engranajes y supóngase que el trabajo hecho por un engranaje es igual al del otro. Derívese la relación dada en el ítem 10 de la Tabla 2.5. También, determínese la relación entre los pares T_m y T_L.

P2.45. Un conjunto ideal de engranajes se conecta a un cilindro sólido como carga tal como se muestra en la Figura P2.45. La inercia del eje del motor y del engranaje G_2 es J_m. Determínese (a) la inercia de la carga J_L y (b) el par T en eje del motor. Supóngase que la fricción en la carga es b_L y la fricción en el eje del motor es b_m. Supóngase también que la densidad del disco de carga es ρ.

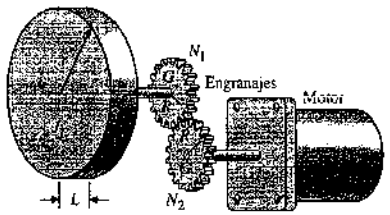


FIGURA P2.45. Motor, engranajes y carga.

P2.46. Para utilizar la ventaja de la fuerza de los manipuladores robóticos y la ventaja intelectual de los humanos, se han examinado una clase de manipuladores llamados **extensores** [23]. El extensor se define como un manipulador activo usado por un humano para aumentar su fuerza. El humano proporciona una entrada $U(s)$, tal como se muestra en la Figura P2.46. El punto final del extensor es $P(s)$. Determinar la ida $P(s)$ para ambos $U(s)$ y $F(s)$ en la forma

$$P(s) = T_1(s)U(s) + T_2(s)F(s).$$

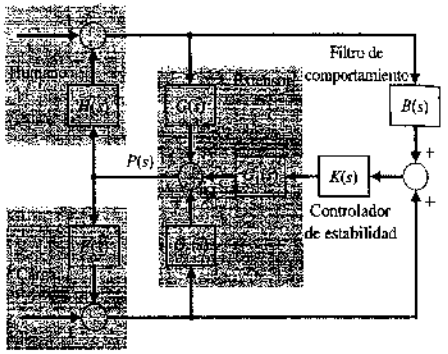
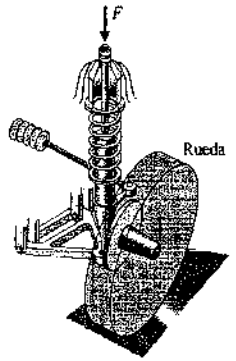
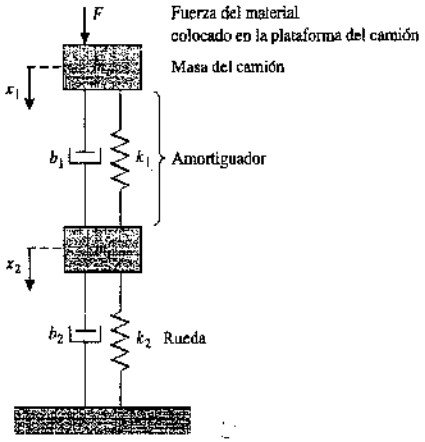


FIGURA P2.46. Modelo del extensor.

P2.47. Una carga añadida a un camión produce en una fuerza F sobre el soporte del resorte y la rueda flexa tal como se muestra en la Figura P2.47(a). En la Figura P2.47(b) se muestra el modelo del movimiento de la rueda. Determínese la función de transferencia $X_2(s)/F(s)$.



(a)



(b)

FIGURA P2.47
Modelo del soporte del camión.

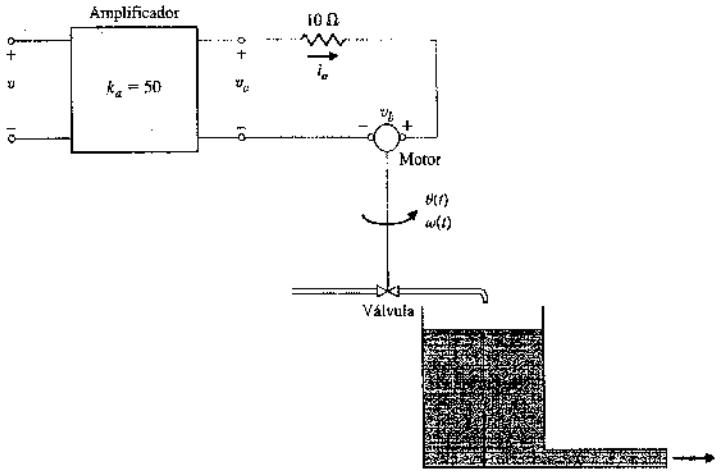


FIGURA P2.48
Sistema de control en lazo abierto para el nivel de agua en un tanque.

P2.48. El nivel de agua $h(t)$ se controla por un sistema en lazo abierto tal como se muestra en la Figura P2.48. Un motor de cc controlado por una corriente de inducido i_a gira un eje abriendo una válvula. La inductancia del motor de cc es despreciable, es decir $L_a = 0$. También la fricción rotacional del eje del motor y la válvula es despreciable, esto es, $b = 0$. La altura del agua en el tanque es

$$h(t) = \int [1.6\theta(t) - h(t)]\,dt,$$

la constante del motor es $K_m = 10$ y la inercia del eje del motor y la válvula es $J = 6 \times 10^{-3}$ kg-m^2. Determínese (a) la ecuación diferencial para $h(t)$ y $v(t)$ y (b) la función de transferencia $H(s)/V(s)$.

P2.49. El circuito mostrado en la Figura P2.49 se denomina filtro de adelanto-retardo.
(a) Hállese la función de transferencia $V_2(s)/V_1(s)$. Supóngase un amplificador operacional ideal.
(b) Determínese $V_2(s)/V_1(s)$ cuando $R_1 = 100$ kΩ, $R_2 = 200$ kΩ, $C_1 = 1$ μF y $C_2 = 0.1$ μF.
(c) Determínese el desarrollo en fracciones simples de $V_2(s)/V_1(s)$.

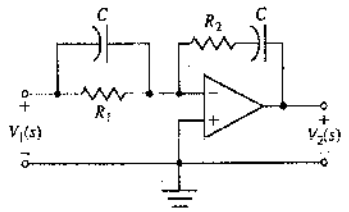


FIGURA P2.49. Filtro de adelanto-retardo.

P2.50. En la Figura P2.50 se muestra un sistema de control en lazo cerrado.
(a) Determínese la función de transferencia

$$T(s) = Y(s)/R(s).$$

(b) Determínese los polos y ceros de $T(s)$.
(c) Utilícese una entrada en escalón unitario, $R(s) = 1/s$ y obténgase el desarrollo en fracciones simples para $Y(s)$ y el valor de los residuos.
(d) Represéntese gráficamente $y(t)$ y analícese el efecto de los polos complejos y reales de $T(s)$. ¿Dominan los polos reales o complejos la respuesta?

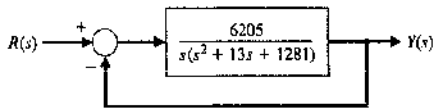


FIGURA P2.50

P2.51. En la Figura P2.51 se muestra un sistema de control en lazo cerrado.
(a) Determínese la función de transferencia $T(s) = Y(s)/R(s)$.
(b) Determínese los polos y ceros de $T(s)$.
(c) Utilícese una entrada en escalón unitario, $R(s) = 1/s$ y obténgase el desarrollo en fracciones simples para $Y(s)$ y el valor de los residuos.
(d) Represéntese gráficamente $y(t)$ y analícese el efecto de los polos complejos y reales de $T(s)$. ¿Dominan los polos reales o complejos la respuesta?
(e) Predígase el valor final de $y(t)$ para la entrada en escalón unitario.

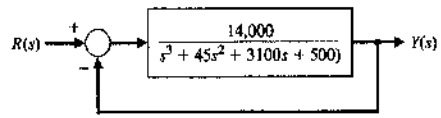


FIGURA P2.51

PROBLEMAS AVANZADOS

PA2.1. Un motor de cc controlado por inducido mueve una carga. El voltaje de entrada es 5 V. La velocidad en $t=2$ segundos es 30 rad/s y la velocidad estacionaria es 70 rad/s cuando $t\to\infty$. Hállese la función de transferencia $\omega(s)/V(s)$.

PA2.2. Un sistema tiene un diagrama de flujo de señal tal como se muestra en la Figura PA2.2. Determínese la función de transferencia

$$T(s) = \frac{Y_2(s)}{R_1(s)}.$$

Se desea desacoplar $Y_2(s)$ de $R_1(s)$ obteniendo $T(s) = 0$. Seleccionar $G_5(s)$ en términos de las otras $G_i(s)$ para conseguir el desacoplo.

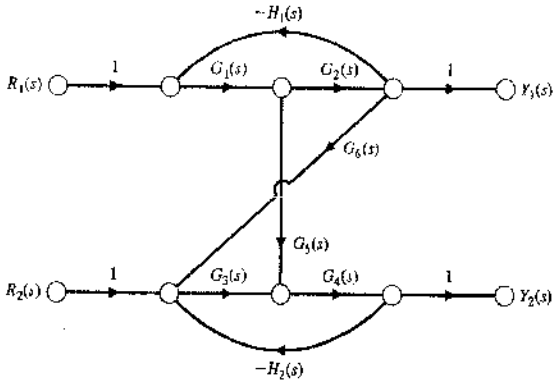


FIGURA PA2.2

PA2.3. Sea el sistema de control con realimentación de la Figura PA2.3. Defínase el error de seguimiento como

$$E(s) = R(s) - Y(s).$$

(a) Determínese una $H(s)$ apropiada, de forma que el error de seguimiento sea cero para cualquier entrada $R(s)$ en ausencia de una entrada de perturbación [esto es, cuando $D(s) = 0$]. (b) Utilizando la $H(s)$ determinada en la parte (a), calcúlese la respuesta $Y(s)$ para una perturbación $D(s)$ cuando la entrada $R(s) = 0$. (c) ¿Es posible obtener $Y(s) = 0$ para una perturbación arbitraria $D(s)$ cuando $G_d(s) \neq 0$? Explíquese la respuesta.

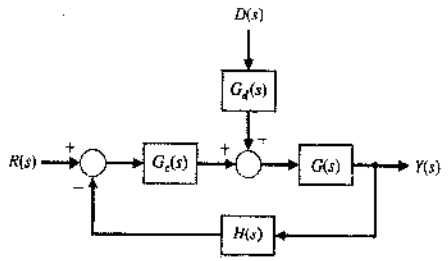


FIGURA PA2.3. Sistema con realimentación con una entrada de perturbación.

PA2.4. Sea un sistema de calentamiento térmico dado por

$$\frac{\mathcal{T}(s)}{q(s)} = \frac{1}{C_t s + (QS + 1/R_t)},$$

donde la entrada $\mathcal{T}(s)$ es la diferencia de temperatura debida al proceso térmico y la entrada $q(s)$ es el caudal de calor del elemento calefactor. Los parámetros del sistema son C_t, Q, S y R_t. En la Tabla 2.5 se ilustra el sistema de calentamiento térmico. (a) Determínese la respuesta del sistema a un escalón unitario $q(s) = 1/s$. (b) Cuando $t\to\infty$, ¿a qué valor se aproxima la respuesta en escalón determinada en la parte (a)? Esto se conoce la respuesta en estado estacionario. (c) Descríbase cómo seleccionarían los parámetros del sistema C_t, Q, S y R_t para aumentar la velocidad de respuesta del sistema a un escalón unitario.

PROBLEMAS DE DISEÑO

PDC2.1. Se desea posicionar de manera precisa una mesa para una máquina tal como se muestra en la Figura PDC2.1. Un motor de tracción con un rodillo de cabestrante posee algunas características deseables cuando se compara con el más popular tornillo de bola. El motor de tracción exhibe baja fricción y no posee huelgo. Sin embargo son sensibles a las perturbaciones. Desarróllese un modelo del motor de tracción mostrado en la Figura PDC2.1(a) para los parámetros dados en la Tabla 2.1. Se utiliza un motor de cc controlado por inducido con un rodillo de cabestrante unido al eje. La barra de transmisión mueve a la corredera lineal de la mesa. Las correderas emplean unos cojinetes de aire de forma que la fricción es despreciable. Se desea determinar el modelo en lazo abierto de la Figura PDC2.1(b) y su función de transferencia.

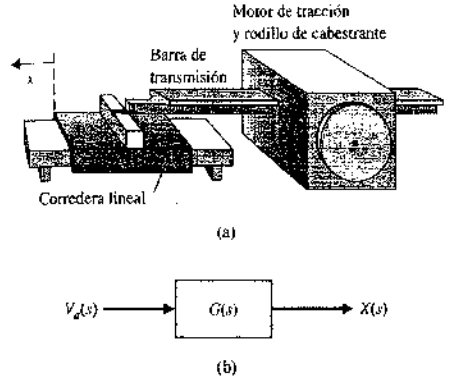


FIGURA PDC2.1. (a) Motor de tracción, rodillo de cabestrante y corredera lineal. (b) Diagrama de bloques.

Tabla PDC2.1. Parámetros típicos para el motor cc controlado por inducido y del cabestrante y corredera

M_s	Masa de la deslizadera	5.693 kg
M_b	Masa de la barra de transmisión	6.96 kg
J_m	Inercia del rodillo, eje, motor y tacómetro	$10.91 \cdot 10^{-3}$ kg m^2
r	Radio del rodillo	$31.75 \cdot 10^{-3}$ m
b_m	Amortiguamiento del motor	0.268 N-m-s/rad
K_{at}	Constante del par	0.8379 N-m/amp
K_b	Constante de la fuerza contraelectromotriz	0.838 V-s/rad
R_m	Resistencia del motor	1.36 Ω
L_m	Inductancia del motor	3.6 mH

PD2.1. En la Figura PD2.1 se muestra un sistema de control. Las funciones de transferencias $G_2(s)$ y $H_2(s)$ son fijas. Determínese las funciones de transferencias $G_1(s)$ y $H_1(s)$ de forma que la función de transferencia en lazo cerrado $Y_1(s)/R(s)$ sea exactamente igual a 1.

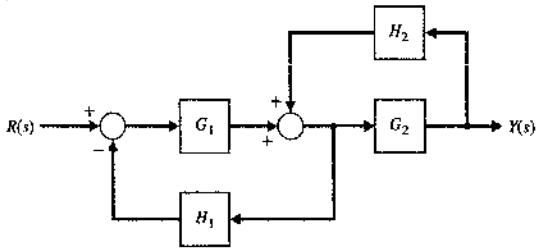


FIGURA PD2.1
Selección de funciones de transferencia.

PD2.2. El circuito del haz de un aparato de televisión se representa por el modelo de la Figura PD2.2. Selecciónese la conductancia desconocida G, de forma que el voltaje v es 24 V. Cada conductancia se da en siemens (S).

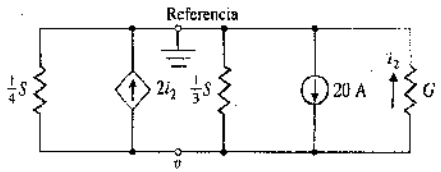


FIGURA PD2.2
Circuito del haz de televisión.

PD2.3. Una entrada $r(t) = t$, $t \geq 0$, se aplica a una caja negra con una función de transferencia $G(s)$. la respuesta de la salida resultante, cuando las condiciones iniciales son cero, es

$$y(t) = 1 + \operatorname{sen} t + 2e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

Determínese $G(s)$ para este sistema.

PD2.4. En la Figura PD2.4 se muestra un circuito con amplificador operacional que puede servir como filtro. (a) Determínese la función de transferencia del circuito suponiendo un amplificador operacional ideal. Averígüese $v_0(t)$ cuando la entrada es $v_i(t) = At$, $t = 0$.

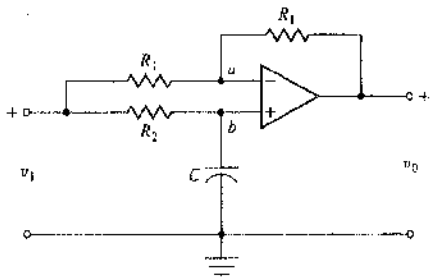


FIGURA PD2.4. Circuito del amplificador operacional.

PROBLEMAS CON MATLAB

PM2.1. Sean los dos polinomios

$$p(s) = s^2 + 2s + 1$$

y

$$q(s) = s + 1.$$

Calcúlese lo siguiente utilizando MATLAB:
(a) $p(s)q(s)$
(b) polos y ceros de $G(s) = \dfrac{q(s)}{p(s)}$
(c) $p(-1)$

PM2.2. Sea el sistema con realimentación que se representa en la Figura PM2.2.
(a) Calcúlese la función de transferencia en lazo cerrado utilizando las funciones series y feedback.
(b) Obténgase la respuesta a un escalón unitario del sistema en lazo cerrado con la función step y verifíquese que el valor final de la salida es 2/5.

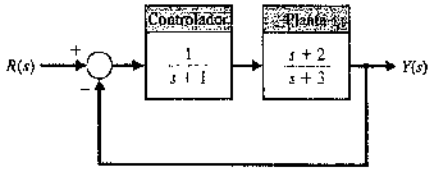


FIGURA PM2.2. Un sistema de control con realimentación negativa.

PM2.3. Sea la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u,$$

donde $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ y $u(t)$ es un escalón unitario. Determínese analíticamente la solución $y(t)$ y verifíquese con MATLAB representando gráficamente la solución analítica y la respuesta a un escalón obtenida con la función step.

PM2.4. Sea el sistema mecánico representado en la Figura PM2.4. La entrada está dada por $f(t)$ y la salida es $y(t)$. Determínese la función de transferencia de $f(t)$ a $y(t)$ y utilizando MATLAB represéntese gráficamente la respuesta del sistema a una entrada en escalón unitario. Sea $m = 10$, $k = 1$ y $b = 0.5$. Demuéstrese que la amplitud pico de la salida es aproximadamente 1.8.

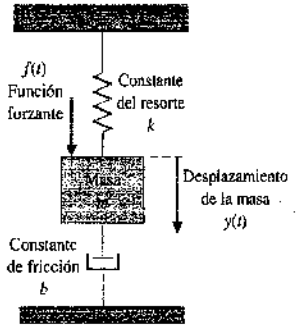


FIGURA PM2.4. Un sistema mecánico resorte-masa-amortiguador.

PM2.5. Un sistema de control de altitud de un satélite de eje simple se puede representar por el diagrama de bloques de la Figura PM2.5. Las variable k, a y b son parámetros del controlador y J es el momento de inercia del vehículo espacial. Supógase que el momento de inercia nominal es $J = 10.8$ E + +08 (slug-ft^2) y los parámetros del controlador son $k = 10.8$ E + + 08, $a = 1$ y $b = 8$.
(a) Desarróllese un programa en MATLAB para calcular la función de transferencia en lazo cerrado $T(s) = \theta(s)/\theta_d(s)$.
(b) Calcúlese y represéntese gráficamente la respuesta escalón a una entrada en escalón de 10°.

(c) El momento de inercia exacto es generalmente desconocido y puede cambiar lentamente con el tiempo. Compárese el comportamiento de la respuesta en escalón del vehículo espacial cuando J se reduce el 20% y el 50%. Utilícense los parámetros del controlador $k = 10.8e + 06$, $a = 1$ y $b = 8$ y una entrada en escalón de 10°. Analícense los resultados.

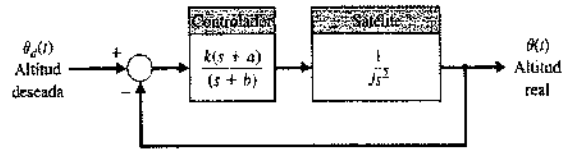


FIGURA PM2.5
Diagrama de bloques del control de altitud de una nave espacial con un solo eje.

PM2.6. Sea el diagrama de bloques de la Figura PM2.6.
(a) Utilícese MATLAB para reducir el diagrama de bloques de la Figura PM2.6 y calcúlese la función de transferencia en lazo cerrado.
(b) Genérese un mapa de polos-ceros de la función de transferencia en lazo cerrado en forma gráfica usando la función pzmap.
(c) Determínese explícitamente los polos y ceros de la función de transferencia en lazo cerrado empleando las funciones pole y zero y correlaciónense los resultados con el mapa de polos-ceros de la parte (b).

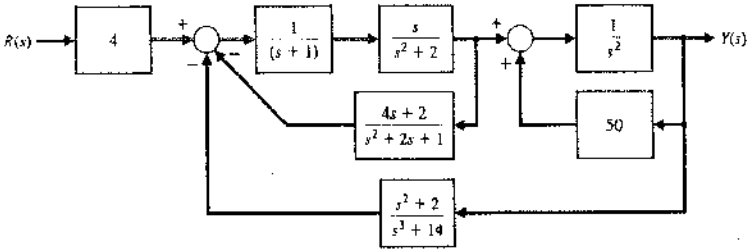


FIGURA PM2.6
Diagrama de bloques de un sistema de control con múltiples lazos.

PM2.7. La relación entre la salida $y(t)$ y la entrada $u(t)$ de un sistema no lineal está dada por

$$y(x) = x^2 + x \operatorname{sen} x.$$

Una aproximación lineal está dada por

$$\bar{y} = ax,$$

donde a es un coeficiente que tiene que determinarse. Calcúlese el parámetro a **experimentalmente** desarrollando un programa en MATLAB que calcula y representa gráficamente la diferencia entre y e $\bar{y}$ con el parámetro a como un parámetro ajustable. Varíese el parámetro a iterativamente de forma que la diferencia máxima entre entre y e $\bar{y}$ sea menor que 20 siempre que $0 \leq x \leq 10$. Con el valor final de a determinado, represéntese gráficamente $y(x)$ respecto de x e $\bar{y}(x)$ respecto de x con $0 \leq x \leq 10$.

PM2.8. Un sistema tiene una función de transferencia

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{(15/z)(s+z)}{s^2 + 3s + 15}.$$

Represéntese gráficamente la respuesta del sistema cuando $R(s)$ es un escalón unitario para el parámetro $z = 3$, 6 y 12.

PM2.9. Sea el sistema de control con realimentación de la Figura MP2.9, donde

$$G(s) = \frac{s+1}{s+2} \quad \text{y} \quad H(s) = \frac{1}{s+1}$$

(a) Utilizando MATLAB determínese la función de transferencia en lazo cerrado.
(b) Obtener el mapa de polos-ceros empleando la función pzmap. ¿Dónde están los polos y ceros del sistema en lazo cerrado?
(c) ¿Hay alguna cancelación de polo-cero? Si la hay, utilícese la función minreal para cancelar los polos y ceros comunes en la función de transferencia en lazo cerrado.
(d) ¿Por qué es importante cancelar polos y ceros comunes en la función de transferencia?

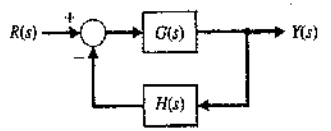


FIGURA PM2.9. Sistema de control con realimentación no unitaria.

TÉRMINOS Y CONCEPTOS

Actuador. Dispositivo que origina que el proceso proporcione la salida. El dispositivo que proporciona la potencia motriz al proceso.

Amortiguamiento crítico. Caso en el que el amortiguamiento está en la frontera entre subamortiguado y sobreamortiguado.

Aproximación lineal. Modelo aproximado que da como resultado una aproximación lineal entre la salida y la entrada del dispositivo

Ceros. Raíces del polinomio del numerador de la función de transferencia.

Condición necesaria. Condición o sentencia que debe ser satisfecha para lograr un efecto deseado o resultado. Por ejemplo, para un sistema lineal es necesario que la entrada $u_1(t) + u_2(t)$ produzca como resultado la respuesta $y_1(t) + y_2(t)$, donde la entrada $u_1(t)$ genera la respuesta $y_1(t)$ y la entrada $u_2(t)$ la respuesta $y_2(t)$.

Constante de tiempo. Intervalo de tiempo necesario para que un sistema cambie de un estado a otro en un porcentaje especificado. Para un sistema de primer orden, la constante de tiempo es el tiempo que tarda la salida para manifestar un cambio del 63.2% debido a un escalón en la entrada.

Diagramas de bloques. Bloques operacionales, unidireccionales que representan las funciones de transferencia de los elementos del sistema.

Ecuación característica. Relación formada al igualar a cero el denominador de una función de transferencia.

Ecuación diferencial. Ecuación que incluye diferenciales de una función.

Entrada de referencia. Entrada a un sistema de control con frecuencia que representa la salida deseada, denotada por $R(s)$.

Estado estacionario. Valor que la salida alcanza después que todos los constituyentes del transitorio de la respuesta han decaído. También conocido como el valor final.

Frecuencia natural. Frecuencia de oscilación natural que ocurriría para dos polos complejos conjugados si el amortiguamiento fuera igual a cero.

Función de transferencia en lazo cerrado. Razón de la señal de salida a la señal de entrada para una interconexión de sistemas cuando todas las realimentaciones o prealimentaciones han sido cerradas o tenidas en cuenta. Generalmente se obtiene mediante reducción del diagrama de bloques o del grafo de flujo de señal.

Función de transferencia. Razón de la transformada de Laplace de la variable de salida a la transformada de Laplace de la variable de entrada.

Grafo de flujo de señal. Diagrama que consiste en nodos conectados por algunas ramas dirigidas y que es una representación gráfica de un conjunto de relaciones lineales.

Hipótesis. Sentencias que reflejan situaciones y condiciones que se dan por supuesto y sin pruebas. En sistemas de control, las hipótesis se emplean a menudo para simplificar los modelos dinámicos físicos de los sistemas considerados para hacer más tratable el problema de diseño de control.

Homogeneidad. Propiedad de un sistema lineal en el cual la respuesta del sistema $y(t)$ a una entrada $u(t)$ conduce a la respuesta $\beta y(t)$ cuando la entrada es $\beta u(t)$.

Linealizado. Hecho lineal o colocado de una forma lineal. Las aproximaciones en serie de Taylor se emplean normalmente para obtener modelos lineales de sistemas físicos.

Modelos matemáticos. Descripciones de la conducta de un sistema usando matemáticas.

Motor de cc. Un actuador eléctrico que utiliza un voltaje de entrada como una variable de control.

Oscilación amortiguada. Oscilación en la cual la amplitud decrece con el tiempo.

Plano *s*. Plano complejo, donde dado el número complejo $s = \sigma + j\omega$, el eje x (o eje horizontal) es el eje σ y el eje y (o eje vertical) es el eje $j\omega$.

Polos. Raíces del polinomio del denominador (es decir las raíces de la ecuación característica) de la función de transferencia.

Principio de superposición. Ley que dice que si dos entradas se escalan y suman y se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo, entonces la salida será idéntica a la suma de las salidas debidas a las entradas individuales escaladas cuando se introducen a través del mismo sistema.

Razón de amortiguamiento. Medida del amortiguamiento. Un número adimensional para la ecuación característica de segundo orden.

Realimentación unitaria. Sistema de control con realimentación donde la ganancia del lazo de realimentación es uno.

Regla de lazo de Mason. Regla que permite al usuario obtener una función de transferencia en función de las trayectorias y lazos dentro del sistema.

Residuos. Las constantes k_p asociadas con el desarrollo en fracciones simples de la salida $Y(s)$, cuando la salida se escribe en un formato residuo-polo.

Señal de error. Diferencia entre la salida deseada $R(s)$ y la salida real $Y(s)$; por tanto, $E(s) = R(s) - Y(s)$.

Serie de Taylor. Serie de potencia definida por $g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m$. Para $m < \infty$, la serie es una aproximación que se utiliza para linealizar funciones y modelos de sistemas.

Simulación. Modelo de un sistema que se emplea para investigar la conducta de un sistema utilizando las señales de entrada reales.

Sistema lineal. Sistema que satisface las propiedades de superposición y homogeneidad.

Sobreamortiguado. Caso en que la razón de amortiguamiento es $\zeta > 1$.

Subamortiguado. Caso en que la razón de amortiguamiento es $\zeta < 1$.

Teorema del valor final. Teorema que dice que $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$, donde $Y(s)$ es la transformada de Laplace de $y(t)$.

Transformada de Laplace. Transformación de una función $f(t)$ del dominio temporal en el dominio de la frecuencia compleja dando $F(s)$.

Valor final. Valor que la salida alcanza después que todos los constituyentes transitorios de la respuesta han decaído. También conocido como el valor en estado estacionario.

CAPÍTULO 3

Modelos en variables de estado

3.1. Introducción 131
3.2. Las variables de estado de un sistema dinámico 131
3.3. La ecuación diferencial del estado 134
3.4. Modelos de grafos de flujo de señal y diagramas de bloques 137
3.5. Modelos alternativos de grafos de flujo de señal y diagramas de bloques 147
3.6. La función de transferencia de la ecuación de estado 153
3.7. La respuesta temporal y la matriz de transición de estado 154
3.8. Una evaluación en tiempo discreto de la respuesta temporal 158
3.9. Ejemplo de diseño: Impresora con transmisión por correa 163
3.10. Análisis de modelos de variables de estado utilizando MATLAB 170
3.11. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 173
3.12. Resumen 176

SINOPSIS

En el capítulo anterior se utilizó la transformada de Laplace para obtener modelos de función de transferencia que representan sistemas físicos lineales e invariantes en el tiempo descritos mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. Este método es atractivo porque proporciona un método práctico para diseñar y analizar y permite utilizar diagrama de bloques para interconectar subsistemas. En este capítulo se utiliza un método alternativo de modelado de sistemas utilizando métodos en el dominio del tiempo. Al igual que antes, se considerarán sistemas físicos descritos por una ecuación diferencial ordinaria de orden n-ésimo. Utilizando un conjunto de variables (no único), conocido como variables de estado, se puede obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. Se pueden agrupar estas ecuaciones de primer orden utilizando una notación matricial compacta en un modelo conocido como modelo en variables de estado. El modelo en variables de estado en el dominio del tiempo permite fácilmente calcular la solución y analizarla. Se analiza la relación entre los modelos gráficos de flujo de señal y los modelos en variables de estado. Se presentan y analizan varios sistemas físicos interesantes, incluida una impresora con transmisión por correa. El capítulo finaliza con el desarrollo de un modelo en variables de estado para el Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco.

3.1. INTRODUCCION

En el capítulo anterior se desarrollaron y estudiaron varios métodos de análisis y diseño de sistemas de realimentación. Se utilizó la transformada de Laplace para convertir las ecuaciones diferenciales que representan el sistema en una ecuación algebraica expresada en términos de la variable compleja s. Con esta ecuación algebraica se obtuvo una representación de la relación entrada-salida como función de transferencia.

Con la aparición de los computadores digitales conviene considerar la formulación en el dominio del tiempo de las ecuaciones que describen los sistemas de control. Las técnicas en el dominio del tiempo se utilizan para sistemas no lineales, variantes en el tiempo y multivariables.

Un sistema de control variante en el tiempo es un sistema en el que uno o más de sus parámetros pueden variar en función del tiempo.

Por ejemplo, la masa de un proyectil varía en función del tiempo a medida que se gasta el combustible durante el vuelo. Un sistema multivariable, como el analizado en la Sección 2.6, es un sistema con varias señales de entrada y salida. La solución de una formulación en el dominio del tiempo para un problema de sistemas de control, se facilita con la disponibilidad y fácil utilización de computadores digitales. Por tanto, interesa reconsiderar la descripción en el dominio del tiempo de los sistemas dinámicos según su representación mediante ecuaciones diferenciales. El **dominio en el tiempo** es el dominio matemático que incorpora la respuesta y la descripción de un sistema en función del tiempo, t.

La representación de los sistemas de control en el dominio del tiempo es una base fundamental para la teoría moderna de control y optimización de sistemas. En el Capítulo 11 se tendrá oportunidad de diseñar un sistema de control óptimo utilizando los métodos del dominio del tiempo. En este capítulo se desarrollará la representación de los sistemas de control en el dominio del tiempo y se ilustrarán varios métodos para la solución de la respuesta del sistema en el tiempo.

3.2. LAS VARIABLES DE ESTADO DE UN SISTEMA DINÁMICO

En el análisis y diseño de los sistemas de control en el dominio del tiempo se utiliza el concepto de estado de un sistema [1-3, 5].

El estado de un sistema es un conjunto de variables (mínimo) cuyo conocimiento de estas variables y de las funciones de entrada, junto con las ecuaciones que describen la dinámica, proporcionan la salida y el estado futuro del sistema.

Para un sistema dinámico, el estado de un sistema se describe en función de un conjunto de **variables de estado** $[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$. Estas variables son las que determinan el comportamiento futuro de un sistema cuando se conocen el estado presente de éste y las señales de excitación. Considérese el sistema mostrado en la Figura 3.1, donde

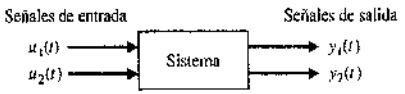


FIGURA 3.1
Diagrama de bloques del sistema.

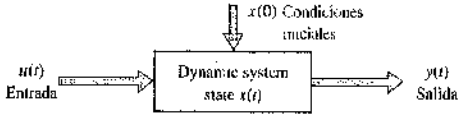


FIGURA 3.2
Sistema dinámico.

$y_1(t)$ e $y_2(t)$ son las señales de salida y $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son las señales de entrada. Un conjunto de variables de estado $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para el sistema mostrado en la figura, es un conjunto tal que el conocimiento de los valores iniciales de las variables de estado $[x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)]$ en el tiempo inicial t_0 y las señales de entrada $u_1(t)$ y $u_2(t)$ para $t = t_0$, son suficientes para determinar los valores futuros de las salidas y de las variables de estado [2].

Las variables de estado describen la respuesta futura de un sistema, conocido el estado presente, las señales de excitación y las ecuaciones que describen la dinámica.

La Figura 3.2 muestra la forma general de un sistema dinámico.

Un ejemplo sencillo de variable de estado es el estado de un interruptor de luz de encendido y apagado. El interruptor puede estar en una de sus dos posiciones, por lo que puede suponerse que su estado puede tener uno de los dos valores posibles. Por tanto, si se conoce el estado presente (posición) del interruptor en t_0 y si se aplica una entrada, se puede determinar el valor futuro del estado del elemento.

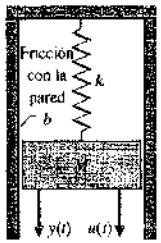


FIGURA 3.3
Sistema resorte-masa-amortiguador.

El concepto de conjunto de variables de estado que representan un sistema dinámico puede ilustrarse en términos del sistema resorte-masa-amortiguador de la Figura 3.3. El número de variables de estado elegidas para representar este sistema deberá ser lo más bajo posible, con el objeto de evitar variables de estado redundantes. Un conjunto suficiente de variables de estado para describir este sistema son la posición y la velocidad de la masa. Por tanto, se definirá un conjunto de variables de estado como (x_1, x_2), donde

$$x_1(t) = y(t) \quad \text{y} \quad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}.$$

La ecuación diferencial describe el comportamiento del sistema, y generalmente se escribe

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = u(t). \tag{3.1}$$

Con el objeto de escribir la Ecuación (3.1) en función de las variables de estado, se sustituye la definición de éstas para obtener

$$M\frac{dx_2}{dt} + bx_2 + kx_1 = u(t). \tag{3.2}$$

Por tanto, se pueden escribir las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema resorte-masa-amortiguador como un conjunto de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2. \tag{3.3}$$

y

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-b}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1 + \frac{1}{M}u. \tag{3.4}$$

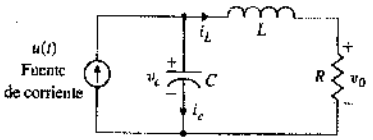


FIGURA 3.4
Circuito *RLC*.

Este conjunto de ecuaciones diferenciales describe el comportamiento del estado del sistema en función de la relación de cambio de cada variable de estado.

Por poner otro ejemplo de la caracterización de la variable de estado de un sistema, considérese el circuito *RLC* de la Figura 3.4. El estado de este sistema puede describirse en función de un conjunto de variables de estado (x_1, x_2), donde x_1 es el voltaje del condensador $v_c(t)$ y x_2 es igual a la corriente del inductor $i_L(t)$. Esta elección de las variables de estado es intuitivamente satisfactoria, pues la energía almacenada en la red puede describirse en función de estas variables como

$$\mathscr{E} = (1/2)Li_L^2 + (1/2)Cv_c^2. \tag{3.5}$$

Por consiguiente, $x_1(t_0)$ y $x_2(t_0)$ representan la energía inicial total de la red y, por tanto, el estado del sistema en $t = t_0$. Para una red pasiva *RLC*, el número necesario de variables de estado es igual al número de elementos independientes de almacenamiento de energía. Utilizando la ley de la corriente de Kirchhoff en la unión, se obtiene una ecuación diferencial de primer orden que describe la relación de cambio del voltaje del condensador como

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt} = +u(t) - i_L. \tag{3.6}$$

La ley del voltaje de Kirchhoff para el lazo de la parte derecha proporciona la ecuación que describe la relación del cambio de la corriente del inductor como

$$L\frac{di_L}{dt} = -Ri_L + v_c. \tag{3.7}$$

La salida de este sistema se representa por la ecuación algebraica lineal

$$v_0 = Ri_L(t).$$

Se pueden escribir ahora las Ecuaciones (3.6) y (3.7) como un conjunto de dos ecuaciones diferenciales de primer orden en función de las variables de estado x_1 y x_2 como sigue:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t), \tag{3.8}$$

y

$$\frac{dx_2}{dt} = +\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2. \tag{3.9}$$

La señal de salida es

$$y_1(t) = v_0(t) = Rx_2. \tag{3.10}$$

Utilizando las Ecuaciones (3.8) y (3.9) y las condiciones iniciales de la red representadas por $[x_1(t_0), x_2(t_0)]$, se puede determinar el comportamiento futuro y la salida del sistema.

Las variables de estado que describen un sistema no son un conjunto único y pueden escogerse varios conjuntos alternativos de variables de estado. Por ejemplo, para un sis-

tema de segundo orden, como el sistema masa-resorte-amortiguador o el circuito *RLC*, las variables de estado pueden ser dos combinaciones lineales independientes cualesquiera de $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Por tanto, para el circuito *RLC*, se podría escoger el conjunto de variables de estado como los dos voltajes, $v_c(t)$ y $v_L(t)$, donde v_L es la caída de voltaje a través del inductor. Entonces las nuevas variables de estado, x_1^* y x_2^*, se relacionan con las variables del estado anteriores x_1 y x_2, como

$$x_1^* = v_c = x_1, \tag{3.11}$$

y

$$x_2^* = v_L = v_i - Ri_L = x_1 - Rx_2. \tag{3.12}$$

La Ecuación (3.12) representa la relación entre el voltaje del inductor y las primeras variables de estado v_c e i_L. Por esto, en un sistema real hay varias elecciones de conjuntos de variables de estado que especifican la energía almacenada en el sistema, por lo que describen adecuadamente la dinámica de éste. Una elección ampliamente usada es un conjunto de variables de estado que puedan medirse fácilmente.

Un método alternativo para desarrollar el modelo de algún dispositivo es la utilización del grafo de enlace. Los grafos de enlace se pueden utilizar para dispositivos o sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos y térmicos, así como para combinaciones de varios tipos de elementos. Los grafos de enlace proporcionan un sistema de ecuaciones en forma de variables de estado [7].

Las variables de estado de un sistema caracterizan el comportamiento dinámico de éste. El interés del ingeniero está principalmente en sistemas físicos donde las variables son voltajes, corrientes, velocidades, posiciones, presiones, temperaturas y variables físicas similares. Sin embargo, el concepto de estado de un sistema no está limitado al análisis de sistemas físicos, y es particularmente útil en análisis de sistemas biológicos, sociales y económicos. Para estos sistemas, el concepto de estado se extiende más allá del concepto de energía de un sistema físico, hasta el punto de vista más amplio de variables que describen el comportamiento futuro del sistema.

3.3. LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL ESTADO

El estado de un sistema se describe por el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden escritas en función de las variables de estado (x_1, x_2, ..., x_n). Estas ecuaciones pueden escribirse de forma general como

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1m}u_m \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2m}u_m \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nm}u_m
\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde $\dot{x} = dx/dt$. Por ello, este conjunto de ecuaciones diferenciales simultáneas puede escribirse de forma matricial como sigue [2, 5]:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

La matriz de columnas formada por las variables de estado se denomina **vector de estado** y se escribe

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

donde la letra en negrita indica un vector. El vector de las señales de entrada se define como **u**. Entonces el sistema puede representarse mediante la notación compacta de la **ecuación diferencial de estados** como

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}.} \tag{3.16}$$

La ecuación diferencial (3.16) también suele denominarse ecuación de estado.

A es una matriz cuadrada de $n \times n$ y **B** es una matriz de $n \times m$[1]. La ecuación diferencial de estados relaciona la rapidez de cambio en el estado del sistema con el estado del sistema y las señales de entrada. En general, las salidas de un sistema lineal pueden relacionarse con las variables de estado y con las señales de entrada por la **ecuación de salida**

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u},} \tag{3.17}$$

donde **y** es el conjunto de señales de salida expresado en forma de vector columna. La **representación en el espacio de estados** (o la representación en variables de estado) consta de la ecuación diferencial de estados y la ecuación de salida.

Se pueden utilizar las Ecuaciones (3.8) y (3.9) para obtener la ecuación diferencial en variables de estado del circuito *RLC* de la Figura 3.4 como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & \dfrac{-R}{L} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \tag{3.18}$$

y la salida como

$$y = [0 \quad R]\mathbf{x}. \tag{3.19}$$

Cuando $R = 3$, $L = 1$ y $C = 1/2$, se tiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

y

$$y = [0 \quad 3]\mathbf{x}.$$

La solución de la ecuación diferencial del vector de estado (Ecuación 3.16) puede obtenerse por un método semejante al utilizado para resolver una ecuación diferencial de primer orden. Considérese la ecuación de primer orden

$$\dot{x} = ax + bu, \tag{3.20}$$

[1] Las letras negritas minúsculas representan magnitudes vectoriales y las negritas mayúsculas representan matrices. Para una introducción sobre matrices y operaciones elementales con matrices, se puede consultar la página web de MCS y las referencias [1] y [2].

donde $x(t)$ y $u(t)$ son funciones escalares del tiempo. Se espera una solución exponencial de la forma e^{at}. Tomando la transformada de Laplace de la Ecuación (3.20), se tiene

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s);$$

y, por tanto,

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s). \tag{3.21}$$

La transformada inversa de Laplace de la Ecuación (3.21) da como resultado la solución

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{+a(t-\tau)}bu(\tau)\,d\tau. \tag{3.22}$$

Se espera que la solución de la ecuación diferencial vectorial de estado sea semejante a la Ecuación (3.22) y de forma exponencial. La **función exponencial matricial** se define como

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t} = \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^kt^k}{k!} + \cdots,} \tag{3.23}$$

que converge para todo t finito y cualquier $\mathbf{A}$ [2]. Entonces se encuentra que la solución de la ecuación diferencial del vector de estado es

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t-\tau)]\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau. \tag{3.24}$$

La Ecuación (3.24) puede conseguirse tomando la transformada de Laplace de la Ecuación (3.16) y reordenando para obtener

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s), \tag{3.25}$$

donde se observa que $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \Phi(s)$, que es la transformada de Laplace de $\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)$. Tomando la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (3.25) y notando que el segundo término de la parte derecha incluye el producto $\Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$, se obtiene la Ecuación (3.24). La función exponencial matricial describe la respuesta no forzada del sistema y se conoce como **matriz fundamental** o de **transición de estados** $\Phi(t)$. Por tanto, la Ecuación (3.24) puede escribirse como

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau.} \tag{3.26}$$

La solución del sistema no forzado (es decir, cuando $\mathbf{u} = 0$) es simplemente

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \cdots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \cdots & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \cdots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

Por consiguiente, se observa que para determinar la matriz de transición de estados, todas las condiciones iniciales se igualan a cero, con excepción de una variable de estado, y se calcula la salida de cada variable de estado. Es decir, el término $\phi_{ij}(t)$ es la respuesta de la variable de estado i-ésima debida a una condición inicial en la variable de estado j-ésima cuando hay condiciones iniciales iguales a cero en los restantes estados. Se utiliza esta relación entre las condiciones iniciales y las variables de estado para calcular los coeficientes de la matriz de transición en una sección posterior. Sin embargo, primero se desarrollan varios modelos adecuados de flujo de señal de estado y se estudia la estabilidad de los sistemas utilizando estos grafos de flujo.

3.4. MODELOS DE GRAFOS DE FLUJO DE SEÑAL Y DIAGRAMAS DE BLOQUES

El estado de un sistema describe el comportamiento dinámico de un sistema cuya dinámica está representada por una serie de ecuaciones diferenciales de primer orden. Alternativamente, las dinámicas del sistema pueden representarse por una ecuación diferencial como la (3.16). En cualquier caso, es útil desarrollar un modelo gráfico del sistema y usar este modelo para relacionar el concepto de variables de estado con la representación usual de función de transferencia. El modelo gráfico se puede representar mediante los grafos de señales de flujo o diagramas de bloques.

Como se ha aprendido en capítulos anteriores, un sistema puede describirse significativamente mediante una relación entrada-salida, la función de transferencia $G(s)$. Por ejemplo, si se está interesado en la relación entre el voltaje de salida y el de entrada de la red de la Figura 3.4, se puede obtener la función de transferencia

$$G(s) = \frac{V_0(s)}{U(s)}.$$

La función de transferencia para la red *RLC* de la Figura 3.4 adopta la forma

$$G(s) = \frac{V_0(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{s^2 + \beta s + \gamma}, \tag{3.28}$$

donde α, β y γ son funciones de los parámetros del circuito R, L y C, respectivamente. Los valores de α, β y γ pueden determinarse por las ecuaciones diferenciales que describen el circuito. Para el circuito *RLC* [*véanse* las Ecuaciones (3.8) y (3.9)], se tiene

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t), \tag{3.29}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2, \tag{3.30}$$

y

$$v_0 = Rx_2. \tag{3.31}$$

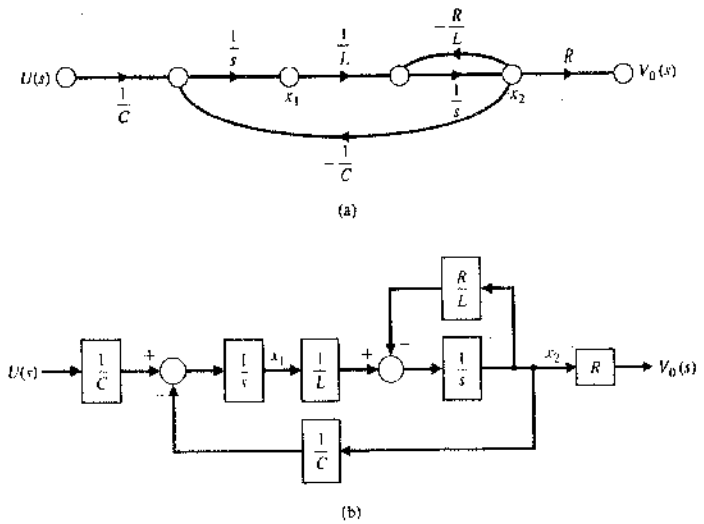


FIGURA 3.5
Red *RLC*. (a) Grafo de señal de flujo (b) Diagrama de bloques.

En la Figura 3.5(a) se muestra el grafo de flujo que representa estas ecuaciones simultáneas, donde $1/s$ indica una integración. En la Figura 3.5(b) se muestra el modelo del diagrama de bloques correspondiente. La función de transferencia resultante es

$$\frac{V_0(s)}{U(s)} = \frac{+R/LCs^2}{1 + (R/L)s + (1/LCs^2)} = \frac{+R/LC}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}. \tag{3.32}$$

Lamentablemente, muchos circuitos eléctricos, sistemas electromecánicos y otros sistemas de control no son tan sencillos como el circuito *RLC* de la Figura 3.4, y frecuentemente es una tarea difícil determinar una serie de ecuaciones diferenciales de primer orden que describan el sistema. Por tanto, suele ser más sencillo deducir la función de transferencia del sistema por las técnicas del Capítulo 2 y después deducir el modelo de estado mediante la función de transferencia.

El modelo de estado de grafo de flujo de señal y el modelo de diagrama de bloques se pueden deducir fácilmente a partir de la función de transferencia del sistema. Sin embargo, como se ha observado en la Sección 3.3, existe más de un conjunto alternativo de variables de estado y, por tanto, hay más de una forma posible para los modelos de estado de grafo de flujo de señal y de diagrama de bloques. Existen varias **formas canónicas** de la representación en variables de estado, como la forma canónica de variable de fase, que se estudiará en este capítulo. En general, se puede representar una función de transferencia como

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{3.33}$$

donde $n \geq m$ y todos los coeficientes a y b son números reales. Si se multiplica el numerador y el denominador por s^{-n}, se obtiene

$$G(s) = \frac{b_m s^{-(n-m)} + b_{m-1}s^{-(n-m+1)} + \cdots + b_1 s^{-(n-1)} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1}s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-(n-1)} + a_0 s^{-n}}. \tag{3.34}$$

El conocimiento de la fórmula de Mason para la ganancia del grafo de flujo permite reconocer los factores usuales de realimentación en el denominador y los factores de la trayectoria de avance en el numerador. La fórmula de Mason del grafo de flujo se analizó en la Sección 2.7 y se escribe como

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta}. \tag{3.35}$$

Cuando todos los lazos de realimentación se tocan y todas las trayectorias de avance tocan los lazos de realimentación, la Ecuación (3.35) se reduce a

$$G(s) = \frac{\sum_k P_k}{1 - \sum_{q=1}^{N} L_q} = \frac{\text{Suma de los factores de la trayectoria de avance}}{1 - \text{suma de los factores de lazos de realimentación}}. \tag{3.36}$$

Existen varios grafos de flujo que pueden representar la función de transferencia. Son de particular interés dos configuraciones basadas en la fórmula de Mason para la ganancia del grafo de flujo, las cuales se considerarán con mayor detalle. En la sección siguiente, se considerarán dos configuraciones adicionales: el modelo de variables de estado físicas y el modelo de forma diagonal (o canónica de Jordan).

Para ilustrar la deducción del modelo de estado de grafo de flujo de señal, se considerará inicialmente la función de transferencia de cuarto orden

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{b_0 s^{-4}}{1 + a_3 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_1 s^{-3} + a_0 s^{-4}}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Primero se observa que el sistema es de cuarto orden, por lo que se identifican cuatro variables de estado (x_1, x_2, x_3, x_4). Recordando la fórmula de Mason para la ganancia de flujo de señal, se observa que el denominador puede considerarse como uno menos la suma de las ganancias del lazo. Además, el numerador de la función de transferencia es igual al factor de la trayectoria de avance del grafo de flujo. Este grafo debe utilizar un número mínimo de integradores igual al orden del sistema. Por tanto, usamos cuatro integradores para representar este sistema. En la Figura 3.5 se muestran los nodos necesarios del grafo de flujo, así como los cuatro integradores. Por tanto, se utilizan cuatro integradores para representar este sistema. Los nodos necesarios en el grafo de flujo y los cuatro integradores se muestran en la Figura 3.6. Considerando la interconexión más

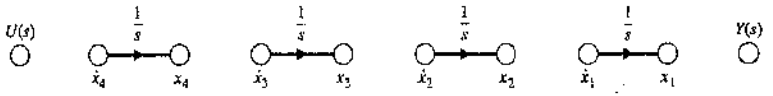


FIGURA 3.6. Nodos e integradores de grafos de flujo para un sistema de cuarto orden.

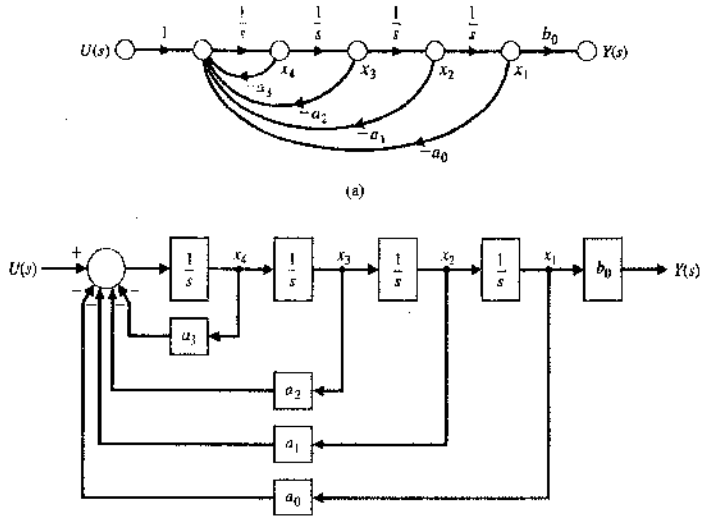


FIGURA 3.7
Modelo para $G(s)$ de la Ecuación (3.37). (a) Grafo de flujo de señal. (b) Diagrama de bloques.

sencilla de integradores en serie, se puede representar la función de transferencia por el grafo de flujo de la Figura 3.7. Examinando esta figura, se observa que todos los lazos se tocan y que la función de transferencia de este grafo de flujo es realmente la Ecuación (3.37). Esto puede verificarse fácilmente observando que el factor de la trayectoria directa del grafo de flujo es b_0/s^4 y que el denominador es igual a 1 menos la suma de las ganancias de los lazos.

También se puede considerar el modelo de diagrama de bloques de la Ecuación (3.37). Reordenando los términos en la Ecuación (3.37) y tomando la transformada inversa de Laplace se obtiene la ecuación diferencial del modelo

$$\frac{d^4(y/b_0)}{dt^4} + a_3\frac{d^3(y/b_0)}{dt^3} + a_2\frac{d^2(y/b_0)}{dt^2} + a_1\frac{d(y/bg_0)}{dt} + a_0 y = u.$$

Se definen las cuatro variables de estado como sigue:

$$\begin{aligned} x_1 &= y/b_0 \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{y}/b_0 \\ x_3 &= \dot{x}_2 = \ddot{y}/b_0 \\ x_4 &= \dot{x}_3 = \dddot{y}/b_0. \end{aligned}$$

En este caso la ecuación diferencial de cuarto orden puede escribirse de manera equivalente como cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden, esto es,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \end{aligned}$$

y

$$\dot{x}_4 = -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4 + u;$$

y la correspondiente ecuación de salida es

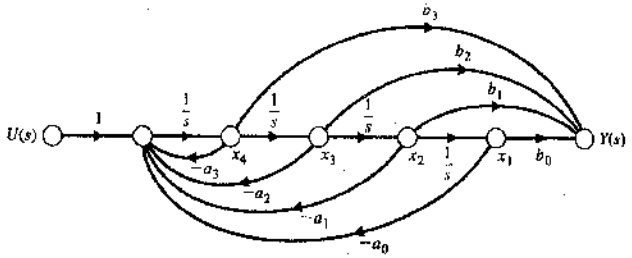
$$y = b_0x_1.$$

El modelo de diagrama de bloques se puede obtener fácilmente de las cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden como se muestra en la Figura 3.7(b).

Ahora bien, se considera la función de transferencia de cuarto orden cuando el polinomio del numerador es un polinomio en s tal que se tiene

$$G(s) = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} = \frac{b_3s^{-1} + b_2s^{-2} + b_1s^{-3} + b_0s^{-4}}{1 + a_3s^{-1} + a_2s^{-2} + a_1s^{-3} + a_0s^{-4}}. \tag{3.38}$$

Los términos del numerador representan los factores de la trayectoria de avance en la fórmula de Mason para la ganancia de flujo de señal. Las trayectorias de avance tocarán todos los lazos; en la Figura 3.8(a) se muestra una representación adecuada del grafo de flujo de señal de la Ecuación (3.38). Los factores de las trayectorias de avance son b_3/s,



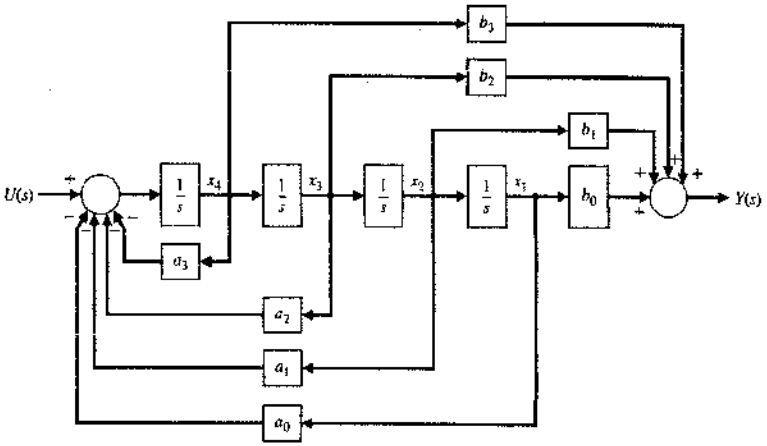


FIGURA 3.8
Modelo para $G(s)$ de la Ecuación (3.38) en el formato de variable de fase. (a) Grafo de flujo de señal. (b) Diagrama de bloques.

b_2/s^2, b_1/s^3 y b_0/s^4, como se requiere para proporcionar el numerador de la función de transferencia. Recuérdese que la fórmula de Mason para la ganancia del grafo de flujo indica que el numerador de la función de transferencia es simplemente la suma de los factores de las trayectorias de avance. Esta forma general de grafo de flujo de señal puede representar la función de transferencia general de la Ecuación (3.38) utilizando n lazos de realimentación que incluyan los coeficientes a_n y m factores de trayectoria directa que incluyan los coeficientes b_m. La forma general del modelo de estado de grafo de flujo y el modelo de diagrama de bloques que se muestra en la Figura 3.8 se denomina **forma canónica de la variable de fase.**

En la Figura 3.8 se identifican las variables de estado como la salida de cada elemento de almacenamiento de energía; es decir, las salidas de todos los integradores. Para obtener el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que representen el modelo de estado de la Ecuación (3.38), se incluirá un nuevo conjunto de nodos de grafos de flujo inmediatamente antes de cada integrador de la Figura 3.8(a) [5, 6]. Como los nodos se colocan antes de cada integrador, representan la derivada de la salida de cada integrador. El grafo de flujo de señal, incluyendo los nodos añadidos, se muestra en la Figura 3.9. Usando el grafo de flujo de la esta figura, se puede obtener el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el estado del modelo:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4,$$
$$\dot{x}_4 = -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4 + u. \tag{3.39}$$

En esta ecuación, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las n **variables de fase**.

El modelo de diagrama de bloques se puede construir directamente de la Ecuación (3.38). Se define la variable intermedia $Z(s)$ y la Ecuación (3.38) se puede reescribir como

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}\frac{Z(s)}{Z(s)}.$$

Obsérvese que, al multiplicar por $Z(s)/Z(s)$, la función de transferencia $G(s)$ no cambia. Igualando los polinomios del numerador y del denominador se obtiene

$$Y(s) = [b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0]Z(s)$$

y

$$U(s) = [s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0]Z(s).$$

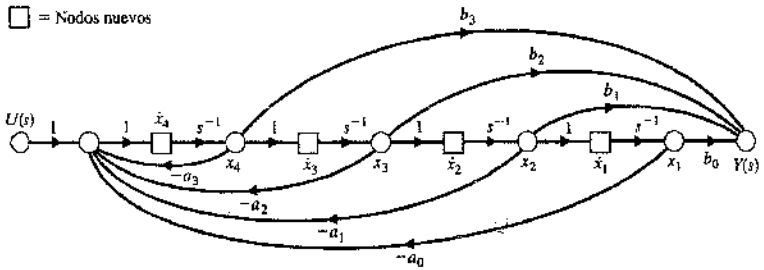


FIGURA 3.9
Grafo de flujo de la Figura 3.8 con los nodos insertados.

Tomando la transformada inversa de Laplace en ambas ecuaciones se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$y = b_3\frac{d^3z}{dt^3} + b_2\frac{d^2z}{dt^2} + b_1\frac{dz}{dt} + b_0z$$

y

$$u = \frac{d^4z}{dt^4} + a_3\frac{d^3z}{dt^3} + a_2\frac{d^2z}{dt^2} + a_1\frac{dz}{dt} + a_0z.$$

Se definen las cuatro variables de estado como sigue:

$$x_1 = z$$
$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}$$
$$x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{z}$$
$$x_4 = \dot{x}_3 = \dddot{z}.$$

Por tanto, la ecuación diferencial se puede escribir de forma equivalente como

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_3,$$
$$\dot{x}_3 = x_4,$$

y

$$\dot{x}_4 = -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4 + u,$$

y la correspondiente ecuación de salida es

$$y = b_0x_1 + b_1x_2 + b_2x_3 + b_3x_4.$$

El modelo de diagrama de bloques se puede obtener fácilmente de las cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden y de la ecuación de salida como se muestra en la Figura 3.8(b).

Además, la salida es simplemente

$$y(t) = b_0x_1 + b_1x_2 + b_2x_3 + b_3x_4. \tag{3.40}$$

En forma matricial, se puede representar el sistema de la Ecuación (3.38) como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \tag{3.41}$$

o

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t), \tag{3.42}$$

y la salida es

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x} = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \tag{3.43}$$

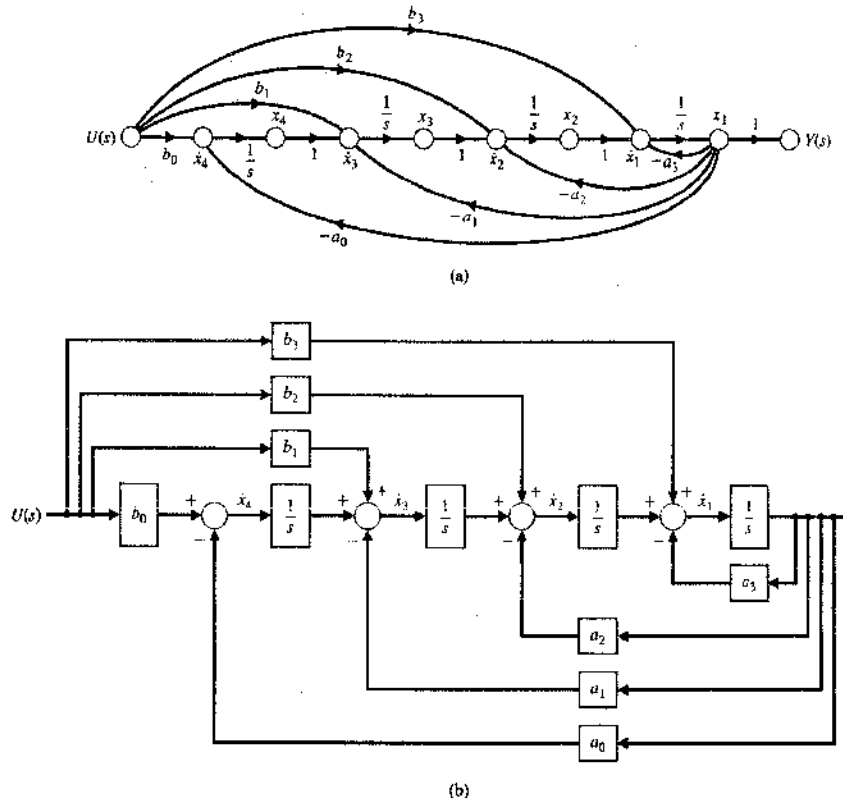


FIGURA 3.10. (a) Modelo de estado alternativo de grafo de flujo para la Ecuación (3.38). Este modelo se denomina forma canónica de entrada de prealimentación. (b) Diagrama de bloques de la forma canónica de entrada de prealimentación.

Las estructuras gráficas de la Figura 3.8 no son las únicas representaciones de la Ecuación (3.38); puede obtenerse otra estructura igualmente útil. En la Figura 3.10(a) se muestra un grafo de flujo que representa igualmente bien la Ecuación (3.38). En este caso los factores de trayectoria de avance se obtienen alimentando por adelantado la señal $U(s)$. Este modelo se denomina **forma canónica de entrada de prealimentación**.

Entonces la señal de salida $y(t)$ es igual a la primera variable de estado $x_1(t)$. Esta estructura del grafo de flujo tiene los factores de la trayectoria directa b_0/s^4, b_1/s^3, b_2/s^2, b_3/s, y todas las trayectorias de avance tocan los lazos de realimentación. Por tanto, la función de transferencia resultante es realmente igual a la Ecuación (3.38).

Asociado con el formato de entrada de prealimentación se tiene el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{x}_1 = -a_3x_1 + x_2 + b_3u, \qquad \dot{x}_2 = -a_2x_1 + x_3 + b_2u,$$
$$\dot{x}_3 = -a_1x_1 + x_4 + b_1u, \quad \text{y} \quad \dot{x}_4 = -a_0x_1 + b_0u. \tag{3.44}$$

Así, en forma matricial, se tiene

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}u(t) \tag{3.45}$$

y

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x} + [0]u(t).$$

Aunque la forma canónica de realimentación de entrada de la Figura 3.9 representa la misma función de transferencia que la forma canónica de la variable de fase de la Figura 3.8, las variables de estado de cada grafo no son iguales. Además, se reconoce que las condiciones iniciales del sistema pueden representarse por las condiciones iniciales de los integradores, $x_1(0)$, $x_2(0)$, ..., $x_n(0)$. A continuación se considera un sistema de control y se determina la ecuación diferencial de estado, utilizando las dos formas de modelos de estado de grafo de flujo.

EJEMPLO 3.1. Dos modelos de variables de estado

En la Figura 3.11 se muestra un sistema de control de lazo simple. La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador por s^{-3}, se tiene

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^{-1} + 8s^{-2} + 6s^{-3}}{1 + 8s^{-1} + 16s^{-2} + 6s^{-3}}. \tag{3.46}$$

El primer modelo es el modelo de estado de variable de fase que utiliza la realimentación de las variables de estado para proporcionar la señal de salida. El grafo de flujo de señal y el diagrama de bloques se muestran en las Figuras 3.12(a) y (b), respectivamente. La ecuación diferencial de estado es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -16 & -8 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t), \tag{3.47}$$

y la salida es

$$y(t) = [6 \quad 8 \quad 2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{3.48}$$

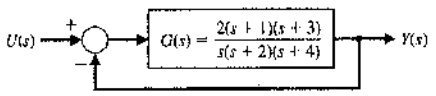
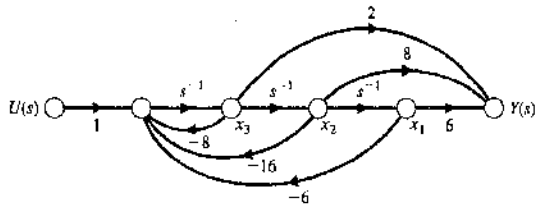


FIGURA 3.11 Sistema de control de lazo simple.



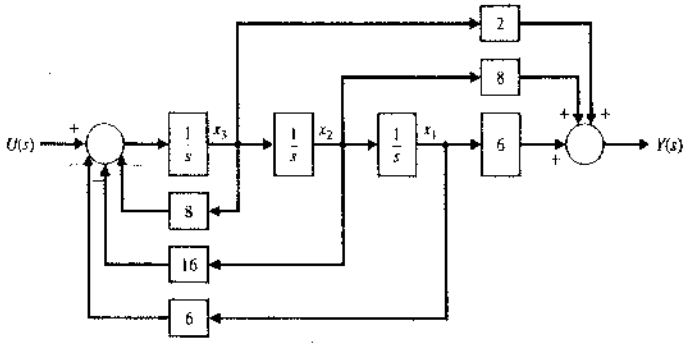


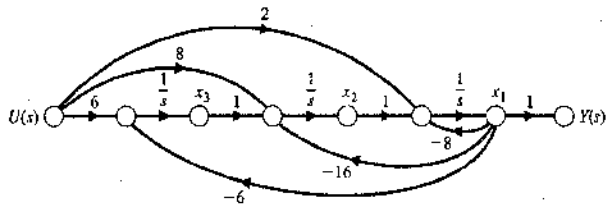
FIGURA 3.12
(a) Modelo de estado de grafo de flujo de variable de fase para $T(s)$. (b) Diagrama de bloques para la forma canónica de la variable de fase.

El segundo modelo utiliza realimentación de la variable de entrada, como se muestra en la Figura 3.13. La ecuación diferencial vectorial para el modelo de realimentación de entrada es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} u(t) \tag{3.49}$$

y la salida es $y(t) = x_1(t)$. ■

Se puede observar que no es necesario factorizar el polinomio del numerador o del denominador para obtener las ecuaciones diferenciales de estado para el modelo de variable de fase o el de realimentación de entrada. Sin la factorización de los polinomios se puede evitar el tedioso esfuerzo que ello implica. Ambos modelos requieren tres integradores, pues el sistema es de tercer orden. Sin embargo, es importante recalcar que las variables del modelo de estado de la Figura 3.12 no son iguales a las variables del modelo de estado de la Figura 3.13. Por supuesto, un conjunto de variables de estado se relaciona con otro mediante una adecuada transformación lineal de variables. Una transformación matricial lineal se representa por $\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{x}$, la cual transforma el vector $\mathbf{x}$ en el vector $\mathbf{z}$ mediante la matriz $\mathbf{M}$ (*véase* el Apéndice C en el sitio web MCS, especialmente la Sección C.3, sobre una introducción al álgebra matricial). Finalmente, observamos que la función de transferencia de la Ecuación (3.33) representa un sistema lineal de



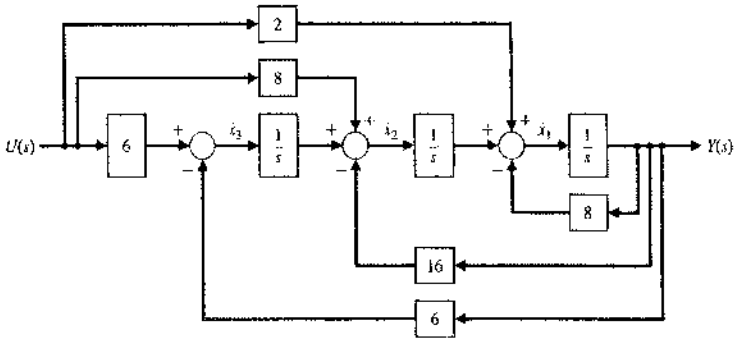


FIGURA 3.13
(a) Modelo de estado de grafo de flujo alternativo para $T(s)$ utilizando la forma canónica de realimentación de entrada. (b) Modelo de diagrama de bloques.

salida simple con coeficientes constantes; por esto, la función de transferencia puede representar una ecuación diferencial de orden n

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t). \tag{3.50}$$

Por lo anterior, se pueden obtener las n ecuaciones de primer orden para la ecuación diferencial de orden n utilizando el modelo de variable de fase o el modelo de realimentación de entrada de esta sección.

3.5. MODELOS ALTERNATIVOS DE GRAFOS DE FLUJO DE SEÑAL Y DIAGRAMAS DE BLOQUES

A menudo el diseñador de sistemas de control estudia un diagrama de bloques de un sistema de control real que representa dispositivos físicos y variables. Un ejemplo de un modelo de un motor de cc con la velocidad de eje como salida se muestra en la Figu-

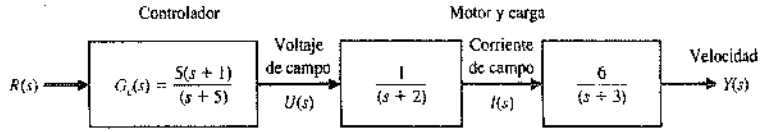


FIGURA 3.14
Un diagrama de bloques de un control de motor de cc en lazo abierto con la velocidad como salida.

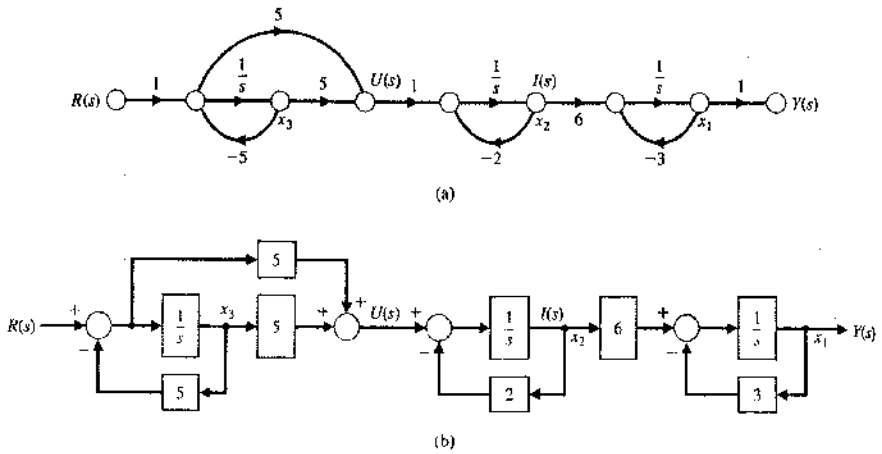


FIGURA 3.15. (a) Grafo de flujo de señal para las variables de estado físicas del diagrama de bloques de la Figura 3.14. (b) Diagrama de bloques de estados físicos.

ra 3.14 [9]. Se desea seleccionar las **variables físicas** como variables de estado. De este modo, se selecciona $x_1 = y(t)$, la velocidad de salida; $x_2 = i(t)$, la corriente de campo; y la tercera variable de estado, x_3, se selecciona como $x_3 = \frac{1}{4}r(t) - \frac{1}{20}u(t)$, donde $u(t)$ es el voltaje de campo. Se pueden dibujar los modelos para estas variables físicas como se muestra en la Figura 3.15. Obsérvese que las variables de estado x_1, x_2 y x_3 son identificadas sobre los modelos. A este formato se lo denominará modelo de variables de estado físicas. Obsérvese que el modelo de cada bloque se determina de forma independiente. Por ejemplo, obsérvese que la función de transferencia para el controlador es

$$\frac{U(s)}{R(s)} = G_c(s) = \frac{5(s+1)}{(s+5)} = \frac{5+5s^{-1}}{1+5s^{-1}},$$

y el grafo de flujo entre $R(s)$ y $U(s)$ representa $G_c(s)$.

La ecuación diferencial de variables de estado se obtiene directamente de la Figura 3.15 como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \tag{3.51}$$

y

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\,\mathbf{x}. \tag{3.52}$$

Una segunda forma del modelo que se debe de considerar son los modos de respuesta desacoplados. La función de transferencia entrada-salida completa del sistema del diagrama de bloques mostrado en la Figura 3.14 es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{30(s+1)}{(s+5)(s+2)(s+3)} = \frac{q(s)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)},$$

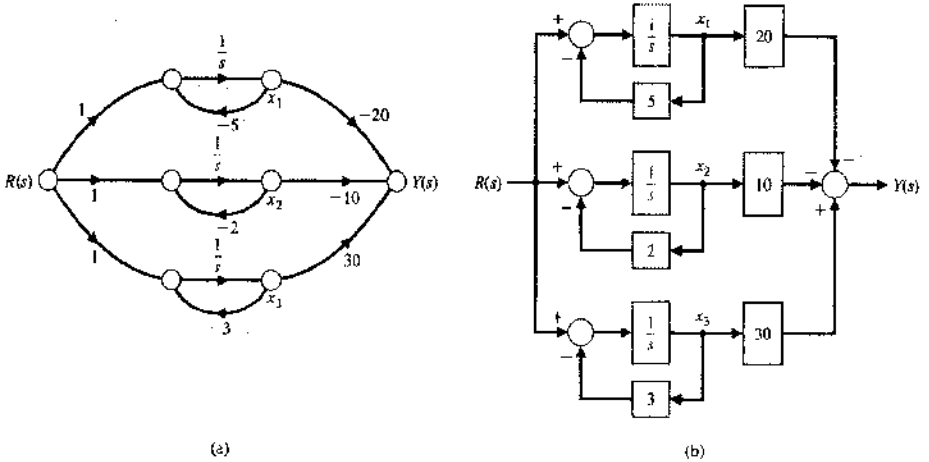


FIGURA 3.16. (a) Modelo de grafos de flujo de variables de estado desacopladas para el sistema mostrado en el diagrama de bloques de la Figura 3.14. (b) Modelo de diagrama de bloques de variables de estado desacopladas.

y la respuesta transitoria tiene tres modos dados por s_1, s_2 y s_3. Estos modos se expresan mediante el formato de fracciones parciales como

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{k_1}{(s+5)} + \frac{k_2}{(s+2)} + \frac{k_3}{(s+3)}. \tag{3.53}$$

Utilizando el procedimiento descrito en el Capítulo 2, se obtiene que $k_1 = -20$, $k_2 = -10$ y $k_3 = 30$. El modelo de variables de estado desacoplado representado en la Ecuación (3.53) se muestra en la Figura 3.16. La ecuación diferencial matricial de variables de estado es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

y

$$y(t) = [-20 \quad -10 \quad 30]\mathbf{x}. \tag{3.54}$$

Obsérvese que se ha elegido x_1 como la variable de estado asociada con $s_1 = -5$, x_2 asociada con $s_2 = -2$ y x_3 asociada con $s_3 = -3$, como se muestra en la Figura 3.16. Esta elección de variables de estado es arbitraria; por ejemplo, x_1 podría haberse asociado con el factor $(s+2)$.

La forma desacoplada de la ecuación matricial diferencial de estado muestra los polos distintos del modelo $-s_1, -s_2, \ldots, -s_n$ y este formato a menudo se denomina **forma canónica diagonal**. Un sistema siempre se puede escribir en forma diagonal si posee polos distintos; en caso contrario, únicamente podrá escribirse en un bloque de forma diagonal, conocido como **forma canónica de Jordan** [29].

EJEMPLO 3.2. Propagación de una enfermedad epidémica

La propagación de una enfermedad epidémica se puede describir mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales. La población en estudio se compone de tres grupos, x_1, x_2 y x_3, de forma que el grupo x_1 es propenso a la enfermedad epidémica, el grupo x_2 está infectado con la enfermedad y el grupo x_3 ha sido separado de la población inicial. La separación de x_3 será debido a inmunización, muerte o aislamiento de x_1. El sistema realimentado se puede representar por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_1 - \beta x_2 + u_1(t),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \beta x_1 - \gamma x_2 + u_2(t),$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \alpha x_1 + \gamma x_2.$$

La rapidez con que se añaden nuevos individuos propensos a la población es igual a $u_1(t)$, y la rapidez con que se añaden nuevos infectados a la población es igual a $u_2(t)$. Para una población aislada se tiene que $u_1(t) = u_2(t) = 0$. Es interesante observar que estas ecuaciones podrían igualmente representar la propagación de la información de una nueva idea en una población.

Las variables de estado físicas para este problema son x_1, x_2 y x_3. El modelo que representa este conjunto de ecuaciones diferenciales se muestra en la Figura 3.17. La ecuación diferencial vectorial es igual a

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ \beta & -\gamma & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \tag{3.55}$$

Examinando la Ecuación (3.55) y los modelos descritos en la Figura 3.17 se observa que la variable de estado x_3 depende de x_1 y x_2 y no afecta a estas variables.

Considérese una población aislada, es decir, $u_1(t) = u_2(t) = 0$. El punto de equilibrio en el espacio de estados para este sistema se obtiene haciendo $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{0}$. El punto de equilibrio en el espacio de estados es el punto para el cual el sistema se estabiliza en la condición de equilibrio o reposo. Examinando la Ecuación (3.55) se observa que el punto de equilibrio para este sistema es $x_1 = x_2 = 0$. Por esto, para determinar si la enfermedad epidémica se elimina de la población se debe obtener la ecuación característica del sistema. Por el grafo de flujo de señal que se muestra en la Figura 3.17 se obtiene su determinante

$$\Delta(s) = 1 - (-\alpha s^{-1} - \gamma s^{-1} - \beta^2 s^{-2}) + (\alpha\gamma s^{-2}), \tag{3.56}$$

donde hay tres lazos, dos de los cuales no se tocan. Por tanto, la ecuación característica es

$$q(s) = s^2\Delta(s) = s^2 + (\alpha + \gamma)s + (\alpha\gamma + \beta^2) = 0. \tag{3.57}$$

Las raíces de esta ecuación característica se encuentran en el lado izquierdo del plano s cuando $(\alpha + \gamma) > 0$ y $(\alpha\gamma + \beta^2) > 0$. Cuando las raíces están en el semiplano izquierdo, se espera que la respuesta no forzada decaiga a cero cuando $t \to \infty$. ■

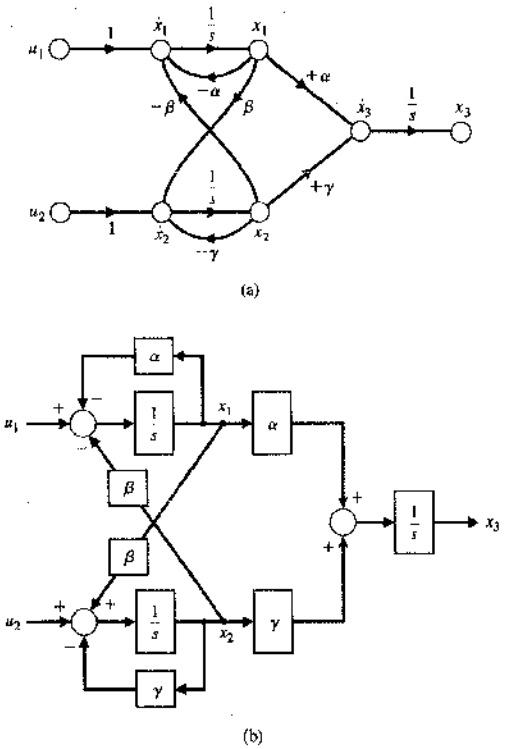


FIGURA 3.17
Modelo para la propagación de una enfermedad epidémica. (a) Grafo de flujo de señal. (b) Diagrama de bloques del modelo.

EJEMPLO 3.3. Control del péndulo invertido

En la Figura 3.18 se muestra el problema de balancear un palo de escoba sobre la mano de una persona. La única condición de equilibrio es $\theta(t) = 0$ y $d\theta/dt = 0$. Equilibrar un palo de escoba en el extremo de un dedo es semejante al problema de controlar la posición de un proyectil durante las etapas iniciales de lanzamiento. Éste es el problema clásico y fascinante del péndulo invertido montado en un carro, como se muestra en la Figura 3.19. El carro debe moverse de forma que la masa m esté siempre en posición vertical. Las variables de estado deben expresarse en función de la rotación angular $\theta(t)$

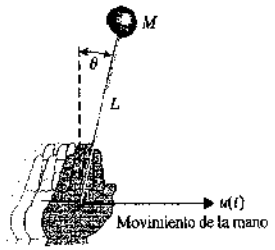


FIGURA 3.18
Un péndulo invertido balanceado sobre la mano de una persona para reducir $\theta(t)$. Supóngase, para mayor facilidad, que el péndulo rota en el plano x-y.

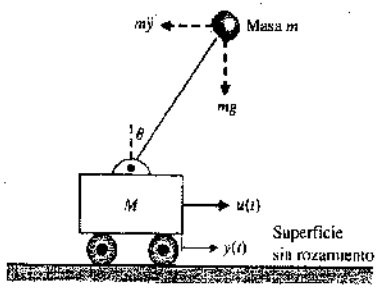


FIGURA 3.19
Un carro y un péndulo invertido. El péndulo está sujeto a pivotar en el plano vertical.

y la posición del carro $y(t)$. Las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del sistema pueden obtenerse escribiendo la suma de las fuerzas en dirección horizontal y la suma de los momentos respecto al punto pivote [2, 3, 10, 28]. Se supondrá que $M \gg m$ y que el ángulo de rotación θ es pequeño, de forma que las ecuaciones son lineales. La suma de las fuerzas en dirección horizontal es

$$M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} \quad u(t) = 0, \tag{3.58}$$

donde $u(t)$ es igual a la fuerza sobre el carro y l es la distancia desde la masa m hasta el punto pivote. La suma de los momentos de torsión respecto al punto pivote es

$$ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} \quad - mlg\theta = 0. \tag{3.59}$$

Las variables de estado para las dos ecuaciones de segundo orden se eligen como $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$. Entonces las Ecuaciones (3.58) y (3.59) se escriben en términos de las variables de estado como

$$M\dot{x}_2 + ml\dot{x}_4 - u(t) = 0 \tag{3.60}$$

y

$$\dot{x}_2 + l\dot{x}_4 - gx_3 = 0. \tag{3.61}$$

Para obtener las ecuaciones diferenciales de primer orden necesarias, se resuelve para $l\dot{x}_4$ en la Ecuación (3.61) y se sustituye en la (3.60) para obtener

$$M\dot{x}_2 + mgx_3 = u(t), \tag{3.62}$$

dado que $M \gg m$. Sustituyendo $\dot{x}_2$ de la Ecuación (3.60) en la (3.61), se tiene

$$Ml\dot{x}_4 - Mgx_3 + u(t) = 0. \tag{3.63}$$

Por tanto, las cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden pueden escribirse

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = \frac{-mg}{M}x_3 + \frac{1}{M}u(t),$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad \text{y} \quad \dot{x}_4 = \frac{g}{l}x_3 - \frac{1}{Ml}u(t). \tag{3.64}$$

De este modo, las matrices del sistema son

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(mg/M) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g/l & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/Ml \end{bmatrix} \tag{3.65}$$ ■

3.6. LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE LA ECUACIÓN DE ESTADO

Dada una función de transferencia $G(s)$, se pueden obtener las ecuaciones en variables de estado utilizando el modelo de grafo de flujo de señal. Ahora se vuelve a la cuestión de determinar la función de transferencia $G(s)$ de un sistema de una única entrada y una única salida (SISO). Recordando las Ecuaciones (3.16) y (3.17) se tiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{3.66}$$

y

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{3.67}$$

donde y es la única entrada y u la única salida. Las transformadas de Laplace de las Ecuaciones (3.66) y (3.67) son

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \tag{3.68}$$

y

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s), \tag{369}$$

donde $\mathbf{B}$ es una matriz de $n \times 1$, debido a que u es una sola entrada. Obsérvese que no se incluyen condiciones iniciales, puesto que se busca la función de transferencia. Reordenando la Ecuación (3.68) se obtiene

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s).$$

Como $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \Phi(s)$, se tiene

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{B}U(s).$$

Sustituyendo $\mathbf{X}(s)$ en la Ecuación (3.69) se obtiene

$$Y(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B}U(s). \tag{3.70}$$

Por consiguiente, la función de transferencia $G(s) = Y(s)/U(s)$ es

$$\boxed{G(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B}.} \tag{3.71}$$

EJEMPLO 3.4. Función de transferencia de un circuito *RLC*

A continuación se determina la función de transferencia $G(s) = Y(s)/U(s)$ para el circuito *RLC* de la Figura 3.4 descrito por las ecuaciones diferenciales (*véanse* las Ecuaciones 3.18 y 3.19):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & \dfrac{-R}{L} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [0 \quad R]\mathbf{x}.$$

En este caso se tiene

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \left(s + \frac{R}{L}\right) \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, se obtiene

$$\Phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} \left(s + \frac{R}{L}\right) & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & s \end{bmatrix},$$

donde

$$\Delta(s) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}.$$

Por tanto, la función de transferencia es

$$G(s) = [0 \quad R] \begin{bmatrix} \frac{\left(s + \frac{R}{L}\right)}{\Delta(s)} & \frac{-1}{C\Delta(s)} \\ \frac{1}{L\Delta(s)} & \frac{s}{\Delta(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{R/LC}{\Delta(s)} = \frac{R/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}},$$

lo que concuerda con el resultado de la Ecuación (3.32) obtenido del modelo de grafo de flujo al utilizar la fórmula de Mason para la ganancia de flujo de señal. ■

3.7. LA RESPUESTA TEMPORAL Y LA MATRIZ DE TRANSICIÓN DE ESTADO

Frecuentemente es deseable obtener la respuesta en el tiempo de las variables de estado de un sistema de control y así examinar el funcionamiento de éste. La respuesta transitoria de un sistema puede obtenerse fácilmente calculando la solución de la ecuación diferencial vectorial de estado. En la Sección 3.3 se vio que la solución para dicha Ecuación (3.26) era

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau. \tag{3.72}$$

Evidentemente, si se conocen las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$, la entrada $\mathbf{u}(\tau)$ y la matriz de transición $\Phi(t)$, la respuesta en el tiempo de $\mathbf{x}(t)$ puede calcularse numéricamente. Por

esto, el problema se centra en el cálculo de $\Phi(t)$, la matriz de transición de estado que representa la respuesta del sistema. Afortunadamente, la matriz de transición de estado puede calcularse fácilmente usando las técnicas del grafo de flujo de señal, con las cuales ya se está familiarizado.

Sin embargo, antes de proceder al cálculo de la matriz de transición de estado usando los grafos de flujo de señal, se debe observar que existen otros métodos para calcular dicha matriz, como el cálculo de la serie exponencial

$$\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \tag{3.73}$$

en forma truncada [2, 8]. Para el cálculo de $\Phi(t)$ mediante un algoritmo computacional hay diversos métodos eficientes [21].

En la Ecuación (3.25), se observa que $\Phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$. Por tanto, si se obtiene $\Phi(s)$ completando la inversión de la matriz, se puede obtener $\Phi(t)$ observando que $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$. Sin embargo, el proceso de inversión de la matriz es poco usual para los sistemas de orden superior.

La utilidad del modelo de estado de grafo de flujo de señal para obtener la matriz de transición se aclara si se considera la versión de la transformación de Laplace de la Ecuación (3.72) cuando la entrada es cero. Tomando la transformación de Laplace de la Ecuación (3.72), cuando $\mathbf{u}(\tau) = 0$, se tiene

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0). \tag{3.74}$$

Por tanto, se puede calcular la transformada de Laplace de la matriz de transición a partir del grafo de flujo de señal, determinando la relación entre una variable de estado $X_i(s)$ y las condiciones iniciales de estado $[x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)]$. Entonces la matriz de transición de estado es simplemente la transformada inversa de $\Phi(s)$, de forma que

$$\boxed{\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}.} \tag{3.75}$$

La relación entre la variable de estado $X_i(s)$ y las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$ se obtiene usando la fórmula de Mason de la ganancia. Por esto, para un sistema de segundo orden, se tendrá

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \phi_{11}(s)x_1(0) + \phi_{12}(s)x_2(0), \\ X_2(s) &= \phi_{21}(s)x_1(0) + \phi_{22}(s)x_2(0), \end{aligned} \tag{3.76}$$

y la relación entre $X_2(s)$ como salida y $x_1(0)$ como entrada puede calcularse por la fórmula de Mason. Todos los elementos de la matriz de transición de estado $\phi_{ij}(s)$ se pueden obtener calculando las relaciones individuales entre $X_i(s)$ y $x_j(0)$ a partir del modelo de estado de grafo de flujo. Un ejemplo ilustrará este método para la determinación de la matriz de transición de estado.

EJEMPLO 3.5. Evaluación de la matriz de transición de estado

Se considerará el circuito *RLC* de la Figura 3.4. Se quiere evaluar $\Phi(s)$ (1) determinando la inversión de la matriz $\Phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ y (2) utilizando el diagrama de flujo de señal y la fórmula de Mason para la ganancia de flujo de señal.

Primero se determina $\Phi(s)$ calculando $\Phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$. Obsérvese que, según la Ecuación (3.18),

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & (s+3) \end{bmatrix}. \tag{3.77}$$

La matriz inversa es

$$\Phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} (s+3) & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}, \tag{3.78}$$

donde $\Delta(s) = s(s+3) + 2 = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$.

El modelo de estado de grafo de flujo del sistema *RLC* de la Figura 3.4 se muestra en la Figura 3.5. Esta red *RLC*, que se analizó en las Secciones 3.3 y 3.4, puede representarse por las variables de estado $x_1 = v_c$ y $x_2 = i_L$. Las condiciones iniciales, $x_1(0)$ y $x_2(0)$, representan el voltaje inicial del condensador y la corriente del inductor, respectivamente. El grafo de flujo, incluyendo las condiciones iniciales de cada variable de estado, se muestra en la Figura 3.20. Las condiciones iniciales aparecen como el valor inicial de la variable de estado en la salida de cada integrador.

Para obtener $\Phi(s)$, se hace $U(s) = 0$. Cuando $R = 3$, $L = 1$ y $C = 1/2$, se obtiene el grafo de flujo de señal mostrado en la Figura 3.21, donde los nodos de la salida y la entrada se eliminan, pues no se incluyen en el cálculo de $\Phi(s)$. Entonces, usando la fórmula de Mason para la ganancia, se obtiene $X_1(s)$ en términos de $x_1(0)$ como

$$X_1(s) = \frac{1 \cdot \Delta_1(s) \cdot [x_1(0)/s]}{\Delta(s)}, \tag{3.79}$$

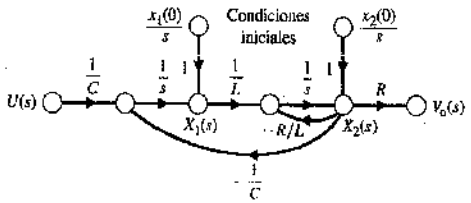


FIGURA 3.20
Grafo de flujo de la red *RLC*.

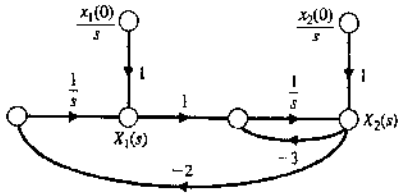


FIGURA 3.21
Grafo de flujo de la red *RLC* con $U(s) = 0$.

donde $\Delta(s)$ es el determinante gráfico y $\Delta_1(s)$ es el cofactor de la trayectoria. El determinante gráfico es

$$\Delta(s) = 1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}.$$

El cofactor de la trayectoria es $\Delta_1 = 1 + 3s^{-1}$, dado que la trayectoria entre $x_1(0)$ y $X_1(s)$ no toca el lazo con el factor $-3s^{-1}$. Por tanto, el primer elemento de la matriz de transición es

$$\phi_{11}(s) = \frac{(1 + 3s^{-1})(1/s)}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = \frac{(s+3)}{(s^2 + 3s + 2)}. \tag{3.80}$$

El elemento $\phi_{12}(s)$ se obtiene calculando la relación entre $X_1(s)$ y $x_2(0)$ como

$$X_1(s) = \frac{(-2s^{-1})(x_2(0)/s)}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}}.$$

Por tanto, se obtiene

$$\phi_{12}(s) = \frac{-2}{s^2 + 3s + 2}. \tag{3.81}$$

Análogamente, para $\phi_{21}(s)$ se tiene

$$\phi_{21}(s) = \frac{(s^{-1})(1/s)}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}. \tag{3.82}$$

Finalmente, para $\phi_{22}(s)$ se obtiene

$$\phi_{22}(s) = \frac{1(1/s)}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}. \tag{3.83}$$

Por tanto, la matriz de transición de estado en forma de transformación de Laplace es

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} (s+3)/(s^2+3s+2) & -2/(s^2+3s+2) \\ 1/(s^2+3s+2) & s/(s^2+3s+2) \end{bmatrix}. \tag{3.84}$$

Los factores de la ecuación característica son $(s+1)$ y $(s+2)$, de forma que

$$(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2.$$

Entonces la matriz de transición de estado es

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] = \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t}) & (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) \\ (e^{-t} - e^{-2t}) & (-e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{bmatrix}. \tag{3.85}$$

El cálculo de la respuesta temporal de la red *RLC* para varias condiciones iniciales y señales de entrada puede efectuarse ahora utilizando la Ecuación (3.72). Por ejemplo, cuando $x_1(0) = x_2(0) = 1$ y $u(t) = 0$, se tiene

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}. \tag{3.86}$$

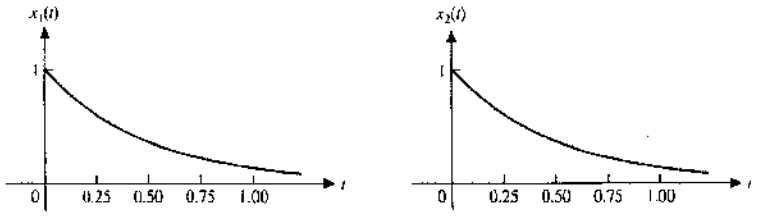


FIGURA 3.22
Respuesta temporal de las variables de estado de la red *RLC* para $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

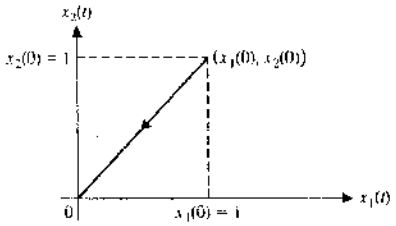


FIGURA 3.23
Trayectoria del vector de estado en el plano x_1 contra x_2.

En la Figura 3.22 se muestra la respuesta del sistema para estas condiciones iniciales. En la Figura 3.23 se muestra la trayectoria del vector de estado $[x_1(t), x_2(t)]$ en el plano x_1 contra x_2.

El cálculo de la respuesta temporal se facilita determinando la matriz de transición de estado. Aunque se limite a sistemas lineales, este método es poderoso y utiliza el conocido grafo de flujo de señal para calcular la matriz de transición. ■

3.8. UNA EVALUACIÓN EN TIEMPO DISCRETO DE LA RESPUESTA TEMPORAL

La respuesta de un sistema representada por una ecuación diferencial vectorial de estado puede obtenerse utilizando una **aproximación en tiempo discreto**. Dicha aproximación se basa en la división del eje del tiempo en incrementos suficientemente pequeños. Entonces se calculan los valores de las variables de estado en intervalos de tiempo sucesivos; es decir, $t = 0, T, 2T, 3T, \ldots$, donde T es el incremento del tiempo: $\Delta t = T$. Este enfoque es un método familiar utilizado en análisis numérico y en métodos numéricos de computadores digitales. Si el incremento del tiempo, T, es suficientemente pequeño en comparación con las constantes de tiempo del sistema, la respuesta calculada por los métodos en tiempo discreto será razonablemente exacta.

La ecuación lineal diferencial vectorial de estado se escribe como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}. \tag{3.87}$$

La definición básica de una derivada es

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t}. \tag{3.88}$$

Por tanto, se puede utilizar esta definición de la derivada y determinar el valor de $\mathbf{x}(t)$ cuando t se divide en pequeños intervalos $\Delta t = T$. Por esto, **aproximando** la derivada como

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}(t + T) - \mathbf{x}(t)}{T},} \tag{3.89}$$

se sustituye en la Ecuación (3.87) para obtener

$$\frac{\mathbf{x}(t + T) - \mathbf{x}(t)}{T} \cong \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t). \tag{3.90}$$

Resolviendo para $\mathbf{x}(t + T)$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t + T) &\cong T\mathbf{Ax}(t) + \mathbf{x}(t) + T\mathbf{Bu}(t) \\ &\cong (T\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}(t) + T\mathbf{Bu}(t), \end{aligned} \tag{3.91}$$

donde t se divide en intervalos de amplitud T. Por tanto, el tiempo t se escribe como $t = kT$, donde k es un índice entero de forma que $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Entonces la Ecuación (3.91) se escribe como

$$\mathbf{x}[(k + 1)T] \cong (T\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}(kT) + T\mathbf{Bu}(kT). \tag{3.92}$$

Por tanto, el valor del vector de estado en el instante de tiempo $(k + 1)$ se calcula en términos del valor de $\mathbf{x}$ y de $\mathbf{u}$ en el k-ésimo instante de tiempo. La Ecuación (3.92) puede escribirse ahora

$$\mathbf{x}(k + 1) \cong \psi(T)\mathbf{x}(k) + T\mathbf{Bu}(k), \tag{3.93}$$

donde $\psi(T) = (T\mathbf{A} + \mathbf{I})$ y se omite el símbolo T de los argumentos de las variables. La Ecuación (3.93) relaciona claramente la operación resultante para obtener $\mathbf{x}(t)$ calculando la aproximación en tiempo discreto $\mathbf{x}(k + 1)$ en función del valor previo $\mathbf{x}(k)$. Esta operación recurrente, conocida como **método de Euler**, es una serie secuencial de cálculos y es muy adecuada para el cálculo en computadores digitales. Otros métodos de integración, como los populares métodos de Runge-Kutta, también pueden utilizarse para calcular la respuesta temporal de la Ecuación (3.87). Algunos métodos de integración [30] están disponibles en MATLAB. Para ilustrar este método de la aproximación, se reconsidera el cálculo de la respuesta de la red *RLC* de la Figura 3.4.

EJEMPLO 3.6. Respuesta de la red *RLC*

Se calculará la respuesta temporal de la red *RLC* sin determinar la matriz de transición usando la aproximación en tiempo discreto. Por tanto, como en el Ejemplo 3.5, se tendrá $R = 3$, $L = 1$ y $C = 1/2$. Entonces, como se observa en las Ecuaciones (3.18) y (3.19), la ecuación diferencial vectorial de estado es

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -(1/C) \\ 1/L & -(R/L) \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} +(1/C) \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} +2 \\ 0 \end{bmatrix}u(t). \end{aligned} \tag{3.94}$$

Ahora se debe escoger un intervalo de tiempo suficientemente pequeño T, de forma que la aproximación de la derivada (Ecuación 3.89) sea razonablemente precisa y, por tanto, que la solución de la Ecuación (3.92) sea exacta. Generalmente, se escoge T de manera que sea menor que la mitad de la constante de tiempo más pequeña del sistema. Por tanto, como la constante de tiempo más pequeña del sistema es 0.5 s [recordando que la ecuación característica es $(s + 1)(s + 2)$], se podría escoger $T = 0.2$. Obsérvese que cuando disminuye la magnitud del incremento, aumenta proporcionalmente el número de cálculos. Usando $T = 0.2$ s, la Ecuación (3.93) es

$$\mathbf{x}(k + 1) \cong (0.2\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}(k) + 0.2\mathbf{B}\mathbf{u}(k). \tag{3.95}$$

Por tanto,

$$\psi(T) = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}, \tag{3.96}$$

y

$$T\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.97}$$

Ahora, se calcula la respuesta del sistema cuando $x_1(0) = x_2(0) = 1$ y $u(t) = 0$. La respuesta en el primer instante, cuando $t = T$, o $k = 0$, es

$$\mathbf{x}(1) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}. \tag{3.98}$$

Entonces la respuesta en el tiempo $t = 2T = 0.4$ segundos, o $k = 1$, es

$$\mathbf{x}(2) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.36 \end{bmatrix}. \tag{3.99}$$

Después se calcula en forma semejante el valor de la respuesta cuando $k = 2, 3, 4, \ldots$

Ahora se compara la respuesta real del sistema calculada en la sección anterior. Se utilizará la matriz de transición con la respuesta calculada por la aproximación en tiempo discreto. En el Ejemplo 3.5 se observa que el valor exacto de las variables de estado, cuando $x_1(0) = x_2(0) = 1$, es $x_1(t) = x_2(t) = e^{-2t}$. Por tanto, los valores exactos se pueden calcular fácilmente y comparar con los valores aproximados de la respuesta temporal como en la Tabla 3.1. Los valores aproximados de la respuesta en el tiempo para $T = 0.1$ segundos se proporcionan también en dicha tabla. El error, cuando $T = 0.2$, es aproximadamente constante y es igual a 0.07, y por esto el error porcentual comparado con el valor inicial es del 7%. Cuando T es igual a 0.1 segundos, el error porcentual comparado con el valor inicial es aproximadamente del 3.5%. Si se utiliza $T = 0.05$, cuando el tiempo $t = 0.2$ segundos, el valor de la aproximación es $x_1(t) = 0.655$, y el error se ha reducido al 1.5% de su valor inicial. ■

Tabla 3.1

Tiempo t	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$x_1(t)$ exacto	1	0.67	0.448	0.30	0.20
$x_1(t)$ aproximado, $T = 0.1$	1	0.64	0.41	0.262	0.168
$x_1(t)$ aproximado, $T = 0.2$	1	0.60	0.36	0.216	0.130

EJEMPLO 3.7. Respuesta temporal de una epidemia

Se reconsidera la representación en variables de estado de la propagación de una enfermedad epidémica presentada en el Ejemplo 3.2. La ecuación diferencial vectorial de estado es la (3.55). Cuando las constantes son $\alpha = \beta = \gamma = 1$, se tiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}. \tag{3.100}$$

La ecuación característica de este sistema, como se determinó en la Ecuación (3.57), es $s(s^2 + s + 2) = 0$, y por esto el sistema tiene raíces complejas. Se va a determinar la respuesta transitoria de la propagación de la enfermedad cuando la rapidez de nuevos individuos propensos a ella es cero; es decir, $u_1 = 0$. La rapidez con que se agregan nuevos infectados se representa por $u_2(0) = 1$ y $u_2(k) = 0$ para $k \geq 1$; es decir, solamente se agrega un nuevo infectado en el tiempo inicial (esto equivale a una entrada de pulso). Como la constante de tiempo de las raíces complejas es $1/\zeta\omega_n = 2$ segundos, se utilizará $T = 0.2$ segundos. (Obsérvese que las unidades del tiempo real podrían estar en meses y las de entrada en miles.)

Entonces la ecuación en tiempo discreto es

$$\mathbf{x}(k + 1) = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}u_2(k). \tag{3.101}$$

Por tanto, la respuesta en el primer instante, $t = T$, se obtiene cuando $k = 0$ como

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.102}$$

cuando $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$. Entonces la entrada $u_2(k)$ es cero para $k \geq 1$ y la respuesta en $t = 2T$ es

$$\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 \\ 0.16 \\ 0.04 \end{bmatrix}. \tag{3.103}$$

La respuesta en $t = 3T$ es entonces

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.04 \\ 0.16 \\ 0.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.064 \\ 0.120 \\ 0.064 \end{bmatrix},$$

y entonces pueden calcularse fácilmente los valores siguientes. Por supuesto, el valor físico real de x_1 no puede ser negativo. El valor negativo de x_1 se obtiene como resultado de un modelo inadecuado.

El método aproximado en tiempo discreto es particularmente útil para calcular la respuesta de sistemas no lineales en el tiempo. La ecuación diferencial vectorial de estado puede escribirse

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),} \tag{3.104}$$

donde $\mathbf{f}$ es una función, no necesariamente lineal, del vector de estado $\mathbf{x}$ y del vector de entrada $\mathbf{u}$. El vector columna $\mathbf{f}$ es la matriz de columnas de las funciones de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}$. Si el sistema es una función lineal de las señales de control, la Ecuación (3.104) será

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{Bu}. \tag{3.105}$$

Si el sistema no varía en el tiempo, es decir, si los coeficientes de la ecuación diferencial son constantes, la Ecuación (3.105) es entonces

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{Bu}. \tag{3.106}$$

Se considera la Ecuación (3.106) para un sistema no lineal y se determina la aproximación en tiempo discreto. Usando la Ecuación (3.89) como aproximación a la derivada, se tiene

$$\frac{\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)}{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{Bu}(t). \tag{3.107}$$

Por tanto, resolviendo para $\mathbf{x}(k+1)$ cuando $t = kT$, se obtiene

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T[\mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{Bu}(k)]. \tag{3.108}$$

Análogamente, la aproximación en tiempo discreto a la Ecuación (3.104) es

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k). \tag{3.109}$$

A continuación se considera nuevamente el ejemplo anterior cuando el sistema es no lineal.

EJEMPLO 3.8. Modelo mejorado de una epidemia

La propagación de una enfermedad epidémica se representa mejor mediante un conjunto de ecuaciones no lineales como

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\alpha x_1 - \beta x_1 x_2 + u_1(t),\\
\dot{x}_2 &= \beta x_1 x_2 - \gamma x_2 + u_2(t),\\
\dot{x}_3 &= \alpha x_1 + \gamma x_2,
\end{aligned} \tag{3.110}$$

donde la interacción entre los grupos se representa por el término no lineal x_1x_2. Como en el ejemplo anterior, se toma $\alpha = \beta = \gamma = 1$ y $u_1(t) = 0$. Así mismo, $u_2(0) = 1$ y $u_2(k) = 0$ para $k \geq 1$. Nuevamente se seleccionará el incremento en el tiempo como $T = 0.2$ segundos y las condiciones iniciales como $\mathbf{x}^T(0) = [1 \quad 0 \quad 0]$. Entonces, sustituyendo $t = kT$ y

$$\dot{x}_i(k) = \frac{x_i(k+1) - x_i(k)}{T} \tag{3.111}$$

en la Ecuación (3.110), se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{T} &= -x_1(k) - x_1(k)x_2(k),\\
\frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{T} &= +x_1(k)x_2(k) - x_2(k) + u_2(k),\\
\frac{x_3(k+1) - x_3(k)}{T} &= x_1(k) + x_2(k).
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Resolviendo estas ecuaciones para $x_i(k+1)$ y recordando que $T = 0.2$, se tiene

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= 0.8x_1(k) - 0.2x_1(k)x_2(k),\\
x_2(k+1) &= 0.8x_2(k) + 0.2x_1(k)x_2(k) + 0.2u_2(k),\\
x_3(k+1) &= x_3(k) + 0.2x_1(k) + 0.2x_2(k).
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Entonces la respuesta en el primer instante, $t = T$, es

$$\begin{aligned}
x_1(1) &= 0.8x_1(0) = 0.8,\\
x_2(1) &= 0.2u_2(k) = 0.2,\\
x_3(1) &= 0.2x_1(0) = 0.2.
\end{aligned}$$

Nuevamente, usando la Ecuación (3.113) y observando que $u_2(1) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
x_1(2) &= 0.8x_1(1) - 0.2x_1(1)x_2(1) = 0.608,\\
x_2(2) &= 0.8x_2(1) + 0.2x_1(1)x_2(1) = 0.192,\\
x_3(2) &= x_3(1) + 0.2x_1(1) + 0.2x_2(1) = 0.40.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

En el tercer instante, cuando $t = 3T$, se obtiene

$$x_1(3) = 0.463, \qquad x_2(3) = 0.177, \qquad x_3(3) = 0.56.$$

El cálculo de los valores siguientes se efectúa de manera semejante. Obsérvese que la respuesta del sistema no lineal difiere considerablemente de la respuesta del modelo lineal del ejemplo anterior. ■

El cálculo de la respuesta en el tiempo de las variables de estado de los sistemas lineales se completa fácilmente usando cualquiera de los métodos: (1) el de la matriz de transición o (2) el de la aproximación en tiempo discreto. La matriz de transición de los sistemas lineales se obtiene fácilmente por el modelo de estado de grafo de flujo de señal. Para sistemas no lineales, la aproximación en tiempo discreto es un método particularmente útil si se usa un computador digital para los cálculos numéricos.

3.9. EJEMPLO DE DISEÑO: IMPRESORA CON TRANSMISIÓN POR CORREA

Una impresora de bajo coste usada comúnmente en un computador utiliza transmisión por correa para mover lateralmente de un lado a otro el dispositivo de impresión en la página impresa [11]. El dispositivo de impresión puede ser una impresora láser, una impresora de bola o térmica. En la Figura 3.24 se muestra un ejemplo de una impresora

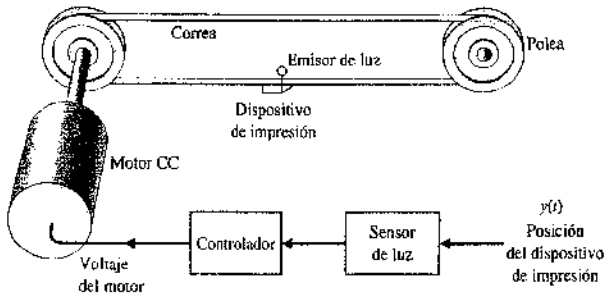


FIGURA 3.24
Sistema de impresora con transmisión por correa.

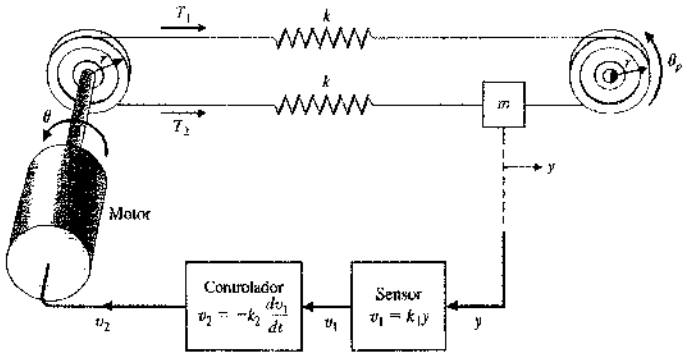


FIGURA 3.25
Modelo de impresora con transmisión por correa.

con transmisión por correa con un motor actuador de cc. En este modelo, el sensor de luz se utiliza para medir la posición del dispositivo de impresión, y la tensión de la correa ajusta la flexibilidad del muelle de la misma. El objetivo del diseño es determinar el efecto de la constante k del muelle de la correa y seleccionar los parámetros apropiados para el motor, la polea de la correa y el controlador. Para realizar el análisis, se calculará un modelo del sistema de transmisión por correa y se seleccionarán muchos de sus parámetros. A continuación se determinará una función de transferencia apropiada para el sistema y se seleccionarán sus otros parámetros, exceptuando la constante para el muelle. Finalmente, se examinará el efecto de variar la constante del muelle dentro de un rango realista.

En la Figura 3.25 se muestra el modelo propuesto del sistema de transmisión por correa. Este modelo presupone que la constante del muelle de la correa es k, el radio de la polea es r, la rotación angular del eje del motor es θ, y la rotación angular de la polea de mano derecha es θ_p. La masa del dispositivo de impresión es m y su posición es $y(t)$. El sensor de luz se utiliza para medir y, y la salida del sensor es un voltaje v_1, donde $v_1 = k_1 y$. El controlador proporciona un voltaje de salida v_2, donde v_2 es una función de v_1. El voltaje v_2 se conecta a la excitación del motor. Se supondrá que se puede utilizar la relación lineal

$$v_2 = -\left[k_2 \frac{dv_1}{dt} + k_3 v_1\right],$$

y se opta por utilizar $k_2 = 0.1$ y $k_3 = 0$ (realimentación de velocidad).

Tabla 3.2 Parámetros del dispositivo de impresión

Masa	$m = 0.2$ kg
Sensor de luz	$k_1 = 1$ V/m
Radio	$r = 0.15$ m
Motor	
Inductancia	$L \approx 0$
Fricción	$b = 0.25$ N-ms/rad
Resistencia	$R = 2\ \Omega$
Constante	$K_m = 2$ N-m/A
Inercia	$J = J_{motor} + J_{polea}$; $J = 0.01$ kg-m^2

La inercia del motor y la polea es $J = J_{motor} + J_{polea}$. Se va a utilizar un motor de cc de potencia moderada. Seleccionando un motor típico de cc 1/8-hp, se encuentra que $J = 0.01$ kg-m^2, la inductancia de campo es despreciable, la resistencia de campo es $R = 2\ \Omega$, la constante del motor es $K_m = 2$ N-m/A y la fricción del motor y la polea es $b = 0.25$ N-ms/rad. El radio de la polea es $r = 0.15$ m. Los parámetros del sistema se resumen en la Tabla 3.2.

A continuación se procede a escribir las ecuaciones de movimiento para el sistema; obsérvese que $y = r\theta_p$. Por tanto, la tensión T_1 es

$$T_1 = k(r\theta - r\theta_p) = k(r\theta - y).$$

La tensión T_2 es

$$T_2 = k(y - r\theta).$$

La tensión neta en la masa m es

$$T_1 - T_2 = m\frac{d^2y}{dt^2} \tag{3.115}$$

y

$$T_1 - T_2 = k(r\theta - y) - k(y - r\theta) = 2k(r\theta - y) = 2kx_1, \tag{3.116}$$

donde la primera variable de estado es $x_1 = (r\theta - y)$. Supóngase la segunda variable de estado es $x_2 = dy/dt$, y se utilizan las Ecuaciones (3.115) y (3.116) para obtener

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2k}{m}x_1. \tag{3.117}$$

La primera derivada de x_1 es

$$\frac{dx_1}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy}{dt} = rx_3 - x_2 \tag{3.118}$$

cuando se selecciona la tercera variable de estado como $x_3 = d\theta/dt$. Ahora se requiere una ecuación diferencial que describa la rotación del motor. Cuando $L = 0$, se tiene la corriente de campo $i = v_2/R$ y el par motor $T_m = K_m i$. Por tanto,

$$T_m = \frac{K_m}{R}v_2,$$

y el par motor proporciona el par para transmitir las correas más el par de perturbación o carga no deseada, tal que

$$T_m = T + T_d.$$

el par T se transmite al eje de la polea, tal que

$$T = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + r(T_1 - T_2).$$

Por tanto,

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

En consecuencia,

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{(T_m - T_d)}{J} - \frac{b}{J}x_3 - \frac{2kr}{J}x_1,$$

donde

$$T_m = \frac{K_m}{R}v_2 \quad \text{y} \quad v_2 = -k_1k_2\frac{dy}{dt} = -k_1k_2x_2.$$

Así, se obtiene

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{-K_mk_1k_2}{JR}x_2 - \frac{b}{J}x_3 - \frac{2kr}{J}x_1 - \frac{T_d}{J}. \tag{3.119}$$

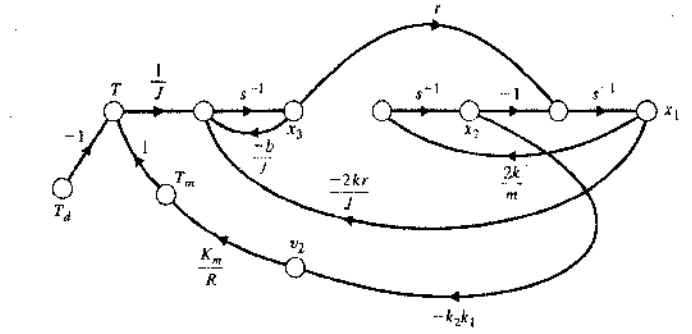
Las Ecuaciones (3.117)-(3.119) son las tres ecuaciones diferenciales de primer orden que se necesitan para describir este sistema. La ecuación diferencial matricial es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & r \\ \frac{2k}{m} & 0 & 0 \\ \frac{-2kr}{J} & \frac{-K_mk_1k_2}{JR} & \frac{-b}{J} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{J} \end{bmatrix}T_d. \tag{3.120}$$

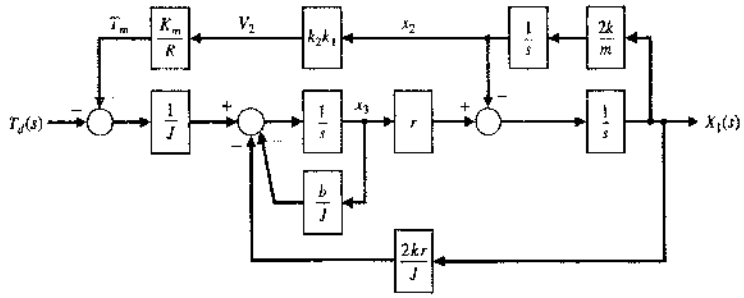
Los modelos de grafo de flujo de señal y diagramas de bloques representan la ecuación diferencial matricial que se muestra en la Figura 3.26, donde se incluye la identificación del nodo para el par de perturbación T_d.

Se puede utilizar el grafo de flujo para determinar la función de transferencia $X_1(s)/T_d(s)$. El objetivo es reducir el efecto de la perturbación T_d, y la función de transferencia mostrará cómo se alcanza este objetivo. Utilizando la fórmula de Mason para la ganancia del flujo de señal se obtiene

$$\frac{X_1(s)}{T_d(s)} = \frac{-\frac{r}{J}s^{-2}}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1L_2},$$



(a)



(b)

FIGURA 3.26
Impresora con transmisión por correa. (a) Grafo de flujo de señal. (b) Modelo de diagrama de bloques.

donde

$$L_1 = \frac{-b}{J}s^{-1},\ L_2 = \frac{-2k}{m}s^{-2},\ L_3 = \frac{-2kr^2s^{-2}}{J} \quad \text{y} \quad L_4 = \frac{-2kK_mk_1k_2rs^{-3}}{mJR}.$$

Por tanto, se tiene

$$\frac{X_1(s)}{T_d(s)} = \frac{-\left(\frac{r}{J}\right)s}{s^3 + \left(\frac{b}{J}\right)s^2 + \left(\frac{2k}{m} + \frac{2kr^2}{J}\right)s + \left(\frac{2kb}{Jm} + \frac{2kK_mk_1k_2r}{JmR}\right)}.$$

También se puede determinar la función de transferencia en lazo cerrado utilizando los métodos de reducción de diagramas de bloques, como se ilustra en la Figura 3.27. Recuérdese que no hay un camino único a seguir en la reducción del diagrama de bloques; sin embargo, al final sólo hay una solución correcta. La Figura 3.26(b) muestra el diagrama de bloques original. El resultado del primer paso se muestra en 3.27(a), donde el lazo de realimentación superior se reduce a una función de transferencia. La Figura 3.27(b) ilustra el segundo paso donde se reducen los dos lazos de realimentación inferiores a una función de transferencia. En el tercer paso mostrado en la Figura 3.27(c), el lazo de realimentación inferior se cierra y a continuación se combinan las funciones de

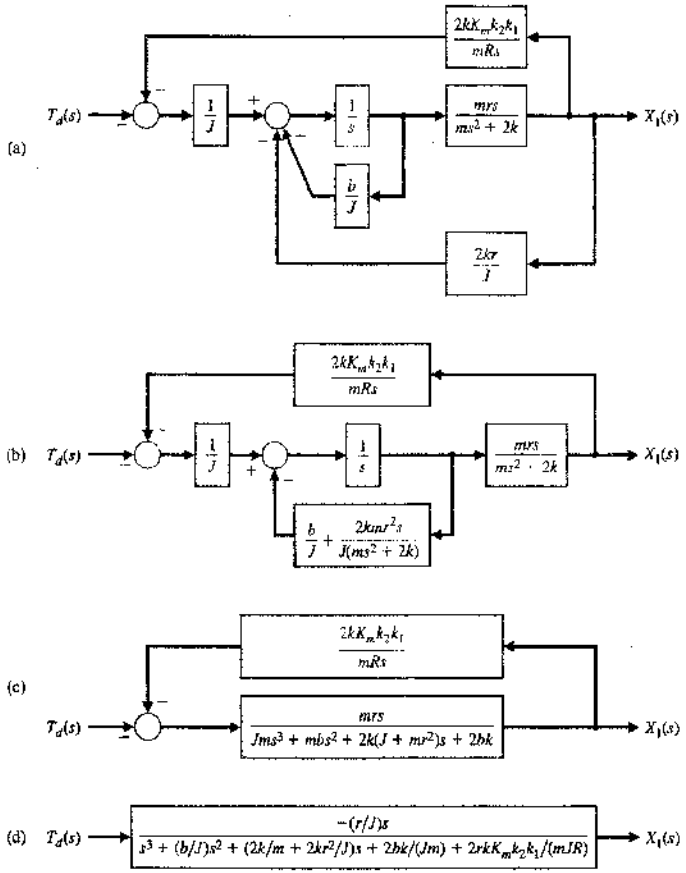


FIGURA 3.27
Reducción del diagrama de bloques de la impresora con transmisión por correa.

transferencia restantes en serie en el lazo más inferior. El último paso de la función de transferencia en lazo cerrado se muestra en la Figura 3.27(d).

Sustituyendo los valores de los parámetros recogidos en la Tabla 3.2, se obtiene

$$\frac{X_1(s)}{T_d(s)} = \frac{-15s}{s^3 + 25s^2 + 14.5ks + 1000k(0.25 + 0.15k_2)} \tag{3.121}$$

Se desea seleccionar la constante del muelle k y la ganancia k_2 para que la variable de estado x_1 disminuya rápidamente a un valor bajo cuando aparece una perturbación. A efectos de prueba, considérese una perturbación escalón $T_d(s) = a/s$. Recordando que $x_1 = r\theta - y$, se busca un valor pequeño para x_1 tal que y sea casi igual al valor deseado $r\theta$. Si se tiene la correa perfectamente rígida con $k \to \infty$, entonces, exactamente, $y = r\theta$. Con una perturbación escalón, $T_d(s) = a/s$, se tiene

$$X_1(s) = \frac{-15a}{s^3 + 25s^2 + 14.5ks + 1000k(0.25 + 0.15k_2)} \tag{3.122}$$

El teorema del valor final da

$$\lim_{t \to \infty} x_1(t) = \lim_{s \to 0} sX_1(s) = 0, \tag{3.123}$$

y de este modo el valor en estado estacionario de $x_1(t)$ es cero. Se necesita utilizar un valor realista para k en el intervalo $1 \leqslant k \leqslant 40$. Para un valor medio de $k = 20$ y $k_2 = 0.1$, se tiene

$$X_1(s) = \frac{15a}{s^3 + 25s^2 + 290s + 5300} = \frac{-15a}{(s + 22.56)(s^2 + 2.44s + 234.93)} \tag{3.124}$$

La ecuación característica tiene una raíz real y dos raíces complejas. La expansión en fracciones parciales produce

$$\frac{X_1(s)}{a} = \frac{A}{s + 22.56} + \frac{Bs + C}{(s + 1.22)^2 + (15.28)^2} \tag{3.125}$$

donde se obtiene $A = -0.0218$, $B = 0.0218$ y $C = -0.4381$. Claramente, con estos residuos pequeños la respuesta a la perturbación unidad es relativamente pequeña. Debido a que A y B son pequeños comparados con C, se puede aproximar $X_1(s)$ como

$$\frac{X_1(s)}{a} \cong \frac{-0.4381}{(s + 1.22)^2 + (15.28)^2}$$

Utilizando la Tabla 2.3 se obtiene

$$\frac{x_1(t)}{a} \cong -0.0287e^{-1.22t} \operatorname{sen} 15.28t. \tag{3.126}$$

La respuesta real de x_1 se muestra en la Figura 3.28. Este sistema reducirá el efecto de la perturbación no deseada a un valor relativamente pequeño. De este modo se consigue nuestro objetivo de diseño.

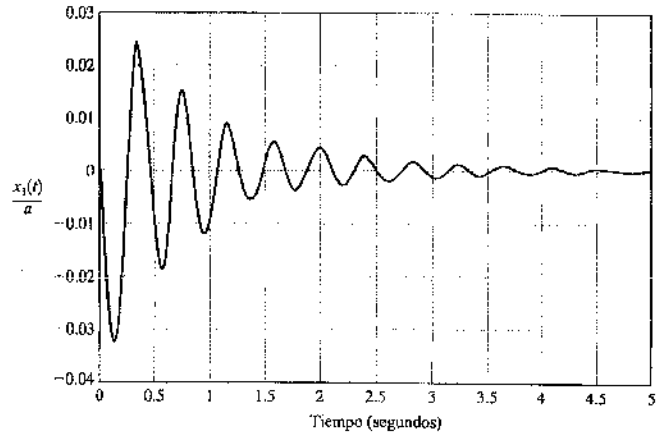


FIGURA 3.28
Respuesta de $x_1(t)$ a una perturbación escalón: valor de pico = −0.0325.

3.10. ANÁLISIS DE MODELOS DE VARIABLES DE ESTADO UTILIZANDO MATLAB

El método en el dominio del tiempo utiliza una representación en el espacio de estados del modelo del sistema, dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad \text{y} \quad y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u. \tag{3.127}$$

El vector $\mathbf{x}$ es el estado del sistema, $\mathbf{A}$ es la matriz del sistema constante $n \times n$, $\mathbf{B}$ es la matriz de entrada constante $n \times m$, $\mathbf{C}$ es la matriz de salida constante $p \times n$, y $\mathbf{D}$ es una matriz constante $p \times m$. El número de entradas, m, y el número de salidas, p, se toman como uno al considerarse únicamente problemas de una entrada y una salida (SISO). Por tanto, y y u no son variables en negrita (matrices).

Los elementos principales de la representación en el espacio de estados en la Ecuación (3.127) son el vector de estado $\mathbf{x}$ y las matrices constantes ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$). Como la principal unidad computacional en MATLAB es la matriz, la representación en el espacio de estados se presta bien al entorno MATLAB. De hecho, MATLAB abarca tantos aspectos de los métodos en el espacio de estados que no se podrán tratar todos aquí. Dos nuevas funciones que se incluyen en esta sección son ss y lsim. También se considera el uso de la función expm para calcular la matriz de transición de estados.

Dada una función de transferencia, se puede obtener la representación equivalente en el espacio de estados y viceversa. La función tf puede utilizarse para convertir una representación en el espacio de estados a una representación en función de transferencia; la función ss se utiliza para convertir una representación en función de transferencia a una representación en el espacio de estados. Estas funciones se muestran en la Figura 3.29, donde sys_tf representa un modelo de función de transferencia y sys_ss es una representación en el espacio de estados.

Por ejemplo, considérese el sistema de tercer orden

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6}. \tag{3.128}$$

Se puede obtener una representación en el espacio de estados utilizando la función ss, como se muestra en la Figura 3.30. La representación en el espacio de estados de la Ecuación (3.128) está dada por la Ecuación (3.127), donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8 & -1 & -0.1875 \\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0.25 \quad 0.09375] \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = [0].$$

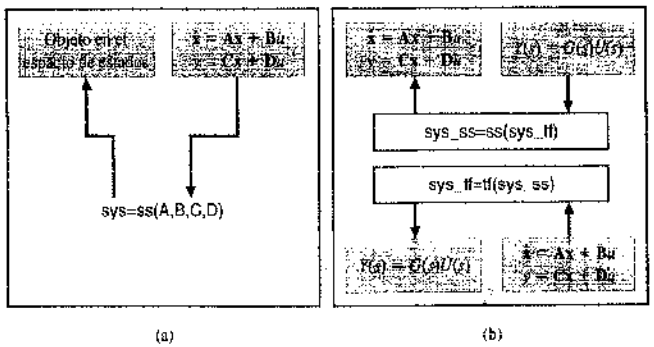


FIGURA 3.29
(a) La función ss. (b) Conversión del modelo del sistema lineal.

convert.m

```
% Convierte G(s) = (2s^2+8s+6)/(s^3+8s^2+16s+6)
% a una representación en el espacio de estados
%
num=[2 8 6]; den=[1 8 16 6]; sys_tf=tf(num,den);
sys_ss=ss(sys_tf)
```

(a)

```
>>convert
a =
       x1      x2      x3
x1     -8      -1  -0.1875
x2     16       0       0
x3      0       2       0

b =
       u1
x1      2
x2      0
x3      0

c =
       x1      x2      x3
y1      1    0.25 0.09375

d =
       u1
y1      0
```

(b)

FIGURA 3.30. Conversión de la Ecuación (3.128) a la representación de espacio de estados. (a) Programa MATLAB. (b) Salida por pantalla.

La representación en el espacio de estados de la función de transferencia de la Ecuación (3.128) se describe en la Figura 3.31.

La respuesta temporal del sistema de la Ecuación (3.127) está dada por la solución de la ecuación diferencial vectorial

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t-\tau)]\mathbf{B}u(\tau)\,d\tau. \tag{3.129}$$

La función exponencial matricial en la Ecuación (3.129) es la matriz de transición de estados, $\Phi(t)$, donde (Ecuación 3.23)

$$\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t).$$

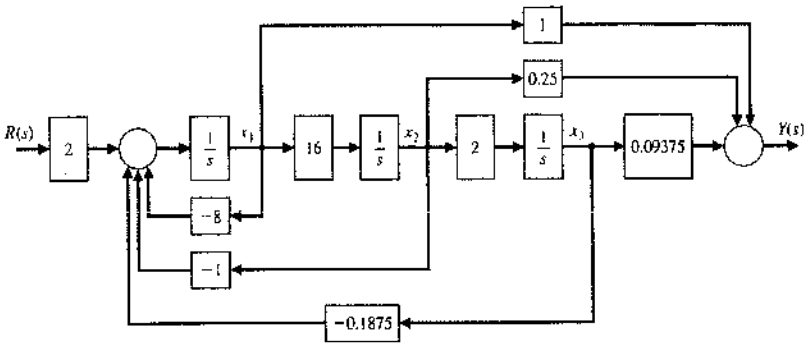


FIGURA 3.31. Diagrama de bloques con x_1 definida como la variable de estado más a la izquierda.

```
>>A=[0 -2; 1 -3]; dt=0.2; Phi=expm(A*dt)

Phi =

    0.9671   -0.2968
    0.1484    0.5219
```

Matriz de transición de estados para un Δt de 0.2 segundos

FIGURA 3.32
Cálculo de la matriz de transición de estados para un determinado instante de tiempo, $\Delta t = dt$.

Se puede utilizar la función expm para calcular la matriz de transición en un determinado instante de tiempo, como se ilustra en la Figura 3.32. La función expm(A) calcula la exponencial de la matriz. Por el contrario, la función exp(A) calcula $e^{a_{ij}}$ para cada uno de los elementos $a_{ij} \in \mathbf{A}$.

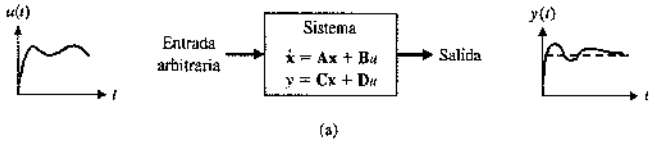
Por ejemplo, se considera la red *RLC* de la Figura 3.4 descrita por la representación en el espacio de estados de la Ecuación (3.18) con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0] \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = 0.$$

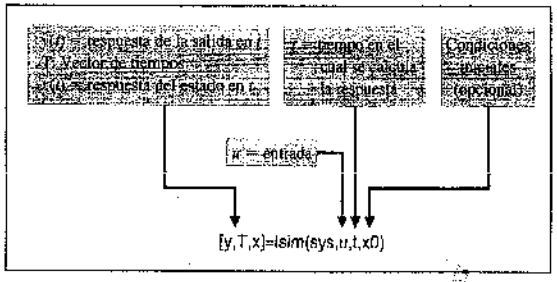
Las condiciones iniciales son $x_1(0) = x_2(0) = 1$ y la entrada $u(t) = 0$. En $t = 0.2$, la matriz de transición de estados es como la representada en la Figura 3.32. El estado en $t = 0.2$ predicho por los métodos de transición de estados es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{t=0.2} = \begin{bmatrix} 0.9671 & -0.2968 \\ 0.1484 & 0.5219 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} 0.6703 \\ 0.6703 \end{pmatrix}.$$

La respuesta temporal del sistema de la Ecuación (3.128) también puede obtenerse utilizando la función lsim. La función lsim puede aceptar como entrada condiciones iniciales distintas de cero y una función de entrada, como muestra la Figura 3.33. Utilizando la función lsim se puede calcular la respuesta para la red *RLC* como se muestra en la Figura 3.34.

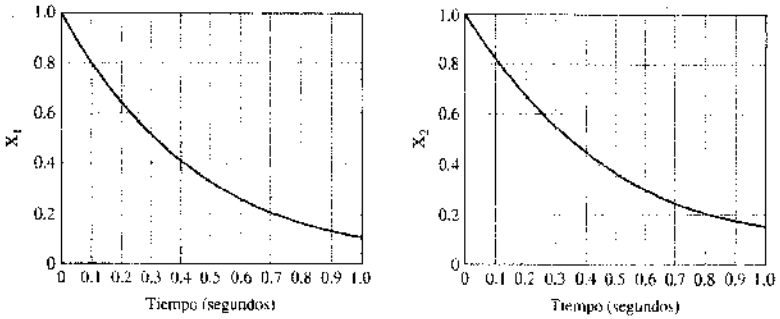


(a)


[y] = respuesta de la salida en t
T = Vector de tiempos
[x] = respuesta del estado en t
t = tiempo en el cual se calcula la respuesta
Condiciones iniciales (opcional)
u = entrada
[y,T,x]=lsim(sys,u,t,x0)

(b)

FIGURA 3.33
La función lsim para calcular la respuesta de la salida y la del estado.




```
A=[0 -2;1 -3]; B=[2;0]; C=[1 0]; D=[0];
sys=ss(A,B,C,D);   ← Modelo en el espacio de estados
x0=[1 1];          ← Condiciones iniciales
t=[0:0.01:1];
u=0*t;             ← Entrada cero
[y,T,x]=lsim(sys,u,t,x0);
subplot(211), plot(T,x(:,1))
xlabel('Time (seconds)'), ylabel('X_1')
subplot(212), plot(T,x(:,2))
xlabel('Time (seconds)'), ylabel('X_2')
```

FIGURA 3.34
Cálculo de la respuesta temporal para condiciones iniciales distintas de cero y entrada cero utilizando lsim.

El estado en $t = 0.2$ predicho con la función lsim es $x_1(0.2) = x_2(0.2) = 0.6703$. Si se comparan los resultados obtenidos con la función lsim con los obtenidos multiplicando el vector de estado de condiciones iniciales por la matriz de transición de estados se observará que son idénticos.

3.11. EJEMPLO DE DISEÑO SECUENCIAL: SISTEMA DE LECTURA DE UNA UNIDAD DE DISCO

Los discos avanzados tienen unas 5000 pistas por cm. Estas pistas tienen típicamente 1 μm de ancho. De este modo, hay requisitos rigurosos sobre la precisión de la posición de la cabeza de lectura y del movimiento de una pista a otra. En este capítulo, se desarrollará un modelo en variables de estado del sistema de una unidad de disco que incluirá el efecto del flexor.

Sea otra vez el montaje de la cabeza que se muestra en la Figura 2.66. Como se necesita un brazo de peso ligero y que sea capaz de flexionar para movimientos rápidos, se debe considerar el efecto del flexor, que es una pieza muy fina de hecha de acero para resortes. Otra vez, se desea controlar la posición de la cabeza $y(t)$ de manera precisa tal como se muestra en la Figura 3.35(a) (paso 2 del proceso de diseño de la Figura 1.22). Se intentará deducir un modelo para el sistema que se muestra en la Figura 3.35(a). Aquí se identifica la masa del motor como M_1 y la masa del montaje de la cabeza como M_2. El resorte del flexor se representa por la constante elástica k. La fuerza $u(t)$ para mover la masa M_1 está generada por el motor de cc. Si el resorte es absolutamente rígido (es decir, no hay resorte), se obtiene el modelo simplificado que se muestra en la Figura 3.35(b). En la Tabla 3.3 se dan los parámetros típicos para el sistema de dos masas.

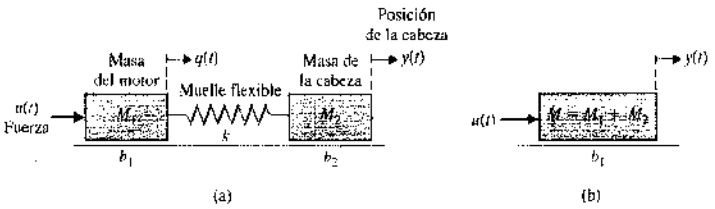


FIGURA 3.35
(a) Modelo del sistema de dos masas con un resorte flexible. (b) Modelo simplificado con un resorte rígido.

Tabla 3.3 Parámetros típicos del modelo de dos masas

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa del motor	M_1	20 g = 0.02 kg
Flexión del resorte	k	$10 \leq k \leq \infty$
Montaje de la cabeza	M_2	0.5 g = 0.0005 kg
Posición de la cabeza	$x_2(t)$	Variable en mm
Fricción en la masa 1	b_1	410×10^{-3} kg/m/s
Resistencia de campo	R	1 Ω
Inductancia de campo	L	1 mH
Constante del motor	K_m	0.1025 N · m/A
Fricción en la masa 2	b_2	4.1×10^{-3} kg/m/s

Se va a obtener el modelo de función de transferencia del sistema simplificado de la Figura 3.35(b) (paso 5 del proceso de diseño de la Figura 1.22). Obsérvese que $M = M_1 + M_2 = 20.5$ g = 0.0205 kg. Entonces se tiene

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + b_1\frac{dy}{dt} = u(t). \tag{3.130}$$

Por tanto, el modelo de función de transferencia es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(Ms + b_1)}.$$

Para los parámetros de la Tabla 3.3, se obtiene

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(0.0205s + 0.410)} = \frac{48.78}{s(s + 20)}.$$

En la Figura 3.36 se muestra el modelo de función de transferencia de la cabeza de lectura, incluido el efecto de la bobina del motor. Cuando $R = 1\ \Omega$, $L = 1$ mH y $K_m = 0.1025$, se obtiene

$$G(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{5000}{s(s + 20)(s + 1000)}, \tag{3.131}$$

que es exactamente el mismo modelo que se obtuvo en el Capítulo 2.

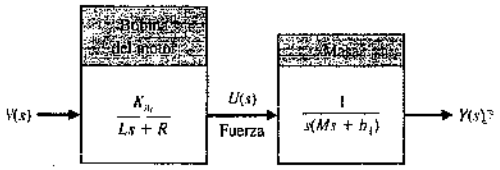


FIGURA 3.36
Modelo de función de transferencia del dispositivo de la cabeza de lectura con un resorte rígido.

A continuación se obtiene el modelo en variables de estado del sistema de dos masas que se muestra en la Figura 3.35(a). Se escribe la ecuación diferencial como

$$\text{Masa } M_1\text{: } M_1\frac{d^2q}{dt^2} + b_1\frac{dq}{dt} + k(q - y) = u(t)$$

$$\text{Masa } M_2\text{: } M_2\frac{d^2y}{dt^2} + b_2\frac{dy}{dt} + k(y - q) = 0.$$

Para desarrollar el modelo en variables de estado, se escogen las variables de estado como $x_1 = q$ y $x_2 = y$. Entonces se tiene

$$x_3 = \frac{dq}{dt} \quad \text{y} \quad x_4 = \frac{dy}{dt}.$$

Por tanto, en forma matricial,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,$$

y se tiene

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ y \\ \dot{q} \\ \dot{y} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/M_1 & k/M_1 & -b_1/M_1 & 0 \\ k/M_2 & -k/M_2 & 0 & -b_2/M_2 \end{bmatrix}. \tag{3.132}$$

Obsérvese que la salida es $\dot{y}(t) = x_4$. Además, para $L = 0$ o inductancia despreciable, $u(t) = K_m v(t)$. Para los parámetros típicos y para $k = 10$, se tiene

$$\mathbf{B}^T = [0 \quad 0 \quad 50 \quad 0]$$

y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -500 & +500 & -20.5 & 0 \\ +20000 & -20000 & 0 & -8.2 \end{bmatrix}.$$

```
% Parámetros del modelo
k=10;
M1=0.02; M2=0.0005;
b1=410e-03; b2=4.1e-03;
t=[0:0.001:1.5];
% Modelo en el espacio de estados
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;-k/M1 k/M1 -b1/M1 0; k/M2 -k/M2 0 -b2/M2];
B=[0;0;1/M1;0]; C=[0 0 0 1]; D=[0]; sys=ss(A,B,C,D);
% Respuesta a un escalón simulado
y=step(sys,t); plot(t,y); grid
xlabel('Tiempo (segundos)'), ylabel('y dot (m/s)')
```

Unidades
k: N/m
b: kg/m/s
m: kg

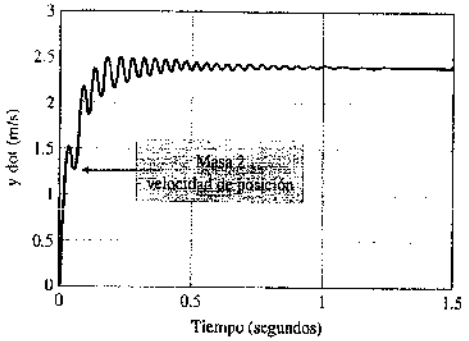


FIGURA 3.37 Respuesta de y a una entrada en escalón para el modelo de dos masas con $k = 10$.

En la Figura 3.37 se muestra la respuesta de $\dot{y}$ para $u(t) = 1$, $t > 0$. Esta respuesta es bastante oscilatoria, y está claro que lo que se desea es una flexión muy rígida tal que $k > 100$.

3.12. RESUMEN

En este capítulo se ha considerado la descripción y el análisis de los sistemas en el dominio del tiempo. Se analizó el concepto de estado de un sistema y la definición de las variables de estado. Se examinó la selección de un conjunto de variables de estado en función de las variables que describen la energía almacenada de un sistema y se observó la no unicidad de los conjuntos de variables de estado. Se analizaron la ecuación diferencial de estado y la solución para $\mathbf{x}(t)$. Se consideraron dos estructuras alternativas de modelos de grafo de flujo de señal para representar la función de transferencia (o ecuación diferencial) de un sistema. Usando la fórmula de Mason de la ganancia, se observó la facilidad para obtener el modelo de grafo de flujo. También se examinó la ecuación diferencial vectorial para representar estos modelos de grafos de flujo. Se trataron la respuesta en el tiempo de un sistema lineal y su matriz de transición asociada; se ilustró la utilidad de la fórmula de Mason de la ganancia para obtener la matriz de transición. Se consideró un cálculo en tiempo discreto de la respuesta en el tiempo de un sistema no lineal y de un sistema que varía en el tiempo. Además, se observó que la aproximación en tiempo discreto para una respuesta en el tiempo, así como la formulación de la matriz de transición para sistemas lineales, es fácilmente aplicable a la programación y solución con un computador digital. Se analizó y se ilustró la utilización de MATLAB para convertir una función de transferencia a la forma de variables de estado y para calcular la matriz de transición de estados. El capítulo finalizó con el desarrollo de un modelo en variables de estado para el ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco.

EJERCICIOS

E3.1. Para el circuito de la Figura E3.1, identifíquese un conjunto de variables de estado.

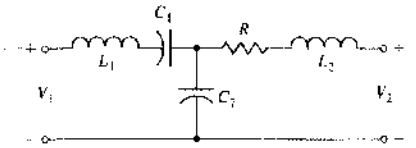


FIGURA E3.1. Circuito *RLC*.

E3.2. Un sistema impulsor de un brazo de robot para una articulación se puede representar por la ecuación diferencial [8]

$$\frac{dv(t)}{dt} = -k_1 v(t) - k_2 y(t) + k_3 i(t),$$

donde $v(t)$ = velocidad, $y(t)$ = posición e $i(t)$ es la corriente del motor de control. Pónganse las ecuaciones en forma de variables de estado y establézcase la forma matricial de $k_1 = k_2 = 1$.

E3.3. Un sistema se puede representar por la ecuación diferencial vectorial de estado dada por la Ecuación (3.16), donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determínense las raíces características del sistema.

Respuesta: $s = -1/2 \pm j\sqrt{3}/2$

E3.4. Obténgase una matriz variable de estado para un sistema con ecuación diferencial

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 8y = 20u(t).$$

E3.5. Un sistema está representado por un diagrama de bloques como se muestra en la Figura E3.5. Escríbanse las ecuaciones de estado para este grafo de flujo, en la forma de las Ecuaciones (3.16) y (3.17).

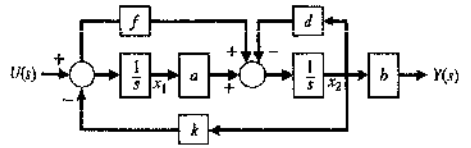


FIGURA E3.5. Diagrama de bloques.

E3.6. Un sistema está representado por la Ecuación (3.16), donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Hállese la matriz $\Phi(t)$. (b) Para las condiciones iniciales $x_1(0) = x_2(0) = 1$, hállese $\mathbf{x}(t)$.

Respuesta: (b) $x_1 = (1 + t)$, $x_2 = 1$, $t \geq 0$

E3.7. Considérense el resorte y la masa de la Figura 3.3, donde $M = 1$ kg, $k = 100$ N/m y $b = 20$ N/m/s. (a) Determínese la ecuación diferencial vectorial de estado. (b) Calcúlense las raíces de la ecuación característica para este sistema.

Respuesta: (a) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -20 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$

(b) $s = -10, -10$

E3.8. La tarea manual de suspensión a baja altitud sobre la pista de aterrizaje móvil de un barco pequeño es muy difícil, sobre todo cuando las condiciones del mar y climatológicas son adversas. La condición de suspensión se representa por la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determínense las raíces de la ecuación característica.

E3.9. La Figura E3.9 muestra un circuito no forzado. Las cargas de cada condensador se escogen como variables de estado físicas, tal que $x_1 = q_1$ y $x_2 = q_2$. (a) Obténgase el modelo de la ecuación diferencial del sistema. (b) Determínese la representación de variables de estado. (c) Determínese la ecuación característica. Obsérvese que $i_1 = dq_1/dt = dx_1/dt$ e $i_2 = dx_2/dt$. Supóngase que la variable de salida es la corriente i_2.

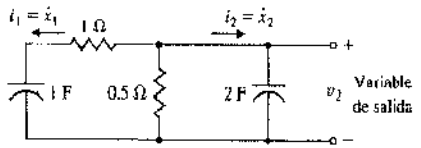


FIGURA E3.9. Circuito *RC*.

E3.10. Un sistema de control de un vehículo con suspensión se representa por dos variables de estado, y [15]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

(a) Determínense las raíces de la ecuación característica. (b) Hállese la matriz de transición de estados $\Phi(t)$.

Respuesta: (a) $s = -3, -2$

(b) $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & -6e^{-2t} + 6e^{-3t} \\ e^{-3t} - e^{-2t} & 3e^{-3t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

E3.11. Determínese una representación en variables de estado para el sistema descrito por la función de transferencia

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4(s+3)}{(s+2)(s+6)}.$$

E3.12. Utilícese un modelo en variables de estado para describir el circuito de la Figura E3.12. Obténgase la respuesta a una entrada escalón unitario cuando la corriente inicial es cero y el voltaje inicial del condensador es cero.

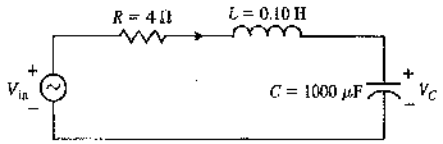


FIGURA E3.12. Circuito serie *RLC*.

E3.13. Un sistema está descrito por las dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dt} + y - 2u + aw = 0,$$

y

$$\frac{dw}{dt} - by + 4u = 0,$$

donde w e y son funciones del tiempo, y u es una entrada $u(t)$. (a) Selecciónese un conjunto de variables de estado. (b) Escríbase la ecuación diferencial matricial y especifíquense los elementos de las matrices. (c) Hállense las raíces características del sistema en función de los parámetros a y b.

Respuesta: (c) $s = -1/2 \pm \sqrt{1 - 4ab}/2$

E3.14. Desarróllese la representación en el espacio de estados de un material radiactivo de masa M al que se le añade material radiactivo adicional a una velocidad $r(t) = Ku(t)$, donde K es una constante. Identifíquense las variables de estado.

E3.15. Considérese el caso de las dos masas conectadas como se muestra en la Figura E3.15. La fricción de deslizamiento de cada masa tiene la constante b. Determínese una ecuación diferencial matricial de variables de estado.

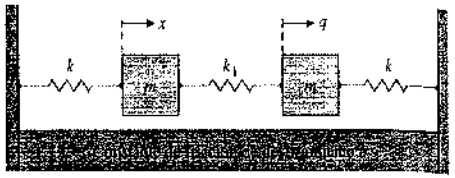


FIGURA E3.15. Sistema de dos masas.

E3.16. Dos carros con fricción despreciable en las ruedas se conectan como muestra la Figura E3.16. Una fuerza de entrada es $\mu(t)$. La salida es la posición del carro 2, es decir, $y(t) = q(t)$. Determínese una representación en el espacio de estados del sistema.

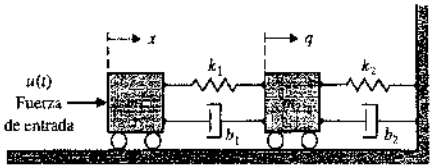


FIGURA E3.16. Dos carros con fricción despreciable en las ruedas.

E3.17. Determínese una ecuación diferencial matricial en variables de estado para el circuito que se muestra en la Figura E3.17.

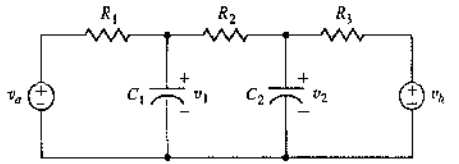


FIGURA E3.17. Circuito *RC*.

E3.18. Determínese una ecuación diferencial matricial en variables de estado para el circuito que se muestra en la Figura E3.18. Sea $x_1 = i_1$, $x_2 = i_2$ y $x_3 = v$.

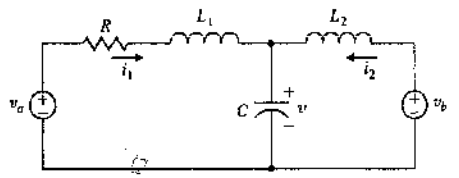


FIGURA E3.18. Circuito *RLC*.

E3.19. Un sistema de una entrada y una salida tiene las ecuaciones matriciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

y

$$y = [10 \quad 0]\mathbf{x}.$$

Determínese la función de transferencia $G(s) = Y(s)/U(s)$.

Respuesta: $G(s) = \dfrac{10}{s^2 + 4s - 3}$

PROBLEMAS

P3.1. En la Figura P3.1 se muestra un circuito *RLC*. (a) Identifíquese un conjunto adecuado de variables de estado. (b) Obténgase el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden en términos de las variables de estado. (c) Escríbase la ecuación diferencial de estado en forma matricial.

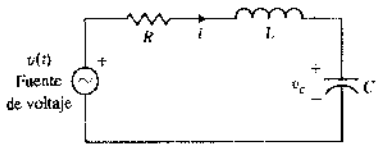


FIGURA P3.1. Circuito *RLC*.

P3.2. En la Figura P3.2 se muestra una red de puente **equilibrada**. (a) Demuéstrese que las matrices A y B para este circuito son

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2/(R_1 + R_2)C & 0 \\ 0 & -2R_1R_2/(R_1 + R_2)L \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = 1/(R_1 + R_2)\begin{bmatrix} 1/C & 1/C \\ R_2/L & -R_2/L \end{bmatrix}.$$

(b) Dibújese el diagrama de bloques. Las variables de estado son $(x_1, x_2) = (v_c, i_L)$.

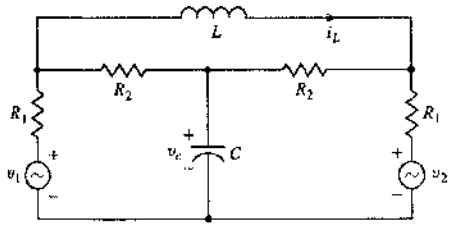


FIGURA P3.2. Red de puente equilibrada.

P3.3. En la Figura P3.3 se muestra una red *RLC*. Defínanse las variables de estado como $x_1 = i_L$ y $x_2 = v_c$. Obténgase la ecuación diferencial de estado.

Respuesta parcial:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -(1/C) & -(1/RC) \end{bmatrix}.$$

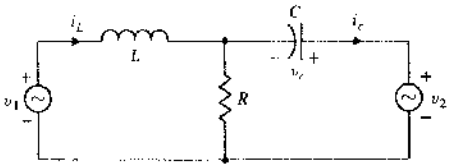


FIGURA P3.3. Circuito *RLC*.

P3.4. La función de transferencia de un sistema es

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^3 + 2s^2 + 3s + 10}.$$

Dibújese el diagrama de bloques y determínese la ecuación diferencial matricial en variables de estado para los siguientes formatos: (a) variables de fase; (b) entrada de prealimentación.

P3.5. En la Figura P3.5 se muestra un sistema de control de lazo cerrado. (a) Determínese la función de transferencia de lazo cerrado $T(s) = C(s)/R(s)$. (b) Dibújese el modelo de diagrama de bloques para el sistema y determínese la ecuación diferencial matricial.

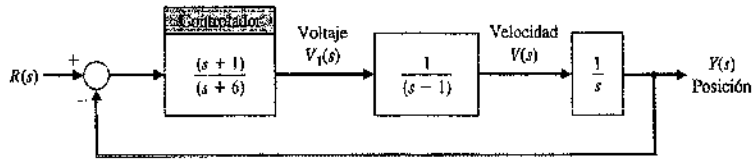


FIGURA P3.5
Sistema de lazo cerrado.

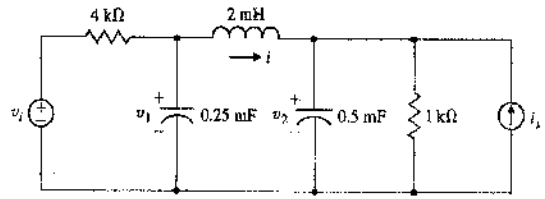


FIGURA P3.6
Circuito RLC

P3.6. Determínese la ecuación matricial en variables de estado para el circuito que se muestra en la Figura P3.6. Sean $x_1 = v_1$, $x_2 = v_2$ y $x_3 = i$.

P3.7. En la Figura P3.7 se muestra el sistema automático de control de profundidad para un robot submarino. La profundidad se mide mediante un transductor de presión. La ganancia del actuador del alerón de popa es $K = 1$ cuando la velocidad es de 25 m/s. El submarino tiene la función de transferencia aproximada

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{(s^2+1)},$$

y el transductor de realimentación es $H(s) = 2s + 1$. (a) Determínese una representación en el espacio de estados para el sistema. (b) Determínese si el sistema es estable.

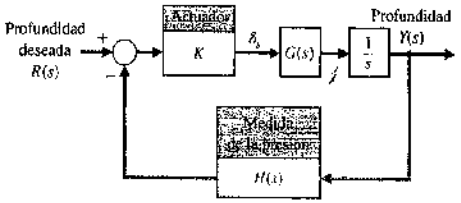


FIGURA P3.7. Control de profundidad submarina.

P3.8. El suave aterrizaje de un módulo lunar que desciende sobre la superficie de la luna se puede modelar como se muestra en la Figura P3.8. Defínanse las variables de estado como $x_1 = y$, $x_2 = dy/dt$, $x_3 = m$ y el control como $u = dm/dt$. Supóngase que g es la constante gravitacional en la luna. Determínense las ecuaciones en el espacio de estado para este sistema. ¿Es lineal este modelo?

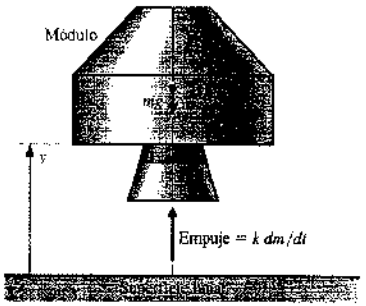


FIGURA P3.8. Control del aterrizaje de un módulo lunar

P3.9. Se ha diseñado un sistema de control de velocidad que utiliza componentes de paso de fluido. Se trata de un sistema puro de control de fluido, pues no tiene ninguna parte mecánica en movimiento. El fluido puede ser un gas o un líquido. Se ha diseñado un sistema que mantiene la velocidad dentro del 0.5% de la velocidad deseada usando un diapasón de sintonía de referencia y un actuador para la válvula. Los sistemas de control de fluidos son insensibles y confiables sobre un intervalo amplio de temperatura, radiación electromagnética y nuclear, aceleración y vibración. La amplificación dentro del sistema se logra usando un amplificador de deflexión del chorro de fluido. El sistema se diseñó para una turbina de vapor de 500 kW con una velocidad de 12 000 rpm. En la Figura P3.9 se muestra el diagrama de bloques del sistema. En unidades adimensionales se tiene $b = 0.1$, $J = 1$ y $K_i = 0.5$. (a) Determínese la función de transferencia de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{\omega(s)}{R(s)}.$$

(b) Determínese la representación en el espacio de estados. (c) Determínese la ecuación característica obtenida a partir de la matriz **A**.

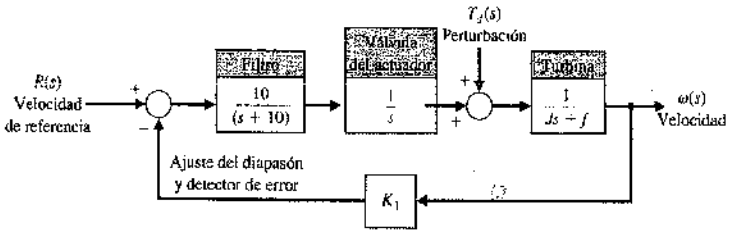


FIGURA P3.9
Control de una turbina de vapor.

P3.10. Muchos sistemas de control deben operar en dos dimensiones, por ejemplo los ejes x e y. En la Figura P3.10 se muestra un sistema de control de dos ejes, donde se identifica un conjunto de variables de estado. La ganancia de cada eje es K_1 y K_2, respectivamente. (a) Obténgase la ecuación diferencial de estado. (b) Hállese la ecuación característica a partir de la matriz **A**. (c) Determínese la matriz de transición de estados para $K_1 = 1$ y $K_2 = 2$.

P3.11. Un sistema se describe mediante la Ecuación 3.16 con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Con $u(t) = 0$ y $x_1(0) = x_2(0) = 10$. Determínense $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

P3.12. Un sistema se describe mediante su función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{8(s+5)}{s^3 + 12s^2 + 44s + 48}.$$

(a) Determínese la forma canónica de las variables de fase.
(b) Determínese la forma canónica diagonal de la ecuación matricial de variables de estado.
(c) Determínese $\phi(t)$, la matriz de transición de estados.

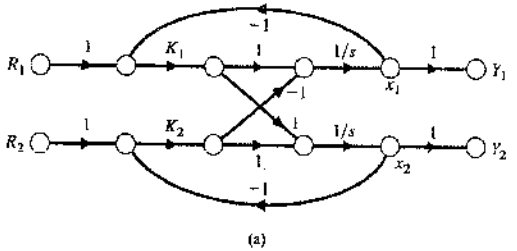
P3.13. Reconsidérese el circuito *RLC* del Problema P3.1 cuando $R = 2.5$, $L = 1/4$ y $C = 1/6$. (a) Determínese si el sistema es estable hallando la ecuación característica con ayuda de la matriz **A**. (b) Determínese la matriz de transición de la red. (c) Cuando la corriente inicial del inductor es de 0.1 A, $v_1(0) = 0$ y $v(t) = 0$, determínese la respuesta del sistema. (d) Repítase el apartado (c) cuando las condiciones iniciales son iguales a cero y $v(t) = E$, para $t > 0$, donde E es una constante.

P3.14. Determínese una representación en el espacio de estados para un sistema con función de transferencia

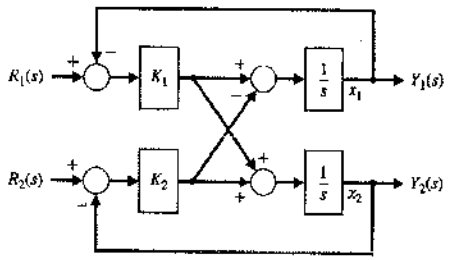
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{s+10}{s^4 + 12s^3 + 23s^2 + 34s + 40}.$$

P3.15. Obténganse un diagrama de bloques y una representación en variables de estado de este sistema.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{5(s+4)}{s^3 + 10s^2 + 31s + 20}.$$



(a)



(b)

FIGURA P3.10
Sistema de dos ejes. (a) Grafo de flujo de señal. (b) Modelo de diagrama de bloques.

P3.16. La Figura P3.16(a) muestra un sistema para dispensar fluido radiactivo dentro de cápsulas. La bandeja de cápsulas en el movimiento del eje horizontal es accionada por un motor lineal. El control en el eje x se muestra en la Figura P3.16(b). Supóngase $K = 500$. Obténganse (a) una representación en variables de estado y (b) la respuesta a un escalón unitario del sistema. (c) Determínense las raíces características del sistema.

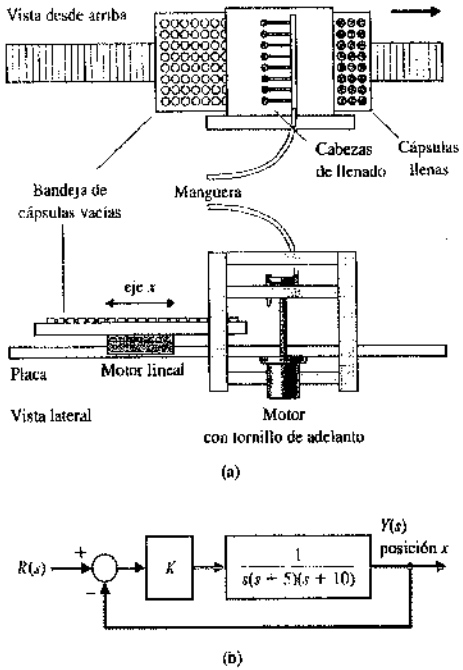


FIGURA P3.16. Dispensador de fluido automático.

P3.17. La dinámica de un submarino controlado es significativamente diferente de la de un aeroplano, un proyectil o una embarcación. Esta diferencia resulta principalmente del momento en el plano vertical debido al efecto de flotación. Por tanto, es interesante considerar el control de la profundidad de un submarino. Las ecuaciones que describen la dinámica de un submarino pueden obtenerse usando las leyes de Newton y los ángulos definidos en la Figura P3.17. Para simplificar las ecuaciones, se supondrá que θ es un ángulo pequeño y que la velocidad v es constante e igual a 25 ft/s. Las variables de estado del submarino, considerando únicamente el control vertical, son $x_1 = \theta$, $x_2 = d\theta/dt$ y $x_3 = \alpha$, donde α es el ángulo de ataque. Por esto, la ecuación diferencial vectorial de estado para este sistema, cuando el submarino tiene un casco de tipo Albacore, es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.0071 & -0.111 & 0.12 \\ 0 & 0.07 & -0.3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.095 \\ +0.072 \end{bmatrix} u(t),$$

donde $u(t) = \delta_s(t)$, la deflexión del alerón de popa. (a) Determínese si el sistema es estable. (b) Usando la aproximación en tiempo discreto, determínese la respuesta del sistema para una orden de escalón en el alerón de popa de 0.285°, con las condiciones iniciales iguales a cero. Utilícese un incremento de tiempo T igual a 2 segundos. (c) Usando un incremento de tiempo de $T = 0.5$ segundos y un computador digital, obténgase la respuesta transitoria para cada estado para 80 segundos. Compárense las respuestas calculadas en (b) y (c).

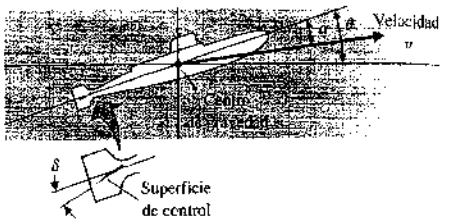


FIGURA P3.17. Control de profundidad de un submarino.

P3.18. Un sistema se describe mediante las ecuaciones en variable de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [20 \quad 30 \quad 10]\mathbf{x}.$$

Determínese $G(s) = Y(s)/U(s)$.

P3.19. Considérese el control del robot que se muestra en la Figura P3.19. El giro del motor en el codo mueve la muñeca a través del antebrazo, el cual, como se muestra en [16], tiene cierta flexibilidad. El resorte tiene una constante k y una constante de amortiguación de fricción b. Sean $x_1 = \phi_1 - \phi_2$ y $x_2 = \omega_1/\omega_0$ las variables de estado, donde

$$\omega_0^2 = \frac{k(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}$$

Escríbase la ecuación de las variables de estado en forma matricial cuando $x_3 = \omega_2/\omega_0$.

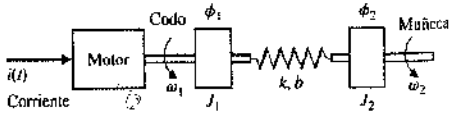


FIGURA P3.19. Un robot industrial. (Cortesía de GCA Corporation)

P3.20. La derivada de una variable de estado puede aproximarse por la ecuación

$$\dot{x}(t) \simeq \frac{1}{2T}[3x(k+1) - 4x(k) + x(k-1)].$$

Esta aproximación de la derivada utiliza dos valores anteriores para calcular dicha derivada, en tanto que la Ecuación (3.89) usa un valor anterior de la variable de estado. Usando esta aproximación para la derivada, repítanse los cálculos para el Ejemplo 3.6. Compárese la aproximación que resulta para $x_1(t)$, $T = 0.2$, con los resultados dados en la Tabla 3.1. ¿Es esta aproximación más exacta?

P3.21. Un reactor nuclear que opera en equilibrio a alto nivel de flujo de neutrones térmicos, se apaga repentinamente. En el momento del apagón, la densidad del xenón 135 (Xe) y del yodo 135 (I) son 7×10^{16} y 3×10^{15} átomos por unidad de volumen, respectivamente. La vida media de los núcleos del I 135 y del Xe 135 es de 6.7 y 9.2 horas, respectivamente. Las ecuaciones de desintegración son [17, 23]

$$\dot{I} = -\frac{0.693}{6.7} I, \qquad \dot{X} = -\frac{0.693}{9.2} X - I.$$

Determínense las concentraciones de I 135 y Xe 135 como funciones del tiempo siguiente al apagón, determinando (a) la matriz de transición y la respuesta de sistema y (b) un cálculo en tiempo discreto de la respuesta en el tiempo. Verifíquese si la respuesta del sistema es la mostrada en la Figura P3.21.

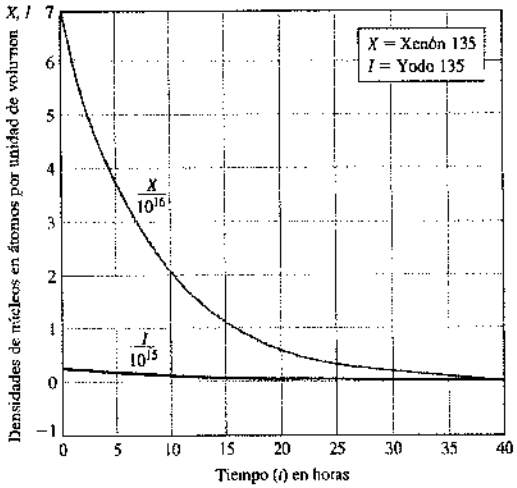


FIGURA P3.21 Respuesta de un reactor nuclear.

P3.22. En las Figuras 3.8 y 3.10 se muestran dos modelos equivalentes para una ecuación de cuarto orden (Ecuación 3.38). La Figura P3.22 muestra otra estructura alternativa. En este caso, el sistema es de segundo orden y la función de transferencia de entrada-salida es

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}.$$

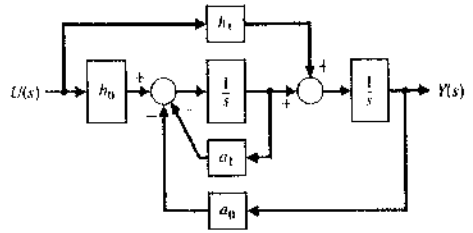


FIGURA P3.22. Modelo de sistema de segundo orden.

(a) Verifíquese si el modelo de diagrama de bloques de la Figura P3.22 es realmente un modelo de $G(s)$. (b) Demuéstrese que la ecuación diferencial vectorial que representa al modelo de diagrama de bloques de la Figura P3.22 es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_0 \end{bmatrix} u(t),$$

donde $h_1 = b_1$ y $h_0 = b_0 - b_1 a_1$.

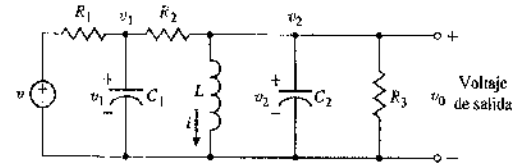


FIGURA P3.23
Circuito *RLC*.

P3.23. Determínese la ecuación diferencial matricial en variables de estado para el circuito de la Figura P3.23. Las variables de estado son $x_1 = i$, $x_2 = v_1$ y $x_3 = v_2$. La variable de salida es $v_0(t)$.

P3.24. El sistema de dos tanques de la Figura P3.24(a) está controlado por un motor que ajusta la válvula de entrada y finalmente varía la velocidad del flujo de salida. El sistema tiene la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{1}{s^3 + 10s^2 + 31s + 30}$$

para el diagrama de bloques que se muestra en la Figura P3.24(b). Obténganse el modelo de diagrama de bloques y la ecuación diferencial matricial para los siguientes modelos: (a) variables de fase, (b) entrada de prealimentación, (c) variables de estado físicas y (d) variables de estado desacopladas.

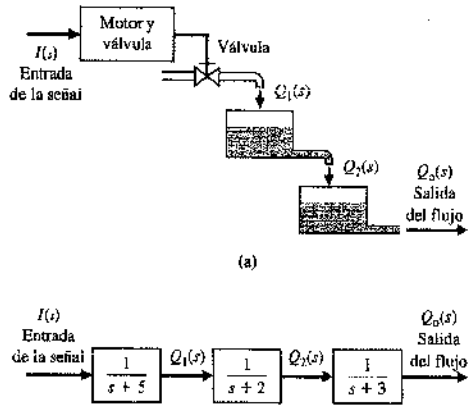


FIGURA P3.24. Un sistema de dos tanques con la corriente del motor controlando la velocidad del flujo de salida.
(a) Diagrama físico. (b) Diagrama de bloques.

P3.25. Es deseable utilizar reguladores bien diseñados para mantener la temperatura de los edificios que emplean sistemas de calentamiento de colectores solares. Un sistema de calentamiento solar se puede describir mediante [10]

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + u_1 + u_2,$$

y

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_2 + u_2 + d,$$

donde x_1 = desviación de temperatura del equilibrio deseado y x_2 = temperatura del material de almacenamiento (como un depósito con agua). Así mismo, u_1 y u_2 son, respectivamente, las velocidades de flujo de calor convencional y solar, donde el medio de transporte es aire forzado. Una perturbación solar en la temperatura del almacenamiento (como un cielo nublado) se representa por d. Escríbanse y resuélvanse las ecuaciones matriciales para obtener la respuesta del sistema cuando $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ y $d = 1$, con condiciones iniciales iguales a cero.

P3.26. Un sistema tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t).$$

Determínense $\Phi(s)$ y $\Phi(t)$ para el sistema.

P3.27. Un sistema tiene un diagrama de bloques como el que se muestra en la Figura P3.27. Determínense la ecuación diferencial en variables de estado y la matriz de transición de estados $\Phi(s)$.

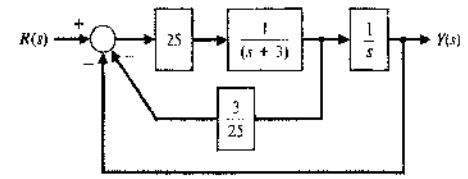


FIGURA P3.27. Sistema realimentado

P3.28. En la Figura P3.28 se muestra un giróscopo con un solo grado de libertad. Los giróscopos miden el movimiento angular de un sistema y se utilizan en los sistemas de control de vuelo automático. La suspensión cardan se mueve respecto del eje de salida *OB*. La entrada se mide respecto del eje de entrada *OA*. La ecuación de movimiento respecto del eje de salida se obtiene igualando la velocidad de cambio del momento angular a la suma de los pares. Obténgase una representación en el espacio de estados del giro.

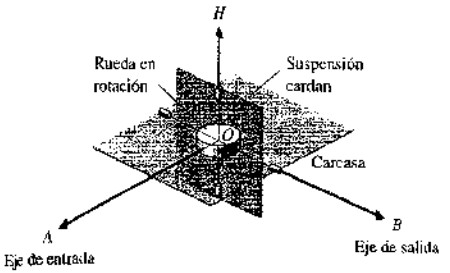


FIGURA P3.28. Giróscopo.

P3.29. La Figura P3.29 muestra un sistema de dos masas. La constante de fricción de las ruedas es b. Determínese la ecuación diferencial matricial cuando la variable de salida es $y_2(t)$.

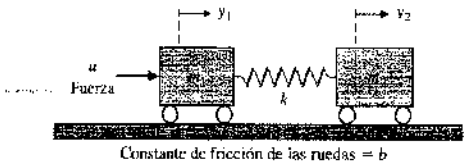


FIGURA P3.29. Sistema de dos masas.

P3.30. Se ha producido un considerable esfuerzo de ingeniería dirigido a encontrar formas de efectuar operaciones de manipulación en el espacio; por ejemplo, ensamblar una estación espacial y la adquisición de satélites de exploración. Para realizar tales tareas las lanzaderas espaciales llevan un sistema manipulador remoto (RMS) en la sección de carga [4, 12, 26]. El RMS tiene probada su eficacia en misiones de lanzaderas recientes, pero ahora se está considerando un nuevo método de diseño: un manipulador con segmentos de brazo inflables. Dicho diseño podría reducir el peso del manipulador en un factor de cuatro y se tendría un manipulador que, antes de inflarse, ocupa únicamente una octava parte como mucho en la sección de carga de la lanzadera del actual RMS.

La Figura P3.30(a) muestra la utilización de un RMS para construir un estructura espacial en la lanzadera, y la Figura P3.30(b) muestra un modelo de un brazo RMS flexible donde J es la inercia del eje de salida y L es la distancia de la carga al centro de gravedad. Obténganse las ecuaciones de estado para este sistema.

P3.31. Obténganse las ecuaciones de estado para el circuito de dos entradas y una salida que se muestra en la Figura P3.31, donde la salida es i_2.

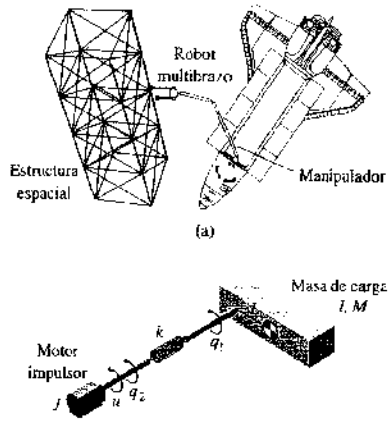


FIGURA P3.30. Sistema manipulador remoto

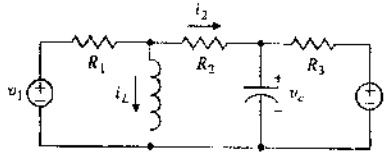


FIGURA P3.31. Circuito *RLC* de dos entradas.

P3.32. Los extensores son manipuladores de robot que amplían (es decir, incrementan) la fuerza del brazo humano en tareas de maniobra de carga (Figura P3.32) [23, 27]. El sistema viene representado por la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{30}{s^2 + 4s + 3},$$

donde $U(s)$ es la fuerza de la mano humana aplicada al manipulador de robot, e $Y(s)$ es la fuerza del manipulador del robot aplicada a la carga. Determínense un modelo en variables de estado y la matriz de transición de estados para el sistema.

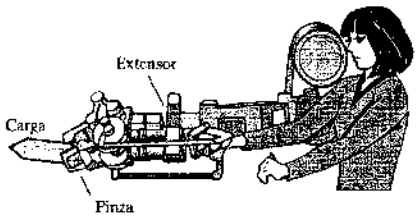


FIGURA P3.32. Extensor para aumentar la fuerza del brazo humano en tareas de maniobra de carga.

P3.33. Una droga que se toma oralmente se ingiere a una velocidad r. La masa de la droga en la zona gastrointestinal se denota por m_1 y la droga en el flujo sanguíneo por m_2. La velocidad de cambio de la masa de la droga en la zona gastrointestinal es igual a la velocidad con que la droga se ingiere menos la velocidad con que la droga entra en el flujo sanguíneo; esta velocidad se considera proporcional a la masa actual. La velocidad de cambio de la masa en el flujo sanguíneo es proporcional a la cantidad que viene de la zona gastrointestinal menos la velocidad con que se pierde masa mediante el metabolismo, la cual es proporcional a la masa actual de la sangre. Desarróllese una representación en el espacio de estado de este sistema.

Para el caso especial en que los coeficientes de A son iguales a 1 (con el signo apropiado), determínese la respuesta cuando $m_1(0) = 1$ y $m_2(0) = 0$. Dibuje las variables de estado frente al tiempo y sobre el plano de estados $x_1 - x_2$.

P3.34. Las dinámicas de un cohete se representan mediante

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2},$$

y se utiliza la realimentación en variables de estado donde $x_1 = y(t)$, $x_2 = \dot{y}(t)$ y $u = \quad x_2 \quad 0.5x_1$. Determínense las raíces de la ecuación característica de este sistema y la respuesta del sistema cuando las condiciones iniciales son $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 1$. La entrada $U(s)$ es el par aplicado e $Y(s)$ es la altura del cohete.

P3.35. Un sistema tiene la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{8}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

(a) Constrúyase una representación en el espacio de estado del sistema.

(b) Determínese el elemento $\phi_{11}(t)$ de la matriz de transición de estados para este sistema.

P3.36. Determínese una representación en el espacio de estados para el sistema mostrado en la Figura P3.36. La inductancia del motor es despreciable, la constante del motor es $K_m = 10$, la constante de la fuerza contraelectromagnética es $K_b = 0.0706$ la fricción del motor es despreciable. La inercia del motor y la válvula es $J = 0.006$, y el área del tanque es 50 m^2. Obsérvese que el motor está controlado por la corriente de inducido i_a. Sea $x_1 = h$, $x_2 = \theta$ y $x_3 = d\theta/dt$. Supóngase que $q_i = 80\theta$, donde θ es el ángulo del eje. El flujo de salida es $q_0 = 50h(t)$.

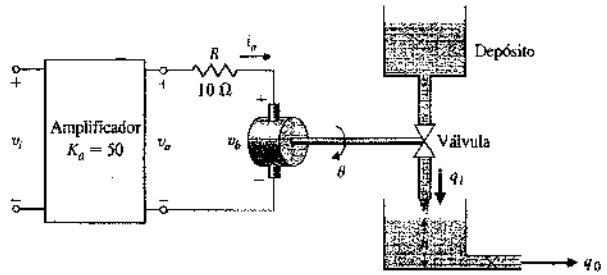


FIGURA P3.36
Sistema de un tanque.

PROBLEMAS AVANZADOS

PA3.1. Considérese el sistema de suspensión electromagnética mostrado en la Figura PA3.1. En la parte superior del sistema experimental se sitúa un electroimán. Utilizando la fuerza electromagnética f, se desea suspender la bola de hierro. Obsérvese que este sencillo sistema de suspensión electromagnética es esencialmente poco práctico, por lo que resulta indispensable el control realimentado. Como sensor de espacio se coloca debajo de la bola una sonda de inducción estándar del tipo de corriente de fuga [25].

Supóngase que las variables de estado son $x_1 = x$, $x_2 = dx/dt$ y $x_3 = i$. El electroimán tiene una inductancia $L = 0.508$ H y una resistencia $R = 23.2\ \Omega$. Utilícese una aproximación de series de Taylor para la fuerza electromagnética. La corriente es $i_t = (I_0 + i)$, donde $I_0 = 1.06$ A es el punto de operación e i es la variable. La masa m es igual a 1.75 kg. El espacio es $x_g = (X_0 + x)$, donde $X_0 = 4.36$ mm es el punto de operación y x es la variable. La fuerza electromagnética es $f = k(i_t/x_g)^2$, donde $k = 2.9 \times 10^{-4}$ Nm^2/A^2.

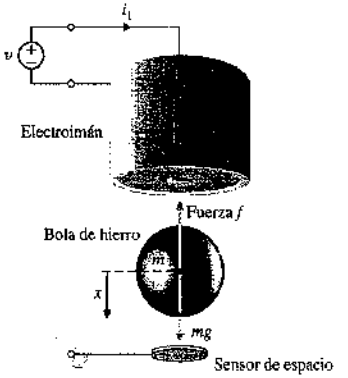


FIGURA PA3.1. Sistema de suspensión electromagnética.

Determínense la ecuación diferencial matricial y la función de transferencia $X(s)/V(s)$ equivalente.

PA3.2. Considérese la masa m montada sobre un carro sin masa, como muestra la Figura PA3.2. Determínese la función de transferencia $Y(s)/U(s)$ y utilícese la función de transferencia para obtener una representación en el espacio de estados del sistema.

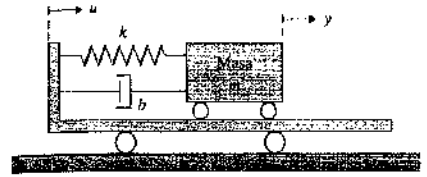


FIGURA PA3.2. Masa sobre carro

PA3.3. El control del movimiento de un vehículo autónomo desde un punto a otro depende de un control preciso de la posición del vehículo [18]. El control de posición $Y(s)$ de un vehículo autónomo se obtiene mediante el sistema que se muestra en la Figura PA3.3. Obténgase una representación en variables de estado del sistema.

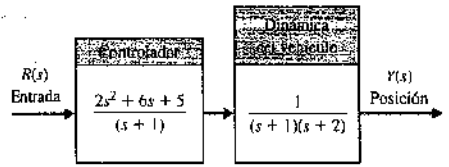


FIGURA PA3.3. Control de posición.

PA3.4. Las suspensiones delanteras se han convertido en un equipamiento estándar en las bicicletas de montaña. Al sustituir el manillar rígido que une la rueda delantera de la bicicleta a su estructura por tales suspensiones se absorbe el impacto de energía de los baches, protegiendo tanto a la estructura y al ciclista de las sacudidas. Sin embargo, los manillares utilizados comúnmente utilizan una única constante elástica y tratan los impactos con los baches esencialmente igual a altas y bajas velocidades; impactos que varían fuertemente en intensidad.

Podría ser atractivo un sistema de suspensión con múltiples ajustes que sean manipulables mientras la bicicleta está en movimiento. Hay disponible un resorte helicoidal de aire con un amortiguador de aceite que permite un ajuste de la constante de amortiguamiento al terreno así como del peso del ciclista [20]. La Figura PA3.4 muestra el modelo del sistema de suspensión, donde b es ajustable. Selecciónese el valor apropiado para b tal que la bicicleta se adapte (a) a un bache grande a altas velocidades y (b) a un bache pequeño a bajas velocidades. Supóngase que $k_2 = 1$ y $k_1 = 2$.

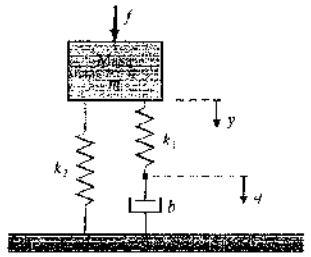


FIGURA PA3.4. Amortiguador.

PA3.5. La Figura PA3.5 muestra una masa M suspendida de otra masa m por medio de una varilla ligera de longitud L. Obténgase la ecuación matricial diferencial en variables de estado utilizando un modelo lineal al considerar un ángulo pequeño para θ.

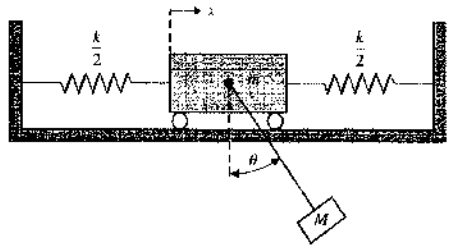


FIGURA PA3.5. Masa suspendida de un carro.

PA3.6. Considérese una grúa moviéndose en la dirección x mientras la masa m se mueve en la dirección z, como se muestra en la Figura PA3.6. El motor del carrito y el motor de la grúa son muy poderosos con respecto a la masa del carrito, el cable de la grúa y la carga m. Considérense las variables de control de entrada como las distancias D y R. También supóngase que $\theta < 50°$. Determínese un modelo lineal y descríbase la ecuación diferencial en variables de estado.

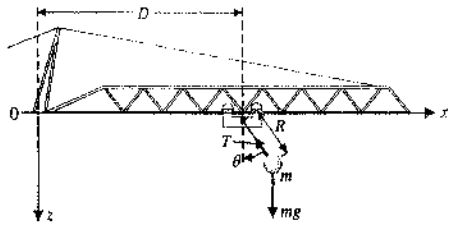


FIGURA PA3.6. Una grúa moviéndose en la dirección x mientras la masa se mueve en la dirección z.

PROBLEMAS DE DISEÑO

PDC3.1. La Figura PDC2.1 muestra la unidad de tracción que utiliza un sistema de eje impulsor. Despréciese el efecto de la inductancia del motor y determínese un modelo en variables de estado para el sistema. La Tabla PDC2.1 muestra los parámetros. La fricción del tobogán es despreciable.

PD3.1. La Figura 3.3 muestra un sistema amortiguador-masa-resorte que se utiliza como amortiguador de una motocicleta de gran rendimiento. Los parámetros originales seleccionados son $m = 1$ kg, $b = 9$ N·s/m y $k = 20$ N/m. (a) Determínense la matriz del sistema, las raíces características y la matriz de transición $\Phi(t)$. Supónganse las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $dy/dt|_{t=0} = 2$. (b) Dibújense las respuestas de $y(t)$ y dy/dt para los dos primeros segundos. (c) Rediséñese el amortiguador cambiando la constante elástica y la constante de amortiguamiento para reducir el efecto de la gran aceleración, d^2y/dt^2, sobre el ciclista. La masa debe permanecer constante en 1 kg.

PD3.2. Un sistema tiene la ecuación matricial en variables de estado en forma de variables de fase

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}u(t),$$

e $y = 10x_1$. Se desea que la forma diagonal canónica de la ecuación diferencial sea

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u,$$

$$y = [-5 \quad 5]\mathbf{z}.$$

Determínense los parámetros a, b y d para conseguir la ecuación diferencial matricial diagonal requerida.

PD3.3. La Figura PD3.3 muestra un engranaje de parada de avión que se utiliza en un avión de transporte. El modelo lineal de cada amortiguador de energía tiene una fuerza de arrastre $f_D = K_D\dot{x}_3$. Se desea parar al avión dentro de los 30 m siguientes al engranaje del cable de parada [15]. La velocidad del avión sobre tierra es de 60 m/s. Selecciónese la constante requerida K_D y dibújese la respuesta de las variables de estado.

PD3.4. La Compañía Mile-High Bungi Jumping quiere diseñar un sistema de salto con cuerda elástica, tal que el saltador no pueda golpearse en el suelo cuando su peso es menor de 100 kg pero mayor de 50 kg. Además, la compañía quiere un tiempo de suspensión (tiempo que el saltador se está moviendo hacia arriba y hacia abajo) superior a 25 segundos y menor de 40 segundos. Determínense las características de la cuerda. El saltador permanece en una plataforma a 90 m del suelo y la cuerda se une a una viga de seguridad fija a 10 m sobre la plataforma. Supóngase que el saltador es 2 m de alto y la cuerda está unida al pecho (a 1 m de altura).

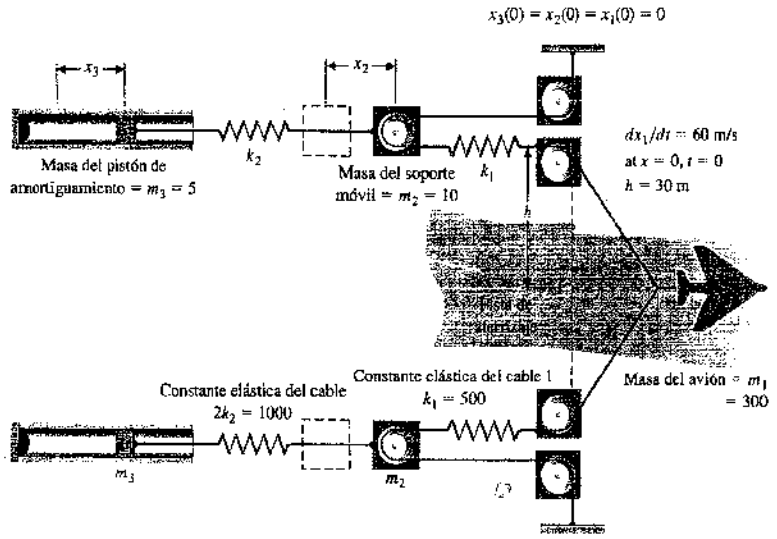

$x_3(0) = x_2(0) = x_1(0) = 0$
x_3
x_2
Masa del pistón de amortiguamiento = m_3 = 5
k_2
Masa del soporte móvil = m_2 = 10
k_1
dx_1/dt = 60 m/s at $x = 0$, $t = 0$
h = 30 m
Constante elástica del cable $2k_2$ = 1000
Constante elástica del cable 1 k_1 = 500
Masa del avión = m_1 = 300
m_3
m_2

FIGURA PD3.3
Engranaje de parada del avión.

PROBLEMAS CON MATLAB

PM3.1. Determínese una representación en variables de estado para las siguientes funciones de transferencia (sin realimentación) utilizando la función ss:

(a) $G(s) = \dfrac{1}{s + 10}$

(b) $G(s) = \dfrac{3s^2 + 10s + 1}{s^2 + 8s + 5}$

(c) $G(s) = \dfrac{s + 14}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$

PM3.2. Determínese una representación en función de transferencia para los siguientes modelos en variables de estado utilizando la función tf:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [1 \quad 0]$

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [0 \quad 1 \quad 0]$

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [1 \quad 1]$.

PM3.3. Considérese el circuito mostrado en la Figura PM3.3. Determínese la función de transferencia $V_0(s)/V_{in}(s)$. Supóngase un amplificador operacional ideal.

(a) Determínese la representación en variables de estado cuando $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 10$ kΩ, $C_1 = 0.5$ mF. y $C_2 = 0.1$ mF.

(b) Utilizando la representación en variables de estado del apartado (a), dibújese la respuesta a un escalón unitario con la función step.

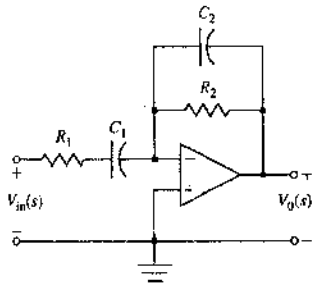


FIGURA PM3.3. Circuito amplificador operacional.

PM3.4. Considérese el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u,$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x}.$$

(a) Utilizando la función tf, determínese la función de transferencia $Y(s)/U(s)$.

(b) Dibújese la respuesta del sistema para la condición inicial $\mathbf{x}(0) = [0 \quad -1 \quad 1]^T$ para $0 \leq t \leq 10$.

(c) Calcúlese la matriz de transición de estados utilizando la función expm y determínese $\mathbf{x}(t)$ en $t = 10$ para las condiciones iniciales dadas en el apartado (b). Compárese el resultado con la respuesta del sistema obtenida en el apartado (b).

PM3.5. Considérense los dos sistemas

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -8 \end{bmatrix}\mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}u,$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x}_1 \qquad (1)$$

y

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5000 & 0.7071 \\ -0.5000 & -0.5000 & 0.7071 \\ -6.3640 & -0.7071 & -8.000 \end{bmatrix}\mathbf{x}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}u,$$

$$y = [0.7071 \quad -0.7071 \quad 0]\mathbf{x}_2. \qquad (2)$$

(a) Utilizando la función tf, determínese la función de transferencia $Y(s)/U(s)$ para el sistema (1).

(b) Repítase el apartado (a) para el sistema (2).

(c) Compárense los resultados de los apartados (a) y (b) y coméntense.

PM3.6. Considérese el sistema de control de lazo cerrado de la Figura PM3.6.

(a) Determínese una representación del controlador en variables de estado utilizando MATLAB.

(b) Repítase el apartado (a) para la planta.

(c) Con el controlador y la planta en variables de estado, utilícense las funciones series y feedback para calcular una representación del sistema en lazo cerrado en variables de estado y dibújese la respuesta impulsional del sistema en lazo cerrado.

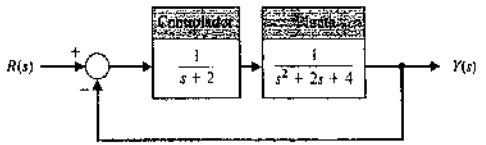


FIGURA PM3.6. Un sistema de control realimentado en lazo cerrado.

PM3.7. Considérese el siguiente sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad 0]\mathbf{x}$$

con

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando la función lsim obténgase y dibújese la respuesta del sistema [para $x_1(t)$ y $x_2(t)$] cuando $u(t) = 0$.

TÉRMINOS Y CONCEPTOS

Aproximación en tiempo discreto. Aproximación utilizada para obtener la respuesta en el tiempo de un sistema basada en la división del tiempo en pequeños incrementos Δt.

Dominio temporal. Dominio matemático que incorpora la respuesta en el tiempo y la descripción de un sistema en términos del tiempo t.

Ecuación de salida. Ecuación algebraica que relaciona el vector de estado, **x**, y las entradas, **u**, a las salidas, **y**, a través de la relación $\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$.

Ecuación diferencial de estado. Ecuación diferencial para el vector de estado: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$.

Estado de un sistema. Conjunto de números tales que el conocimiento de estos números y la función de entrada, con las ecuaciones que describen las dinámicas, proporcionarán el estado futuro del sistema.

Forma canónica. Forma fundamental o básica de la representación del modelo en variables de estado, incluye la forma canónica en variables de fase, la forma canónica de entrada de prealimentación, la forma canónica diagonal y la forma canónica de Jordan.

Forma canónica de entrada de prealimentación. Forma canónica descrita por n lazos de realimentación compuesta de los a_n coeficientes del polinomio denominador de orden n-ésimo de la función de transferencia y de los lazos en adelanto obtenidos por la alimentación directa de la señal de entrada.

Forma canónica de Jordan. Forma canónica diagonal de bloques para sistemas que no tienen polos distintos.

Forma canónica diagonal. Forma canónica desacoplada que muestra los n polos distintos del sistema sobre la diagonal de la matriz **A** de la representación en variables de estado.

Forma canónica en variables de fase. Forma canónica descrita por n lazos de realimentación compuesta de los a_n coeficientes del polinomio denominador de orden n-ésimo de la función de transferencia y de los m lazos en adelanto compuestos de los b_m coeficientes del polinomio numerador de orden m-ésimo de la función de transferencia.

Función exponencial matricial. Función matricial importante, definida como $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + (\mathbf{A}t)^2/2! + \cdots + (\mathbf{A}t)^k/k! + \cdots$, que desempeña un papel en la solución de ecuaciones diferenciales con coeficientes lineales constantes.

Matriz de transición, $\Phi(t)$. Función exponencial matricial que describe la respuesta no forzada del sistema.

Matriz fundamental. *Véase* Matriz de transición.

Método de Euler. Método de integración explícito de primer orden utilizado para obtener soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales.

Realimentación de variable de estado. Señal de control para el proceso es una función directa de todas las variables de estado.

Representación en el espacio de estados. Modelo en el dominio del tiempo compuesto de la ecuación diferencial de estado $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ y la ecuación de salida $\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$.

Sistema variable con el tiempo. Sistema para el cual uno o más parámetros pueden variar con el tiempo.

Variables de estado. Conjunto de variables que definen el sistema.

Variables de fase. Variables de estado asociadas con la forma canónica de variables de fase.

Variables físicas. Variables de estado que representan las variables físicas del sistema.

Vector de estado. Vector que contiene todas (n) las variables de estado, $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

CAPÍTULO 4

Características de los sistemas de control con realimentación

4.1. Sistemas de control en lazo abierto y en lazo cerrado 192
4.2. Sensibilidad de los sistemas de control a variaciones en los parámetros 194
4.3. Control de la respuesta transitoria de los sistemas de control 197
4.4. Señales de perturbación en un sistema de control con realimentación 201
4.5. Error en estado estacionario 206
4.6. El coste de la realimentación 208
4.7. Ejemplo de diseño: Máquinas taladradoras en el canal inglés 209
4.8. Ejemplo de diseño: Vehículo explorador de Marte 212
4.9. Características de los sistemas de control utilizando MATLAB 214
4.10. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 219
4.11. Resumen 224

SINOPSIS

El tema principal de los Capítulos 2 y 3 fue el modelado matemático de sistemas físicos. En este capítulo, se extienden las ideas de modelado para incluir las características del sistema de control, tales como la sensibilidad a incertidumbres en el modelo, errores en estado estacionario, características de la respuesta transitoria para señales de prueba de entrada y rechazo a perturbaciones. Se analizará el papel importante de la señal de error del sistema. Esta señal se utiliza para controlar el proceso al utilizar la noción de realimentación. En general, el objetivo es minimizar la señal de error.

También se tratará la sensibilidad de un sistema para cambios en un parámetro, debido a que es deseable minimizar los efectos de la variación de parámetros no deseados. A continuación se describirá el comportamiento transitorio de un sistema realimentado y se mostrará cómo se puede mejorar fácilmente.

Se desea reducir el efecto de las señales de entrada no deseadas, denominadas **perturbaciones**, sobre la señal de salida. Se mostrará cómo el diseño de un sistema de control puede reducir el impacto de las señales de perturbación. Por supuesto, los beneficios de un sistema de control vienen con un coste añadido. Se demostrará cómo el coste de utilizar realimentación en un sistema de control está asociado con la selección del dispositivo sensor de realimentación. El capítulo concluye con un análisis del comportamiento del sistema del Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco.

4.1. SISTEMAS DE CONTROL EN LAZO ABIERTO Y EN LAZO CERRADO

Ahora que se pueden obtener los modelos matemáticos para los componentes de los sistemas de control, se examinarán las características de estos últimos. En la Sección 1.1 se definió un sistema de control como una interconexión de componentes que forman la configuración de un sistema, que proporcionará una respuesta deseada de éste. Dado que se conoce la respuesta deseada del sistema, se genera una señal proporcional al error entre la respuesta deseada y la real. La utilización de esta señal para controlar el proceso produce una secuencia de operaciones de lazo cerrado que se conoce como sistema de realimentación. Esta secuencia de operaciones de lazo cerrado se muestra en la Figura 4.1. A menudo se necesita introducir la realimentación con el objeto de mejorar los sistemas de control. Es interesante el hecho de que esto también suceda en los sistemas de la naturaleza, como los biológicos y fisiológicos; la realimentación es inherente a estos sistemas. Por ejemplo, el sistema de control humano para el ritmo cardíaco es un sistema de control con realimentación.

Con el objeto de ilustrar las características y ventajas de la realimentación, se considerará un sistema sencillo con realimentación de lazo simple. A pesar de que muchos sistemas de control no tienen lazo simple, es ilustrativo un sistema con esta característica. Puede obtenerse una mejor comprensión de los beneficios de la realimentación a partir de un solo lazo y hacer una extensión a los sistemas de lazos múltiples.

En la Figura 4.2 se muestra un sistema sin realimentación, a menudo denominado sistema directo o sistema en lazo abierto.

Un sistema en lazo abierto (directo) funciona sin realimentación y genera directamente la salida en respuesta a una señal de entrada.

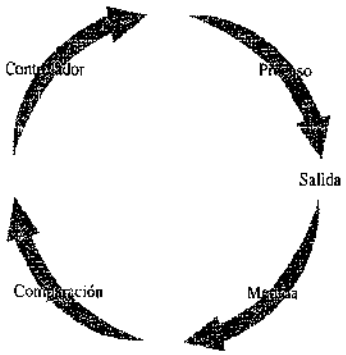


FIGURA 4.1
Un sistema en lazo cerrado.

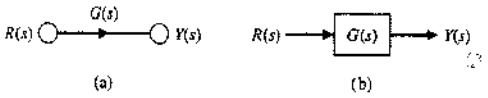


FIGURA 4.2
Un sistema directo. Un sistema sin realimentación.
(a) Grafo de flujo de señal.
(b) Diagrama de bloques.

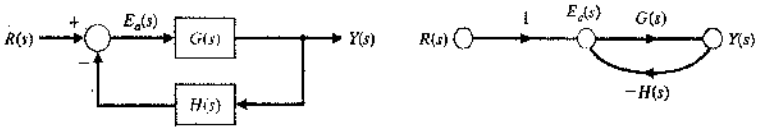


FIGURA 4.3
Un sistema de control en lazo cerrado (un sistema realimentado).

En contraste, en la Figura 4.3 se muestra un sistema de control con realimentación negativa en lazo cerrado.

Un sistema en lazo cerrado utiliza una medida de la señal de salida y una comparación con la salida deseada para generar una señal de error que se aplica al actuador.

Los dos sistemas de control se muestran en diagramas de bloques y en grafo de flujo de señal.

En muchos casos, $H(s)$ es igual a 1 o una constante distinta de 1. La constante explica una conversión de unidad a considerar como de radianes a voltios. En primer lugar, se va a considerar la condición de realimentación unitaria con $H(s) = 1$. Entonces $E_a(s) = E(s)$, y

$$Y(s) = G(s)E(s) = G(s)[R(s) - Y(s)].$$

Resolviendo para $Y(s)$, se tiene

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s). \tag{4.1}$$

La señal de error es

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s).$$

De este modo, para reducir el error, la magnitud de $[1 + G(s)]$ debe ser mayor que 1 en el intervalo de s considerado.

Ahora se considera el caso donde $H(s) \neq 1$. La salida del sistema en lazo cerrado es

$$Y(s) = G(s)E_a(s) = G(s)[R(s) - H(s)Y(s)],$$

y, por lo tanto,

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)} R(s). \tag{4.2}$$

La señal de error es

$$E_a(s) = \frac{1}{1 + GH(s)} R(s). \tag{4.3}$$

Está claro que, con el objeto de reducir el error, la magnitud de $[1 + GH(s)]$ debe ser mucho mayor que la unidad en el intervalo de s considerado. La señal $E_a(s)$ proporciona una medida del error $E(s)$. Esta medida es cada vez más precisa cuando las dinámicas de $H(s)$ llegan a ser despreciables y $H(s) \cong 1$ para el intervalo de s considerado.

4.1. SISTEMAS DE CONTROL EN LAZO ABIERTO Y EN LAZO CERRADO

Ahora que se pueden obtener los modelos matemáticos para los componentes de los sistemas de control, se examinarán las características de estos últimos. En la Sección 1.1 se definió un sistema de control como una interconexión de componentes que forman la configuración de un sistema, que proporcionará una respuesta deseada de éste. Dado que se conoce la respuesta deseada del sistema, se genera una señal proporcional al error entre la respuesta deseada y la real. La utilización de esta señal para controlar el proceso produce una secuencia de operaciones de lazo cerrado que se conoce como sistema de realimentación. Esta secuencia de operaciones de lazo cerrado se muestra en la Figura 4.1. A menudo se necesita introducir la realimentación con el objeto de mejorar los sistemas de control. Es interesante el hecho de que esto también suceda en los sistemas de la naturaleza, como los biológicos y fisiológicos; la realimentación es inherente a estos sistemas. Por ejemplo, el sistema de control humano para el ritmo cardíaco es un sistema de control con realimentación.

Con el objeto de ilustrar las características y ventajas de la realimentación, se considerará un sistema sencillo con realimentación de lazo simple. A pesar de que muchos sistemas de control no tienen lazo simple, es ilustrativo un sistema con esta característica. Puede obtenerse una mejor comprensión de los beneficios de la realimentación a partir de un solo lazo y hacer una extensión a los sistemas de lazos múltiples.

En la Figura 4.2 se muestra un sistema sin realimentación, a menudo denominado sistema directo o sistema en lazo abierto.

Un sistema en lazo abierto (directo) funciona sin realimentación y genera directamente la salida en respuesta a una señal de entrada.

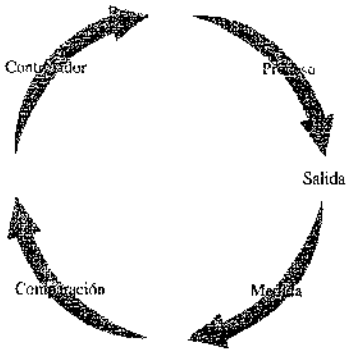


FIGURA 4.1
Un sistema en lazo cerrado

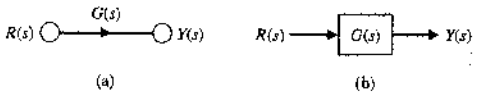


FIGURA 4.2
Un sistema directo. Un sistema sin realimentación. (a) Grafo de flujo de señal. (b) Diagrama de bloques.

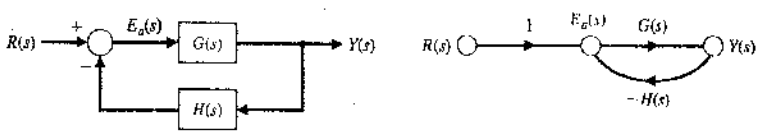


FIGURA 4.3
Un sistema de control en lazo cerrado (un sistema realimentado).

En contraste, en la Figura 4.3 se muestra un sistema de control con realimentación negativa en lazo cerrado.

Un sistema en lazo cerrado utiliza una medida de la señal de salida y una comparación con la salida deseada para generar una señal de error que se aplica al actuador.

Los dos sistemas de control se muestran en diagramas de bloques y en grafo de flujo de señal.

En muchos casos, $H(s)$ es igual a 1 o una constante distinta de 1. La constante explica una conversión de unidad a considerar como de radianes a voltios. En primer lugar, se va a considerar la condición de realimentación unitaria con $H(s) = 1$. Entonces $E_a(s) = E(s)$, y

$$Y(s) = G(s)E(s) = G(s)[R(s) - Y(s)].$$

Resolviendo para $Y(s)$, se tiene

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s). \tag{4.1}$$

La señal de error es

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s).$$

De este modo, para reducir el error, la magnitud de $[1 + G(s)]$ debe ser mayor que 1 en el intervalo de s considerado.

Ahora se considera el caso donde $H(s) \neq 1$. La salida del sistema en lazo cerrado es

$$Y(s) = G(s)E_a(s) = G(s)[R(s) - H(s)Y(s)],$$

y, por lo tanto,

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)} R(s). \tag{4.2}$$

La señal de error es

$$E_a(s) = \frac{1}{1 + GH(s)} R(s), \tag{4.3}$$

Está claro que, con el objeto de reducir el error, la magnitud de $[1 + GH(s)]$ debe ser mucho mayor que la unidad en el intervalo de s considerado. La señal $E_a(s)$ proporciona una medida del error $E(s)$. Esta medida es cada vez más precisa cuando las dinámicas de $H(s)$ llegan a ser despreciables y $H(s) \cong 1$ para el intervalo de s considerado.

4.2. SENSIBILIDAD DE LOS SISTEMAS DE CONTROL A VARIACIONES EN LOS PARÁMETROS

Un proceso, representado por la función de transferencia $G(s)$, sea cual fuere su naturaleza, está sujeto a un medio cambiante, al envejecimiento, a la ignorancia de los valores exactos de los parámetros del proceso y a otros factores naturales que afectan a un proceso de control. En el sistema de lazo abierto, todos estos errores y cambios dan como resultado una salida cambiante e inexacta. Sin embargo, un sistema de lazo cerrado percibe el cambio en la salida debido a los cambios del proceso e intenta corregir la salida. La **sensibilidad** de un sistema de control a las variaciones de los parámetros es de primordial importancia. Una ventaja importante de un sistema de control con realimentación de lazo cerrado es su capacidad para reducir la sensibilidad del sistema [1-4, 18].

En el caso de lazo cerrado, si $GH(s) \gg 1$ para todas las frecuencias complejas de interés, se puede utilizar la Ecuación (4.4) para obtener

$$Y(s) \cong \frac{1}{H(s)} R(s). \tag{4.4}$$

Por lo tanto, la salida sólo está afectada por $H(s)$, que puede ser una constante. Si $H(s) = 1$, se tiene el resultado deseado; es decir, la salida es igual a la entrada. Sin embargo, antes de utilizar este método para todos los sistemas de control, se debe observar que el requisito de que $G(s)H(s) \gg 1$ puede hacer que la respuesta del sistema sea altamente oscilatoria e incluso inestable. Pero el hecho de que conforme se aumenta la magnitud de la función de transferencia del lazo $G(s)H(s)$ se reduce el efecto de $G(s)$ en la salida, es un concepto por demás útil. Por tanto, la primera ventaja de un sistema con realimentación es que el efecto de la variación de los parámetros del proceso, $G(s)$, se reduce.

Con objeto de ilustrar el efecto de las variaciones de los parámetros, se considerará un cambio en el proceso, de forma que el nuevo proceso sea $G(s) + \Delta G(s)$. Entonces, en el caso de lazo abierto, el cambio en la transformada de la salida es

$$\Delta Y(s) = \Delta G(s) R(s). \tag{4.5}$$

En el sistema de lazo cerrado, se tiene

$$Y(s) + \Delta Y(s) = \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + (G(s) + \Delta G(s))H(s)} R(s). \tag{4.6}$$

Entonces el cambio en la salida es

$$\Delta Y(s) = \frac{\Delta G(s)}{(1 + GH(s) + \Delta GH(s))(1 + GH(s))} R(s). \tag{4.7}$$

Cuando $GH(s) \gg \Delta GH(s)$, como es el caso frecuente, se tiene

$$\Delta Y(s) = \frac{\Delta G(s)}{[1 + GH(s)]^2} R(s). \tag{4.8}$$

Examinando la Ecuación (4.8), se observa que el cambio en la salida del sistema de lazo cerrado se reduce por el factor $[1 + GH(s)]$, el cual generalmente es mucho mayor que uno que esté en el intervalo de las frecuencias complejas de interés. El factor $1 + GH(s)$ desempeña un papel muy importante en las características de los sistemas de control con realimentación.

La **sensibilidad del sistema** se define como la relación del cambio porcentual en la función de transferencia del sistema respecto al cambio porcentual en la función de transferencia del proceso. La función de transferencia del sistema es

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}, \tag{4.9}$$

y, por tanto, la sensibilidad se define como

$$S = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)}. \tag{4.10}$$

En el límite, para pequeños cambios incrementales, la Ecuación (4.10) será

$$\boxed{S = \frac{\partial T/T}{\partial G/G} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln G}.} \tag{4.11}$$

La sensibilidad del sistema es la relación del cambio en la función de transferencia del sistema respecto al cambio en la función de transferencia del proceso, o el parámetro, para un cambio incremental pequeño.

Claramente, por la Ecuación (4.5), la sensibilidad del sistema de lazo abierto es igual a uno. La sensibilidad del lazo cerrado se obtiene fácilmente utilizando la Ecuación (4.11). La función de transferencia del cerrado es

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)}.$$

Por tanto, la sensibilidad del sistema con realimentación es

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} = \frac{1}{(1 + GH)^2} \cdot \frac{G}{G/(1 + GH)}$$

o

$$\boxed{S_G^T = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}.} \tag{4.12}$$

Nuevamente se observa que la sensibilidad del sistema puede reducirse por debajo de la del sistema de lazo abierto aumentando $GH(s)$ en el intervalo de frecuencia de interés.

La sensibilidad de sistema con realimentación a los cambios en el elemento de realimentación $H(s)$ es

$$S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{H}{T} = \left(\frac{G}{1 + GH}\right)^2 \cdot \frac{-H}{G/(1 + GH)} = \frac{-GH}{1 + GH}. \tag{4.13}$$

Cuando GH es grande, la sensibilidad tiende a la unidad y los cambios en $H(s)$ afectan directamente a la respuesta de salida. Por tanto, es importante usar componentes de realimentación que no varíen con los cambios del ambiente o que puedan mantenerse constantes.

Con frecuencia, se busca determinar S_α^T, donde α es un parámetro dentro de la función de transferencia de un bloque G. Utilizando la regla de la cadena, se obtiene que

$$T_\alpha^T = S_G^T S_\alpha^G. \tag{4.14}$$

Con mucha frecuencia, la función de transferencia del sistema $T(s)$ es una fracción de la forma [1]

$$T(s, \alpha) = \frac{N(s, \alpha)}{D(s, \alpha)}, \tag{4.15}$$

donde α es un parámetro que puede estar sujeto a variaciones debidas al entorno. Por tanto, se puede obtener la sensibilidad a α escribiendo ahora la Ecuación (4.11) como

$$S_\alpha^T = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \alpha} = \left.\frac{\partial \ln N}{\partial \ln \alpha}\right|_{\alpha_0} - \left.\frac{\partial \ln D}{\partial \ln \alpha}\right|_{\alpha_0} = S_\alpha^N - S_\alpha^D, \tag{4.16}$$

donde α_0 es el valor nominal del parámetro.

La capacidad para reducir el efecto de la variación en los parámetros de un sistema de control agregando un lazo de realimentación es una ventaja importante de los sistemas de control con realimentación. Para obtener sistemas de lazo cerrado de alta precisión, los componentes del lazo abierto $G(s)$ deben seleccionarse cuidadosamente con el objeto de cumplir las especificaciones exactas. Sin embargo, un sistema de lazo cerrado conduce a que $G(s)$ sea especificada menos exactamente, ya que la sensibilidad a los cambios o errores en $G(s)$ se reduce por la ganancia del lazo $1 + GH(s)$. Este beneficio de los sistemas de lazo cerrado es una gran ventaja para los amplificadores electrónicos de la industria de las comunicaciones. Un ejemplo seacillo ilustrará el valor de la realimentación para reducir la sensibilidad.

EJEMPLO 4.1. Amplificador realimentado

Un amplificador utilizado en muchas aplicaciones tiene una ganancia $-K_a$, como se muestra en la Figura 4.4(a). El voltaje de salida es

$$v_0 = -K_a v_{in}. \tag{4.17}$$

A menudo se añade realimentación utilizando un potenciómetro R_p, como se muestra en la Figura 4.4(b). La función de transferencia del amplificador sin realimentación es

$$T = -K_a, \tag{4.18}$$

y la sensibilidad a cambios en la ganancia del amplificador es

$$S_{K_a}^T = 1. \tag{4.19}$$

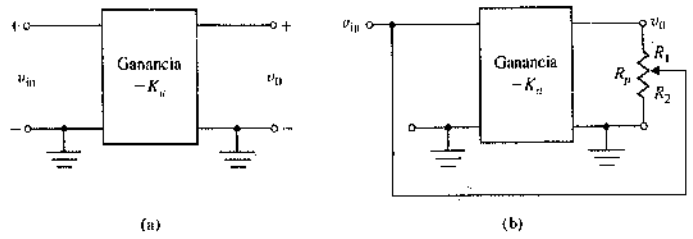


FIGURA 4.4
(a) Amplificador en lazo abierto.
(b) Amplificador con realimentación.

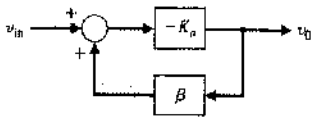


FIGURA 4.5
Modelo de diagrama de bloques del amplificador realimentado suponiendo que $R_p \gg R_0$ del amplificador.

La Figura 4.5 muestra el modelo de diagrama de bloques del amplificador con realimentación, donde

$$\beta = \frac{R_2}{R_1} \tag{4.20}$$

y

$$R_p = R_1 + R_2. \tag{4.21}$$

La función de transferencia de lazo cerrado del amplificador realimentado es

$$T = \frac{K_a}{1 + K_a\beta}. \tag{4.22}$$

La sensibilidad del amplificador realimentado en lazo cerrado es

$$S_{K_a}^T = \frac{1}{1 + K_a\beta}. \tag{4.23}$$

Si K_a es grande, la sensibilidad es baja. Por ejemplo, si

$$K_a = 10^4$$

y

$$\beta = 0.1, \tag{4.24}$$

se tiene

$$S_{K_a}^T = \frac{1}{1 + 10^3}, \tag{4.25}$$

es decir, la magnitud es una milésima de la magnitud del amplificador del lazo abierto.

En capítulos posteriores se volverá al concepto de sensibilidad. Estos capítulos enfatizarán su importancia en el diseño y análisis de sistemas de control. ■

4.3. CONTROL DE LA RESPUESTA TRANSITORIA DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

Una de las características más importantes de los sistemas de control es su respuesta transitoria. La **respuesta transitoria** es la respuesta de un sistema como una función del tiempo. Como el propósito de los sistemas de control es proporcionar una respuesta deseada, frecuentemente su respuesta transitoria debe ajustarse hasta que sea satisfactoria. Si un sistema de control de lazo abierto no proporciona una respuesta satisfactoria, entonces el proceso, $G(s)$, debe reemplazarse por uno adecuado. En contraste, un sistema de lazo cerrado frecuentemente puede ajustarse para obtener la respuesta deseada ajus-

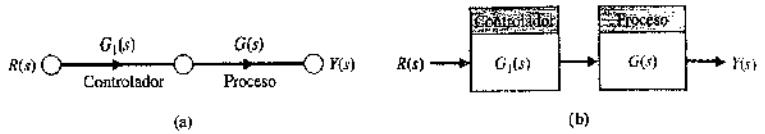


FIGURA 4.6
Sistema de controlador en cascada (sin realimentación). (a) Grafo de flujo de señal. (b) Diagrama de bloques.

tando los parámetros del lazo de realimentación. Se observará que, generalmente, es posible alterar la respuesta de un sistema de lazo cerrado insertando un adecuado controlador en cascada, $G_1(s)$, antes del proceso, $G(s)$, como se muestra en la Figura 4.6. Entonces es necesario diseñar la función de transferencia en cascada $G_1(s)G(s)$ de forma que la función de transferencia resultante proporcione la respuesta transitoria deseada.

Con el objeto de hacer este concepto más fácilmente comprensible, se considera un sistema específico de control que pueda ser operado en forma de lazo abierto o cerrado. Un sistema de control de velocidad, que se muestra en la Figura 4.7, se usa frecuentemente en procesos industriales para mover materiales y productos. En las plantas siderúrgicas se usan varios sistemas importantes de control de velocidad para la laminación del acero y para trasladar el producto por la planta [19]. La función de transferencia del sistema de lazo abierto (sin realimentación) se obtuvo en la Ecuación (2.70). Para $\omega(s)/V_a(s)$ se tiene

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = G(s) = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)}, \tag{4.26}$$

donde

$$K_1 = \frac{K_m}{(R_a b + K_b K_m)} \quad \text{y} \quad \tau_1 = \frac{R_a J}{(R_a b + K_b K_m)}.$$

En el caso de una siderúrgica, la inercia de las laminadoras es muy grande y se requiere un gran motor controlado por el inducido. Si las laminadoras de acero están sujetas a una orden de escalón para un cambio de velocidad de

$$V_a(s) = \frac{k_2 E}{s}, \tag{4.27}$$

la respuesta de salida es

$$\omega(s) = G(s)V_a(s). \tag{4.28}$$

El cambio de la velocidad transitoria es entonces

$$\omega(t) = K_1(k_2 E)(1 - e^{-t/\tau_1}). \tag{4.29}$$

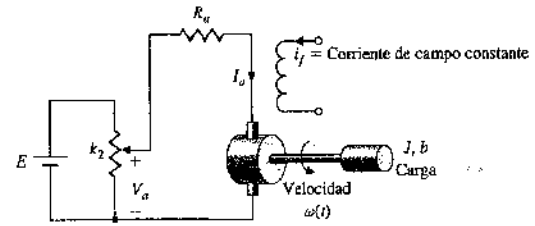


FIGURA 4.7
Sistema de control de velocidad de lazo abierto (sin realimentación).

Si esta respuesta transitoria es demasiado lenta, no hay más alternativa que elegir otro motor con una constante de tiempo τ_1 diferente, si es posible. Sin embargo, como τ_1 está determinada por la inercia de la carga, J, no se puede esperar mucha alteración en la respuesta transitoria.

Como se muestra en la Figura 4.8(a), se puede obtener fácilmente un sistema de control de velocidad de lazo cerrado utilizando un tacómetro para generar un voltaje proporcional a la velocidad. Este voltaje se sustrae del voltaje del potenciómetro y se amplifica como se muestra en la Figura 4.8(a). En la Figura 4.8(b) se muestra un práctico lazo amplificador de transistores para obtener esta realimentación en aplicaciones de baja potencia [1, 5, 7]. La función de transferencia de lazo cerrado es

$$\frac{\omega(s)}{R(s)} = \frac{K_a G(s)}{1 + K_a K_t G(s)} = \frac{K_a K_1}{\tau_1 s + 1 + K_a K_t K_1} = \frac{K_a K_1/\tau_1}{s + [(1 + K_a K_t K_1)/\tau_1]} \tag{4.30}$$

La ganancia del amplificador K_a puede ajustarse para cumplir las especificaciones requeridas de la respuesta transitoria. Si es necesario, también puede variarse la constante K_t de la ganancia del tacómetro.

La respuesta transitoria a un cambio escalón en la orden de entrada es entonces

$$\omega(t) = \frac{K_a K_1}{(1 + K_a K_t K_1)}(k_2 E)(1 - e^{-pt}), \tag{4.31}$$

donde $p = (1 + K_a K_t K_1)/\tau_1$. Como se supone que la inercia de la carga es muy grande, la respuesta se altera aumentando K_a. De este modo, se tiene la respuesta aproximada

$$\omega(t) \simeq \frac{1}{K_t}(k_2 E)\left[1 - \exp\left(\frac{-(K_a K_t K_1)t}{\tau_1}\right)\right]. \tag{4.32}$$

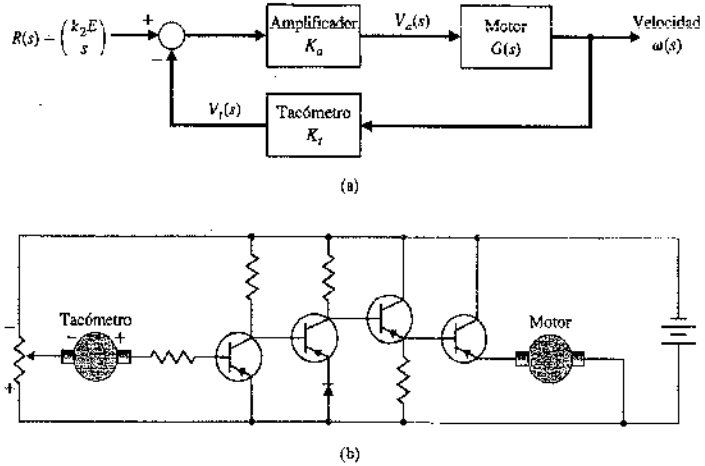


FIGURA 4.8
(a) Sistema de control de velocidad de lazo cerrado. (b) Sistema de control de velocidad en lazo cerrado transistorizado.

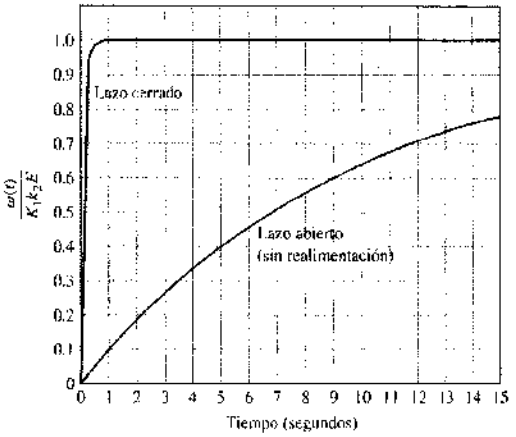


FIGURA 4.9
Respuesta de un sistema de control de velocidad en lazo abierto y en lazo cerrado cuando $r = 10$ y $K_1K_aK_t = 100$. El tiempo alcanza el 98% del valor final para el sistema de lazo abierto y de lazo cerrado siendo 40 y 0.4 segundos, respectivamente.

Para una aplicación típica, el polo de lazo abierto podría ser $1/\tau_1 = 0.10$, mientras que el polo de lazo cerrado puede ser por lo menos $(K_aK_tK_1)/\tau_1 = 10$, un factor de 100 en el aumento de la velocidad de respuesta. Se notará que con el objeto de obtener la ganancia $K_aK_tK_1$, la ganancia del amplificador K_a debe ser razonablemente grande, y la señal de voltaje del inducido al motor y su señal de par de torsión asociada deberá ser mayor para la operación de lazo cerrado que para la de lazo abierto. Por tanto, con el objeto de evitar la saturación del motor, se necesitará un motor más grande. La Figura 4.9 muestra las respuestas de los sistemas de lazo abierto y de lazo cerrado.

Así mismo, mientras se está considerando este sistema de control de velocidad, vale la pena determinar la sensibilidad de los sistemas de lazo abierto y de lazo cerrado. Como anteriormente, la sensibilidad del sistema de lazo abierto es unitaria para una variación en la constante del motor o para la constante K_2 del potenciómetro. La sensibilidad del sistema de lazo cerrado a una variación en K_m es

$$S_{K_m}^T = S_G^T S_{K_m}^G = \frac{1}{1 + GH(s)}$$

$$= \frac{1}{1 + K_aK_tG(s)} = \frac{[s + (1/\tau_1)]}{[s + (K_aK_tK_1 + 1)/\tau_1]}. \tag{4.33}$$

Usando los valores típicos dados en el párrafo anterior, se tiene

$$S_{K_m}^T = \frac{(s + 0.10)}{(s + 10)}. \tag{4.34}$$

Se obtiene que la sensibilidad es una función de s y que debe calcularse para diferentes valores de frecuencia. Este tipo de análisis de frecuencia es directo, pero será tratado en un capítulo posterior. Sin embargo, se ve claramente que en una frecuencia específica, por ejemplo $s = j\omega = j1$, la magnitud de la sensibilidad es aproximadamente $|S_{K_m}^T| \cong 0.1$.

4.4. SEÑALES DE PERTURBACIÓN EN UN SISTEMA DE CONTROL CON REALIMENTACIÓN

El tercer efecto más importante de la realimentación en un sistema de control es el control y eliminación parcial de los efectos de las señales de perturbación. Una **señal de perturbación** es una señal de entrada no deseada que afecta a la señal de salida del sistema. Muchos sistemas de control están sujetos a señales extrañas de perturbación que hacen que el sistema proporcione una salida inexacta. Los amplificadores electrónicos tienen ruidos inherentes generados dentro de los circuitos integrados o los transistores; las antenas de radar están expuestas a ráfagas de viento y muchos sistemas generan señales de distorsión no deseadas debido a elementos no lineales. Los sistemas con realimentación tienen el aspecto benéficioso de que el efecto de distorsión, ruido y perturbaciones no deseadas puede reducirse efectivamente.

Como ejemplo específico de un sistema con una perturbación no deseada, se considera de nuevo el sistema de control de velocidad para una laminadora de acero. Las laminadoras por las que pasa el acero están sujetas a grandes cambios de carga o perturbaciones. Cuando una barra de acero se acerca a la laminadora (*véase* la Figura 4.10), ésta se descarga. Sin embargo, cuando la barra se introduce en la laminadora, la carga en ésta aumenta inmediatamente a un valor muy grande. Este efecto de carga puede aproximarse por un cambio escalón en el par de torsión de perturbación como se muestra en la Figura 4.11. Alternativamente, como se muestra en la Figura 4.12, se podrían examinar las curvas del par de torsión-velocidad para un motor típico.

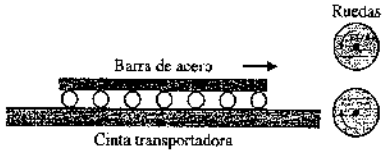


FIGURA 4.10
Laminadora de acero.

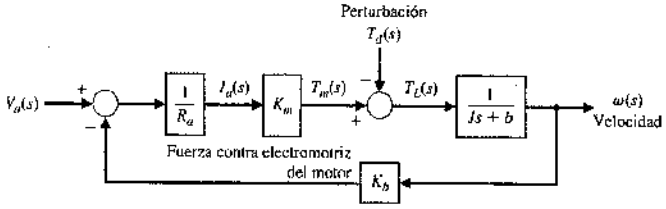


FIGURA 4.11
Sistema de control de velocidad de lazo abierto (sin realimentación externa).

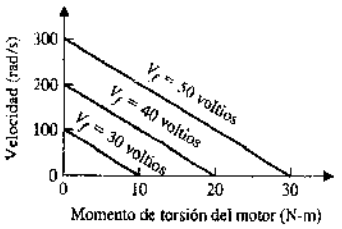


FIGURA 4.12
Curvas del momento de torsión-velocidad del motor.

El modelo de la función de transferencia para un motor de cc controlado por inducido con una perturbación del par de torsión de la carga se determinó en el Ejemplo 2.3 y se muestra en la Figura 4.11, donde se supuso que L_a era despreciable. El error para el sistema mostrado en la Figura 4.11 es

$$E(s) = R(s) - \omega(s).$$

y $R(s) = \omega_d(s)$, la velocidad deseada. Para facilitar el cálculo, se supone que $R(s) = 0$ y se examina $E(s) = -\omega(s)$.

El cambio en la velocidad debido a la perturbación de la carga es

$$E(s) = -\omega(s) = \left(\frac{1}{Js + b + (K_m K_b/R_a)}\right) T_d(s). \tag{4.35}$$

El error en el estado estacionario de la velocidad debido al par de torsión de la carga $T_d(s) = D/s$ se encuentra usando el teorema del valor final. Por tanto, para el sistema de lazo abierto, se tiene

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{Js + b + (K_m K_b/R_a)}\right)\left(\frac{D}{s}\right)$$

$$= \frac{D}{b + (K_m K_b/R_a)} = -\omega_0(\infty). \tag{4.36}$$

En la Figura 4.13 se muestra en forma de diagrama de bloques el sistema de control de velocidad de lazo cerrado. Este sistema se muestra en forma de grafo de flujo de señal y en forma de diagrama de bloques en la Figura 4.14, donde $G_1(s) = K_a K_m/R_a$

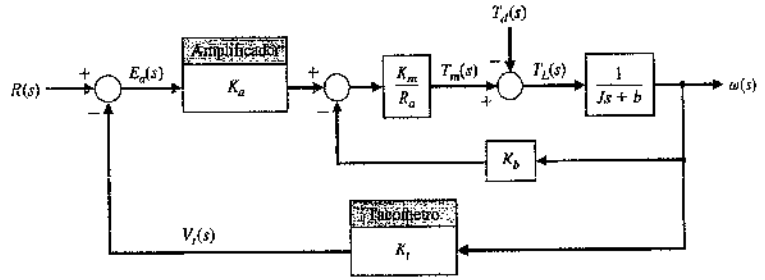


FIGURA 4.13
Sistema de control de velocidad de lazo cerrado mediante un tacómetro.

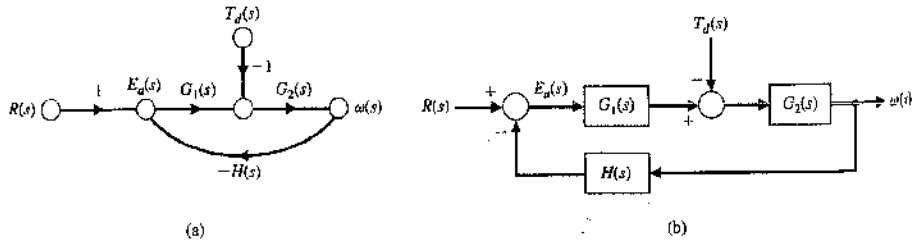


FIGURA 4.14. Sistema de lazo cerrado. (a) Modelo de grafo de flujo de señal. (b) Modelo de diagrama de bloques.

$G_2(s) = 1/(Js + b)$, y $H(s) = K_t + (K_b/K_a)$. El error, $E(s) = -\omega(s)$, del sistema de lazo cerrado de la Figura 4.14 es:

$$E(s) = -\omega(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} T_d(s). \tag{4.37}$$

Entonces, si $G_1G_2H(s)$ es mucho mayor que uno en el intervalo de s, se obtiene el resultado aproximado

$$E(s) \simeq \frac{1}{G_1(s)H(s)} T_d(s). \tag{4.38}$$

Por tanto, si $G_1(s)H(s)$ se hace suficientemente grande, el efecto de la perturbación puede disminuirse por la realimentación de lazo cerrado. Obsérvese que

$$G_1(s)H(s) = \frac{K_a K_m}{R_a}\left(K_t + \frac{K_b}{K_a}\right) \simeq \frac{K_a K_m K_t}{R_a},$$

debido a que $K_a \gg K_b$. De este modo, se intenta obtener una ganancia del amplificador mayor, K_a, y mantener $R_a < 2\ \Omega$. El error para el sistema que se muestra en la Figura 4.14 es

$$E(s) = R(s) - \omega(s),$$

y $R(s) = \omega_d(s)$, la velocidad deseada. Para facilitar el cálculo, sea $R(s) = 0$ y analícese $\omega(s)$.

Para determinar la salida en el sistema de control de velocidad de la Figura 4.13, se debe considerar la perturbación de carga cuando la entrada $R(s) = 0$. Esto se escribe como

$$\omega(s) = \frac{-[1/(Js + b)]}{1 + (K_t K_a K_m/R_a)[1/(Js + b)] + (K_m K_b/R_a)[1/(Js + b)]} T_d(s)$$

$$= \frac{-1}{Js + b + (K_m/R_a)(K_t K_a + K_b)} T_d(s). \tag{4.39}$$

La salida en el estado estacionario se obtiene utilizando el teorema del valor final, y se tiene

$$\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \lim_{s\to 0} (s\omega(s)) = \frac{-1}{b + (K_m/R_a)(K_t K_a + K_b)} D; \tag{4.40}$$

cuando la ganancia del amplificador es suficientemente alta, se tiene

$$\omega(\infty) \simeq \frac{-R_a}{K_a K_m K_t} D = \omega_c(\infty). \tag{4.41}$$

La relación entre la salida de velocidad del lazo cerrado y la del lazo abierto en el estado estacionario debida a una perturbación no deseada es

$$\frac{\omega_c(\infty)}{\omega_0(\infty)} = \frac{R_a b + K_m K_b}{K_a K_m K_t} \tag{4.42}$$

y generalmente es menor que 0.02.

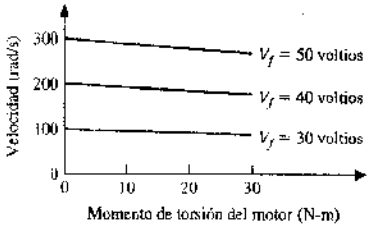


FIGURA 4.15
Curvas del par de torsión-velocidad para el sistema de lazo cerrado.

Esta ventaja de un sistema de control de velocidad por realimentación también puede ilustrarse considerando las curvas del par de torsión-velocidad para el sistema de lazo cerrado; estas curvas se muestran en la Figura 4.15. La mejora proporcionada por el sistema de realimentación se hace evidente por las curvas casi horizontales, las cuales indican que la velocidad es casi independiente del par de torsión de la carga.

Una razón fundamental para la introducción de la realimentación es la capacidad para aligerar los efectos de las perturbaciones y señales de ruido que ocurren dentro del lazo de realimentación. Una señal de ruido habitual en muchos sistemas es el ruido generado por los sensores de medida. Este ruido, $N(s)$, puede representarse como se muestra en la Figura 4.16. El efecto del ruido en la salida es

$$Y(s) = \frac{-G_1G_2H_2(s)}{1 + G_1G_2H_1H_2(s)} N(s), \tag{4.43}$$

que es aproximadamente

$$Y(s) \simeq -\frac{1}{H_1(s)} N(s). \tag{4.44}$$

Evidentemente, el diseñador debe obtener un valor máximo de $H_1(s)$, lo cual equivale a maximizar la relación señal/ruido del sensor de medida. Esta necesidad equivale a requerir que los elementos de realimentación $H(s)$ estén bien diseñados y operen con el mínimo de ruido, desviaciones y variaciones en los parámetros. Esto equivale al requisito determinado por la función de sensibilidad, Ecuación (4.13), la cual mostró que $S_H^T \simeq 1$. Por tanto, se debe tener en cuenta la necesidad de asegurar la calidad e invariabilidad de los sensores y elementos de realimentación.

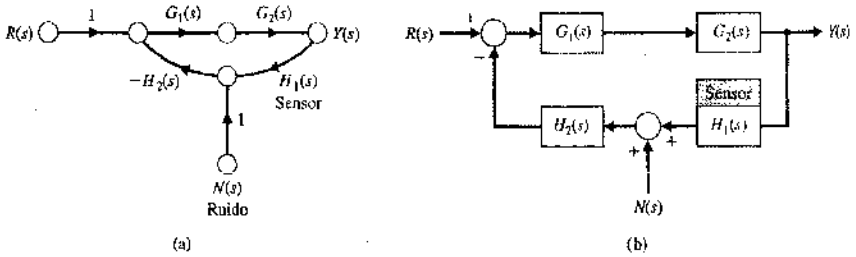


FIGURA 4.16. Sistema de control de lazo cerrado con ruido de medida. (a) Grafo de flujo de señal. (b) Modelo de diagrama de bloques.

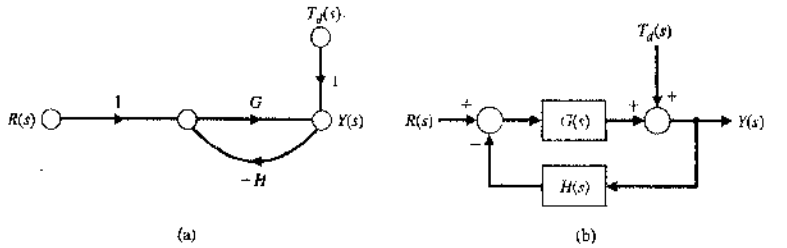


FIGURA 4.17. Sistema de control de lazo cerrado con ruido de salida. (a) Grafo de flujo de señal. (b) Modelo de diagrama de bloques.

Esto generalmente es posible debido a que los elementos de realimentación operan a bajos niveles de potencia y pueden diseñarse bien con costos razonables.

La equivalencia entre la sensibilidad, S_G^T, y la respuesta del sistema de lazo cerrado a una entrada de perturbación puede ilustrarse considerando la Figura 4.14. La sensibilidad del sistema a G_2 es

$$S_{G_2}^T = \frac{1}{1 + G_1G_2H(s)} \simeq \frac{1}{G_1G_2H(s)}. \tag{4.45}$$

El efecto de la perturbación en la salida (con $R(s) = 0$) es

$$\frac{Y(s)}{T_d(s)} = \frac{-G_2(s)}{1 + G_1G_2H(s)} \simeq \frac{-1}{G_1H(s)} \tag{4.46}$$

En ambos casos, se observa que los efectos no deseados pueden reducirse aumentando $G_1(s) = K_a$, la ganancia del amplificador. La utilización de la realimentación en sistemas de control es principalmente para reducir la sensibilidad de las variaciones en los parámetros del sistema y los efectos de las entradas de perturbación. Es digno de mención que el esfuerzo para reducir los efectos de las variaciones en los parámetros, o perturbaciones, es equivalente, y se da la afortunada circunstancia de que se reducen simultáneamente. Como ilustración final de este hecho, la Figura 4.17 muestra que el efecto del ruido o perturbación en la salida es

$$\frac{Y(s)}{T_d(s)} = \frac{1}{1 + GH(s)}, \tag{4.47}$$

que es idénticamente igual a la sensibilidad S_G^T.

Con bastante frecuencia, el ruido está presente en la entrada de los sistemas de control. Por ejemplo, la señal en la entrada del sistema podría ser $r(t) + n(t)$, donde $r(t)$ es la respuesta deseada del sistema y $n(t)$ la señal del ruido. El sistema de control con realimentación, en este caso, simplemente procesará el ruido y la señal de entrada $r(t)$, y no podrá mejorar la relación señal/ruido, que está presente en la entrada del sistema. Sin embargo, si los espectros de frecuencia de las señales de ruido y entrada tienen carácter diferente, la relación señal/ruido de salida puede ser maximizada, frecuentemente por el simple diseño de una función de transferencia de un sistema de lazo cerrado que tenga una respuesta de frecuencia de paso bajo.

4.5. ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO

Un sistema de control con realimentación es valioso ya que permite al ingeniero ajustar la respuesta transitoria. Además, como se ha visto, la sensibilidad del sistema y el efecto de las perturbaciones se pueden reducir significativamente. Sin embargo, como requisito adicional, se debe examinar y comparar el error final en el estado estacionario para un sistema de lazo abierto y de lazo cerrado. El **error en estado estacionario** es el error después de que la respuesta transitoria haya decaído, permaneciendo únicamente la respuesta continua.

El error del sistema de lazo abierto mostrado en la Figura 4.18 es

$$E_0(s) = R(s) - Y(s) = (1 - G(s))R(s). \tag{4.48}$$

La Figura 4.19 muestra el error del sistema de lazo cerrado, $E_c(s)$, cuando $H(s) = 1$. Éste viene dado por la (Ecuación 4.3)[1], que es

$$\boxed{E_c(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s).} \tag{4.49}$$

Para calcular el error en el estado estacionario, se utiliza el teorema del valor final, que es

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s). \tag{4.50}$$

Por tanto, usando una entrada de escalón unitario como entrada comparable, para el sistema de lazo abierto se obtiene

$$e_0(\infty) = \lim_{s \to 0} s(1 - G(s))\left(\frac{1}{s}\right) = \lim_{s \to 0} (1 - G(s)) = 1 - G(0). \tag{4.51}$$

Para el sistema de lazo cerrado, cuando $H(s) = 1$, se tiene

$$e_c(\infty) = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{1}{1 + G(s)}\right)\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{1 + G(0)}. \tag{4.52}$$

El valor de $G(s)$ cuando $s = 0$ se suele denominar ganancia de cc y normalmente es mayor que la unidad. Por tanto, el sistema de lazo abierto generalmente tendrá un error en estado estacionario de magnitud significativa. En contraste, el sistema de lazo cerrado, con una ganancia de lazo de cc razonablemente grande $G(0)$, tendrá un error pequeño.

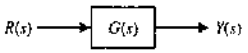


FIGURA 4.18
Sistema de control de lazo abierto (sin realimentación).

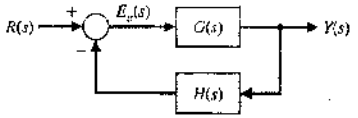


FIGURA 4.19
Sistema de control realimentado de lazo cerrado.

[1] La realimentación no unitaria ($H(s) \neq 1$) se analiza en la Sección 5.8.

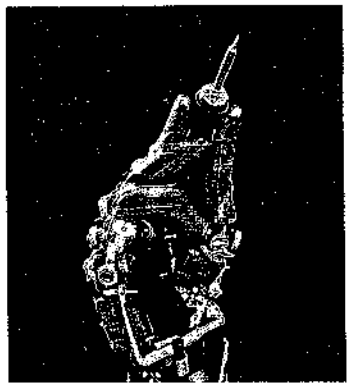


FIGURA 4.20. El Centro Aeroespacial Alemán DLR está desarrollando una mano robótica avanzada. El objetivo final —una operación autónoma completa— aún no ha sido alcanzado. Actualmente, el control se realiza con un sistema de telemanipulación que consiste en un robot de peso ligero con una mano articulada de cuatro dedos montada sobre una plataforma móvil. El operador de la mano recibe realimentación de vídeo estéreo y de fuerza. Esta información se utiliza conjuntamente con un guante de datos equipado con realimentación de fuerza y un dispositivo de entrada para controlar el robot. (Cortesía: DLR Institute of Robotics and Mechatronics.)

Una vez examinada la Ecuación (4.51), se observa que el sistema de control de lazo abierto puede tener un error en el estado estacionario igual a cero simplemente ajustando y calibrando la ganancia de cc, $G(0)$, del sistema, de modo que $G(0) = 1$. Por tanto, uno puede preguntarse lógicamente: ¿Cuál es, en este caso, la ventaja del sistema de lazo cerrado? Para responder a esta pregunta, se vuelve al concepto de sensibilidad del sistema frente a los cambios en los parámetros. En el sistema de lazo abierto se puede calibrar el sistema de forma que $G(0) = 1$, pero durante la operación del sistema es inevitable que los parámetros de $G(s)$ cambien debido a cambios ambientales, y la ganancia de cc del sistema ya no será igual a la unidad. Sin embargo, como se trata de un sistema de lazo abierto, el error en el estado estacionario seguirá siendo diferente de cero hasta que el sistema se mantenga y se calibre de nuevo. Por otro lado, el sistema con realimentación de lazo cerrado verifica continuamente el mencionado error y proporciona una señal con el objeto de reducirlo. Por esto, se observa que la sensibilidad del sistema a los cambios de parámetros, a los efectos ambientales y a los errores de calibración, es lo que estimula la introducción de la realimentación negativa. En la Figura 4.20 se muestra un ejemplo de un ingenioso sistema de control con realimentación.

La ventaja del sistema de lazo cerrado es que reduce el error en estado estacionario resultante de los cambios de parámetros y los errores de calibración. Este hecho puede ilustrarse mediante un ejemplo. Considérese un sistema con una función de transferencia de proceso

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}, \tag{4.53}$$

la cual puede representar un proceso de control térmico, un regulador de voltaje o un proceso para controlar el nivel de agua. Para un valor específico de la variable de entrada deseada, que puede representarse con la función normalizada de entrada de escalón unitario, se tiene $R(s) = 1/s$. Entonces, el error en estado estacionario del sistema de lazo abierto es, como en la Ecuación (4.51),

$$e_0(\infty) = 1 - G(0) = 1 - K \tag{4.54}$$

cuando se utiliza un conjunto consistente de unidades dimensionales para $R(s)$ y K. El error para el sistema de lazo cerrado de la Figura 4.19 es

$$E_c(s) = R(s) - T(s)R(s).$$

donde $T(s) = G(s)/(1 + GH(s))$. El error en estado estacionario es

$$e_c(\infty) = \lim_{s \to 0} s\{1 - T(s)\}\frac{1}{s} = 1 - T(0).$$

Cuando $H(s) = 1/(\tau_1 s + 1)$, se obtiene $H(0) = 1$ y $G(0) = K$. Entonces se tiene

$$e_c(\infty) = 1 - \frac{K}{1 + K} = \frac{1}{1 + K}. \tag{4.55}$$

Para el sistema de lazo abierto, se calibraría el sistema de forma que $K = 1$ y el error en estado estacionario sea cero. Para el sistema de lazo cerrado se desearía tener una ganancia grande en K. Si $K = 100$, el error en estado estacionario del sistema de lazo cerrado es $e_c(\infty) = {}^1/_{101}$.

Si la calibración del ajuste de ganancia se desplaza o cambia en alguna forma por $\Delta K/K = 0.1$ (un cambio del 10%), el error en estado estacionario de lazo abierto es $\Delta e_0(\infty) = 0.1$. Por tanto, el cambio porcentual desde el ajuste calibrado es

$$\frac{\Delta e_0(\infty)}{|r(t)|} = \frac{0.10}{1}, \tag{4.56}$$

o 10%. Por otro lado, el error del sistema de lazo cerrado, con $\Delta K/K = 0.1$, es $e_c(\infty) = {}^1/_{91}$ si la ganancia disminuye. Entonces, el cambio es

$$\Delta e_c(\infty) = \frac{1}{101} - \frac{1}{91}, \tag{4.57}$$

y el cambio relativo es

$$\frac{\Delta e_c(\infty)}{|r(t)|} = 0.0011, \tag{4.58}$$

o 0.11%. Esto es realmente una mejoría significativa, debido a que el cambio relativo del lazo cerrado es dos órdenes de magnitud menor que el del sistema en lazo abierto.

4.6. EL COSTE DE LA REALIMENTACIÓN

Añadir realimentación a un sistema de control produce las ventajas planteadas en las secciones anteriores. Sin embargo, es natural que estas ventajas impliquen un coste de aplicación. El coste de la realimentación se manifiesta primero en el aumento de los **componentes** y la **complejidad** del sistema. Con el objeto de añadir la realimentación, es necesario considerar varios componentes de realimentación, de los cuales el de medición (sensor) es el componente clave. El sensor es frecuentemente el componente más caro en un sistema de control. Además, el sensor introduce ruido e imprecisiones en el sistema.

El segundo coste de realimentación es la **pérdida de ganancia**. Por ejemplo, en un sistema de un solo lazo, la ganancia del lazo abierto es $G(s)$ y se reduce a $G(s)/(1 + G(s))$ en un sistema de realimentación negativa unitaria. La reducción de ganancia del lazo cerrado es $1/(1 + G(s))$, que es exactamente el factor que reduce la sensibilidad el sistema frente a variaciones y perturbaciones de los parámetros. Generalmente, se tiene ganancia del lazo abierto de reserva y se está más que dispuesto a invertirla para incrementar el control de la respuesta del sistema.

Sin embargo, se debe observar que la ganancia de la transmitancia de entrada-salida es la que se reduce. El sistema de control tiene una ganancia sustancial de potencia de un amplificador y actuador de potencia, la cual se utiliza completamente en el sistema de lazo cerrado.

Por último, un coste de realimentación es la inclusión de la posibilidad de **inestabilidad**. Mientras que el sistema de lazo abierto es estable, el de lazo cerrado puede no serlo siempre. El problema de la estabilidad de un sistema de lazo cerrado se aplazará hasta el Capítulo 6, donde puede tratarse con mayor amplitud.

Añadir realimentación a sistemas dinámicos produce varios problemas adicionales para el diseñador. Sin embargo, en la mayoría de los casos, las ventajas superan a las desventajas, por lo cual se utiliza un sistema con realimentación. Por tanto, es necesario considerar la complejidad adicional y el problema de estabilidad cuando se diseña un sistema de control.

Se ha aclarado que es deseable que la salida del sistema $Y(s)$ sea igual a la entrada $R(s)$. Sin embargo, después de reflexionar, uno se puede preguntar: ¿Por qué no se hace simplemente que la función de transferencia $G(s) = Y(s)/R(s)$ sea igual a 1? (*Véase* la Figura 4.2.) La respuesta a esta pregunta se hace evidente recordando que el proceso (o la planta) $G(s)$ se necesitó con el objeto de proporcionar la salida deseada; es decir, la función de transferencia $G(s)$ representa un proceso real y tiene una dinámica que no puede despreciarse. Hacer $G(s)$ igual a 1 implica que la salida está directamente conectada con la entrada. Sin embargo, se debe recordar que se desea una salida específica, como temperatura, rotación de un eje o velocidad de una máquina, en tanto que la entrada podría ser un ajuste de potenciómetro o un voltaje. El proceso $G(s)$ es necesario con el objeto de proporcionar el proceso físico entre $R(s)$ e $Y(s)$. Por tanto, una función de transferencia $G(s) = 1$ es irrealizable y uno debe conformarse con una función de transferencia práctica.

4.7. EJEMPLO DE DISEÑO: MÁQUINAS TALADRADORAS EN EL CANAL INGLÉS

La construcción de un túnel debajo del Canal Inglés desde Francia a Gran Bretaña comenzó en diciembre de 1987. La primera unión haciendo túneles desde cada país se logró en noviembre de 1990. El túnel tiene 23.5 millas y está perforado a 200 pies por debajo del nivel del mar. El túnel, terminado en 1992 con un coste total de 14 billones de dólares, soporta 50 viajes en tren diariamente. Esta construcción es un enlace crítico entre Europa y Gran Bretaña, que hace posible viajar en un tren desde Londres a París en tres horas.

Las máquinas, operando desde ambos extremos del canal, taladraron hacia el centro. Para realizar con exactitud la unión en la mitad del canal, un sistema de seguimiento láser mantenía las máquinas perfectamente alineadas. En la Figura 4.21 se muestra un modelo de control de máquina taladradora, donde $Y(s)$ es el ángulo de dirección real del recorrido de la máquina taladradora y $R(s)$ es el ángulo deseado. El efecto de la carga sobre la máquina se representa mediante la perturbación $D(s)$.

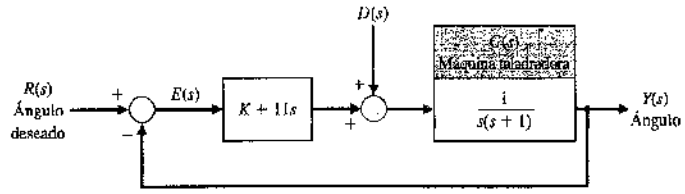


FIGURA 4.21
Modelo de diagrama de bloques de un sistema de control de una máquina taladradora.

El objetivo de diseño consiste en seleccionar la ganancia K tal que la respuesta a cambios en el ángulo de entrada sea la deseada mientras se mantiene el error mínimo debido a la perturbación. La salida debida a las dos entradas es

$$Y(s) = T(s)R(s) + T_d(s)D(s)$$
$$= \frac{K + 11s}{s^2 + 12s + K} R(s) + \frac{1}{s^2 + 12s + K} D(s). \quad (4.59)$$

De este modo, para reducir el efecto de la perturbación, se desea fijar la ganancia a un valor superior a 10. Cuando se selecciona $K = 100$ y se deja $d(t) = 0$, se tiene la respuesta a un escalón unitario en la entrada $r(t)$, tal como se muestra en la Figura 4.22(a). Cuando la entrada $r(t) = 0$ y se calcula la respuesta a un escalón unitario en la perturbación se obtiene $y(t)$ como se muestra en la Figura 4.22(b). El efecto de la perturbación es

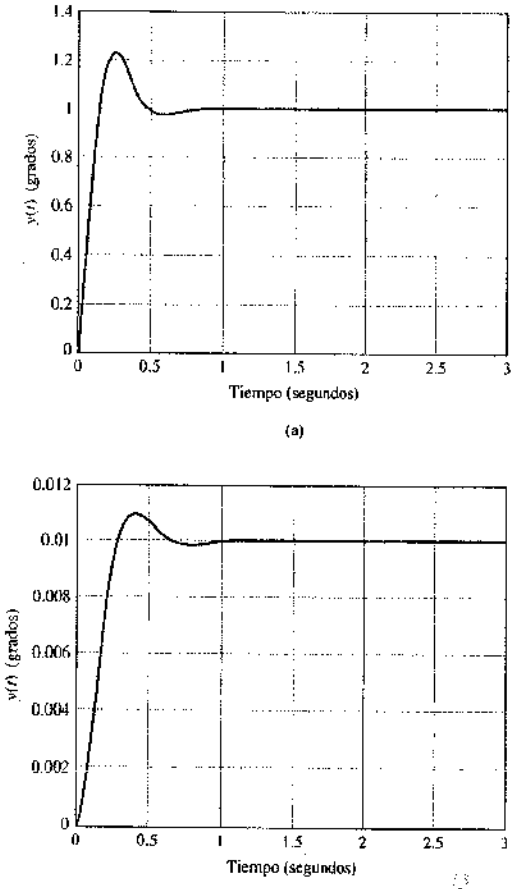


FIGURA 4.22
La respuesta $y(t)$ a (a) un escalón de entrada unitario $r(t)$ y (b) un escalón de perturbación unitario $D(s) = 1/s$ para $K = 100$.

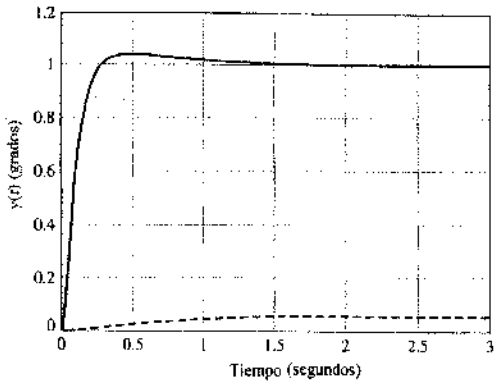


FIGURA 4.23
La respuesta $y(t)$ para una entrada de escalón unitario (línea continua) y para una perturbación escalón unitario (línea a trazos) para $K = 20$.

bastante pequeño. Si se fija la ganancia K a 20, se obtienen las respuestas de $y(t)$ debidas a una entrada $r(t)$ y $d(t)$ escalón unitario; ambas respuestas se pueden visualizar en la Figura 4.23. Como la sobreelongación de la respuesta es pequeña (menor del 4%) y el estado estacionario se alcanza en 2 segundos, se prefiere que $K = 20$. La Tabla 4.1 recoge los resultados.

El error en estado estacionario del sistema a una entrada de escalón unitario $R(s) = 1/s$ es

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1 + \dfrac{K + 11s}{s(s+1)} \left(\dfrac{1}{s}\right)} = 0. \quad (4.60)$$

El valor de $y(t)$ en estado estacionario cuando la perturbación es un escalón unitario, $D(s) = 1/s$, y el valor deseado es $r(t) = 0$ es

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} \left[\frac{1}{s(s+12) + K}\right] = \frac{1}{K}. \quad (4.61)$$

Por tanto, el valor en estado estacionario es 0.01 y 0.05 para $K = 100$ y 20, respectivamente.

Finalmente, se examina la sensibilidad del sistema para cambios en el proceso $G(s)$ utilizando la Ecuación (4,12). Entonces

$$S_G^T = \frac{s(s+1)}{s(s+12) + K} \quad (4.62)$$

Tabla 4.1 Respuesta del sistema realimentador para dos ganancias

Ganancia K	Sobreelongación de la respuesta para $r(t)$ = Escalón	Tiempo de respuesta para $r(t)$ – Escalón para alcanzar el estado estacionario (Criterio 2%)	Respuesta $y(t)$ en estado estacionario para $d(t)$ – Escalón con $r(t) = 0$	Error en estado estacionario de la respuesta para $r(t)$ = Escalón con $d(t) = 0$
100	22%	0.7s	0.01	0
20	4%	1.0s	0.05	0

Para frecuencias bajas ($|s| < 1$), la sensibilidad se puede aproximar mediante

$$S_G^T \simeq \frac{s}{K}, \tag{4.63}$$

donde $K \geq 20$. Por tanto, la sensibilidad del sistema se reduce incrementando la ganancia K. En este caso, se escoge $K = 20$ para un compromiso de diseño razonable.

4.8. EJEMPLO DE DISEÑO: VEHÍCULO EXPLORADOR DE MARTE

El vehículo explorador de Marte llamado *Sojourner* aterrizó en Marte el 4 de julio de 1997 y efectuó un recorrido el 5 de julio de 1997. El explorador fue controlado mediante operadores en la Tierra utilizando controles sobre el explorador [21, 22]. La siguiente generación de vehículos exploradores de Marte, apodados *Spirit* y *Opportunity*, se conocen como los vehículos exploradores gemelos de Marte. Estos nuevos vehículos exploradores difieren en tamaño y capacidad del *Sojourner*. Éste tenía 65 cm (2 ft) de largo y pesaba 10 kg (22 lb), mientras que *Spirit* y *Opportunity* tenían cada uno 1.6 m (5.2 ft) de largo y pesaban 174 kg (384 lbs). El *Sojourner* recorrió una distancia total de unos 100 m durante sus 12 semanas de actividad en Marte. La nueva generación de vehículos exploradores de Marte puede recorrer 10 veces esa distancia en el mismo periodo de tiempo. Los vehículos exploradores de Marte son más autónomos; cada uno lleva su propio equipo de telecomunicaciones, cámara y computadores, mientras que el *Sojourner* mantenía la mayor parte de su equipo en la estación base.

En la Figura 4.24 se muestra el vehículo explorador de Marte *Spirit* que se mueve mediante energía solar. El vehículo se puede controlar desde la Tierra enviándole órdenes de trayectorias. Se espera utilizar una señal de entrada en rampa, $r(t) = t$, $t > 0$. El sistema puede funcionar sin realimentación, como se muestra en la Figura 4.25(a) o con realimentación, como se muestra en la Figura 4.25(b). El objetivo es hacer funcionar al explorador con efectos de perturbaciones *moderados* (como rocas) y con baja sensibilidad a cambios en la ganancia K.

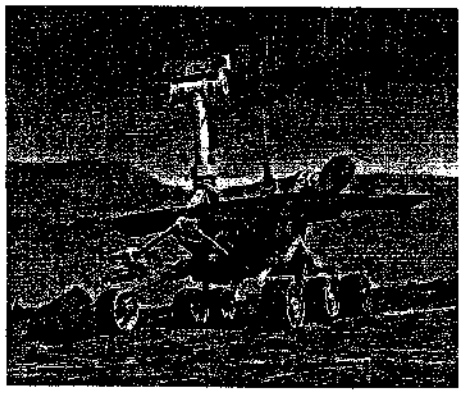


FIGURA 4.24
La siguiente generación de vehículos exploradores de Marte son significativamente más capaces que su predecesor, el *Sojourner*. (Cortesía de la NASA.)

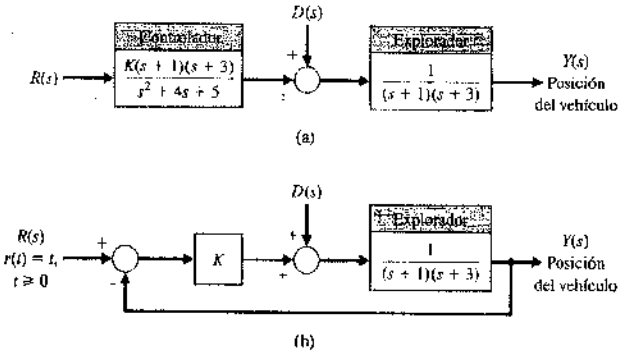


FIGURA 4.25
Sistema de control para el vehículo explorador. (a) Lazo abierto (sin realimentación). (b) Lazo cerrado con realimentación. La entrada es $R(s) = 1/s^2$.

La función de transferencia para el sistema en lazo abierto es

$$T_o(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \simeq \frac{K}{s^2 + 4s + 5}, \tag{4.64}$$

y la función de transferencia para el sistema en lazo cerrado es

$$T_c(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 4s + 3 + K}. \tag{4.65}$$

Luego, para $K = 2$,

$$Y(s) = T_o(s) = T_c(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 5}.$$

Por tanto, se puede comparar la sensibilidad de los sistemas de lazo abierto y lazo cerrado para la misma función de transferencia.

La sensibilidad para el sistema en lazo abierto es

$$S_K^{T_o} = \frac{dT_o}{dK}\frac{K}{T_o} = 1, \tag{4.66}$$

y la sensibilidad para el sistema en lazo cerrado es

$$S_K^{T_c} = \frac{dT_c}{dK}\frac{K}{T_c} = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 4s + 3 + K}. \tag{4.67}$$

Para examinar el efecto de la sensibilidad a frecuencias bajas, sea $s = j\omega$ para obtener

$$S_K^{T_c} = \frac{(3 - \omega^2) + j4\omega}{(3 + K - \omega^2) + j4\omega}. \tag{4.68}$$

Para $K = 2$, la sensibilidad a frecuencias bajas, $\omega < 0.1$, es $|S_K^{T_c}| \simeq 0.6$.

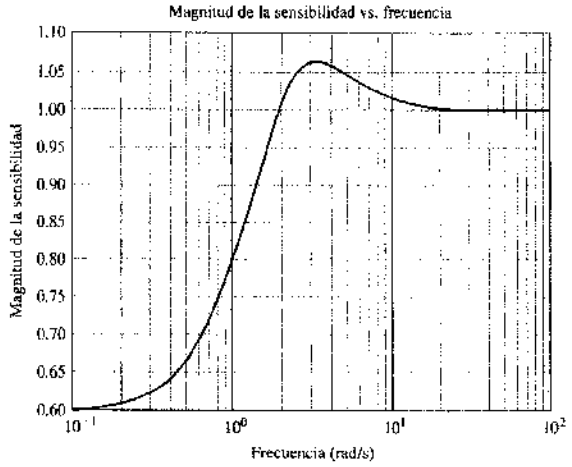


FIGURA 4.26
La magnitud de la sensibilidad del sistema en lazo cerrado para el vehículo explorador de Marte.

La Figura 4.26 muestra una gráfica de frecuencia de la magnitud de la sensibilidad. Obsérvese que la sensibilidad para frecuencias bajas es

$$|S_K^T| < 0.8, \quad \text{para} \quad \omega \leq 0.8.$$

El efecto de la perturbación se puede determinar fijando $R(s) = 0$ y dejando $D(s) = 1/s$. Por tanto, para el sistema en lazo abierto, se tiene el valor en estado estacionario

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s \left\{ \frac{1}{(s+1)(s+3)} \right\} \frac{1}{s} = \frac{1}{3}. \tag{4.69}$$

Como se mostró en la Sección 4.4, la salida del sistema en lazo cerrado con una perturbación de escalón unitario, $D(s) = 1/s$, es

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s \left\{ \frac{1}{(s^2 + 4s + 3 + K)} \right\} \frac{1}{s} = \frac{1}{3 + K}. \tag{4.70}$$

Cuando $K = 2$, $y(\infty) = 1/5$. Como se busca minimizar el efecto de la perturbación, está claro que sería deseable un valor grande de K. Un valor grande de K, tal como $K = 50$, reducirá el efecto de la perturbación así como la magnitud de la sensibilidad (Ecuación 4.68). Sin embargo, cuando se aumenta K más allá de $K = 50$, el comportamiento transitorio del sistema para una entrada en rampa, $r(t)$, empieza a deteriorarse.

4.9. CARACTERÍSTICAS DE LOS SISTEMAS DE CONTROL UTILIZANDO MATLAB

En esta sección, se ilustrarán las ventajas de la realimentación con dos ejemplos. El objetivo es ilustrar la utilización de MATLAB en el análisis de sistemas de control. En el primer ejemplo, se introducirá un control realimentado para un sistema tacómetro de velocidades en un esfuerzo por rechazar las perturbaciones. En la Sección 4.3 se puede

encontrar el ejemplo del sistema de control de velocidad con tacómetro. La reducción en la sensibilidad del sistema a variaciones en la planta, el ajuste de la respuesta transitoria y la reducción del error en estado estacionario se demostrarán en el ejemplo de la Sección 4.7 de la máquina taladradora del canal inglés.

EJEMPLO 4.2. Sistema de control de velocidad

En la Figura 4.11 se muestra la descripción del diagrama de bloques en lazo abierto del motor de cc controlado por inducido con una perturbación en el par de carga, $T_d(s)$. La Tabla 4.2 muestra los valores para los diferentes parámetros (tomados de la Figura 4.11). Se tienen dos entradas en el sistema, $V_a(s)$ y $T_d(s)$. Contando con el principio de superposición, el cual se aplica al sistema lineal, se considera cada entrada de forma independiente. Para investigar los efectos de las perturbaciones sobre el sistema, déjese $V_a(s) = 0$ y considérese únicamente la perturbación $T_d(s)$. Contrariamente, para investigar la respuesta del sistema a una entrada referencia, déjese $T_d(s) = 0$ y considérese únicamente la entrada $V_a(s)$.

La Figura 4.13 muestra el diagrama de bloques del sistema de control de velocidad con tacómetro en lazo cerrado. La Tabla 4.2 recoge los valores para K_a y K_t.

Si el sistema exhibe un buen rechazo a perturbaciones, entonces es de esperar que la perturbación $T_d(s)$ tenga un efecto pequeño sobre la salida $\omega(s)$. Considérese en primer lugar el sistema en lazo abierto de la Figura 4.11. Se puede utilizar MATLAB para calcular la función de transferencia desde $T_d(s)$ hasta $\omega(s)$ y evaluar la respuesta de la salida a perturbación escalón unitario [es decir, $T_d(s) = 1/s$]. La Figura 4.27(a) muestra la respuesta temporal a una perturbación escalón unitario. El programa open-tach.m, mostrado en la Figura 4.27(b), se utiliza para analizar el sistema tacómetro de velocidad en lazo abierto.

La función de transferencia en lazo abierto es

$$\frac{\omega(s)}{T_d(s)} = \frac{-1}{2s + 1.5} = \text{sys\_o},$$

Donde sys_o representa la función de transferencia en lazo abierto en el programa de MATLAB. Debido a que el valor deseado de $\omega(t)$ es cero [recuérdese que $V_a(s) = 0$], el error en estado estacionario es sólo el valor final de $\omega(t)$, el cual se denota por $\omega_o(t)$ para indicar lazo abierto. El error en estado estacionario, que se muestra en la gráfica de la Figura 4.27(a), es aproximadamente el valor de la velocidad cuando $t = 7$ segundos. Se puede obtener un valor aproximado del error en estado estacionario examinando el último valor del vector de salida $\mathbf{y}_o$, el cual se calcula en el proceso de generación de la gráfica de la Figura 4.27(a). El valor en estado estacionario aproximado de ω_o es

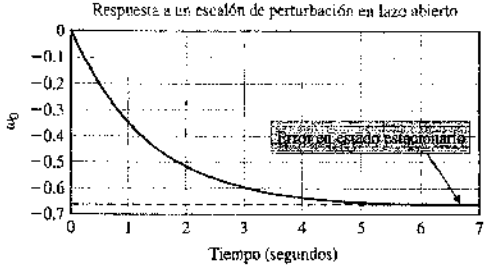
$$\omega_o(\infty) \approx \omega_o(7) = -0.66 \text{ rad/s}.$$

La gráfica verifica que se ha alcanzado el estado estacionario.

De manera similar, se comienza el análisis del sistema en lazo cerrado calculando la función de transferencia en lazo cerrado desde $T_d(s)$ hasta $\omega(s)$ y generando después la respuesta temporal de $\omega(t)$ a una entrada de perturbación de escalón unitario. La Figu-

Tabla 4.2 Parámetros del sistema de control del tacómetro

R_a	K_m	J	b	K_b	K_a	K_t
1	10	2	0.5	0.1	54	1



(a)

opentach.m

```
%Ejemplo de velocidad con tacómetro
%
Ra=1; Km=10; J=2; f=0.5; Kb=0.1;
num1=[1]; den1=[J,b]; sys1=tf(num1,den1);
num2=[Km*Kb/Ra]; den2=[1]; sys2=tf(num2,den2);
sys_o=feedback(sys1,sys2);
%
sys_o=-sys_o
%
[yo,T]=step(sys_o);
plot(T,yo)
title('Respuesta a un escalón de perturbación en lazo abierto')
xlabel('Tiempo (segundos)'),ylabel('\omega_o'), grid
%
yo(length(T))
```

(b)

FIGURA 4.27
Análisis del sistema de control de velocidad en lazo abierto.
(a) Respuesta.
(b) Programa de MATLAB.

ra 4.28 muestra la respuesta de la salida y el programa cltach.m. La función de transferencia desde la entrada de perturbación es

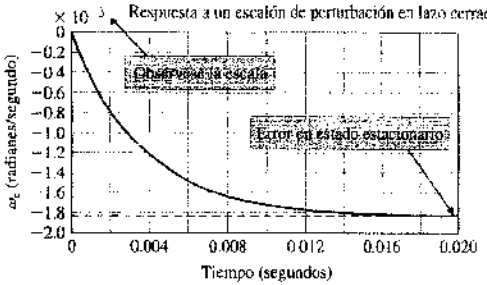
$$\frac{\omega(s)}{T_d(s)} = \frac{-1}{2s + 541.5} = \text{sys\_c}.$$

Como antes, el error en estado estacionario es sólo el valor final de $\omega(t)$, el cual se denota por $\omega_c(t)$ para indicar que es un lazo cerrado. La Figura 4.28(a) muestra la gráfica del error en estado estacionario. Se puede obtener un valor aproximado del error en estado estacionario examinando el último valor en el vector de salida y_c, el cual se calcula en el proceso de generación de la gráfica de la Figura 4.28(a). El valor en estado estacionario aproximado de ω_c es

$$\omega_c(\infty) \approx \omega_c(0.02) = -0.002 \text{ rad/s}.$$

Generalmente se desea que $\omega_c(\infty)/\omega_o(\infty) < 0.02$. En este ejemplo, la razón de la salida de velocidad del estado estacionario en el lazo cerrado y en el lazo abierto debida a una entrada de perturbación de escalón unitario es

$$\frac{\omega_c(\infty)}{\omega_o(\infty)} = 0.003.$$


Respuesta a un escalón de perturbación en lazo cerrado
ω_c (radianes/segundo)
Error en estado estacionario
Tiempo (segundos)

(a)

closedtach.m

```
%Ejemplo de velocidad con tacómetro
%
Ra=1;  Km=10; J=2; b=0.5; Kb=0.1; Ka=54; Kt=1;
num1=[1]; den1=[J,b]; sys1=tf(num1,den1);
num2=[Ka*Kt]; den2=[1]; sys2=tf(num2,den2);
num3=[Kb]; den3=[1]; sys3=tf(num3,den3);
num4=[Km/Ra]; den4=[1]; sys4=tf(num4,den4);
sysa=parallel(sys2,sys3);
sysb=series(sysa,sys4);
sys_c=feedback(sys1,sysb);
%
sys_c=-sys_c
%
[yc,T]=step(sys_c);
plot(T,yc)
title('Respuesta a un escalón de perturbación en lazo cerrado')
xlabel('Tiempo (segundos)'), ylabel('\omega_c (radianes/segundo)'), grid
%
yc(length(T))
```

(b)

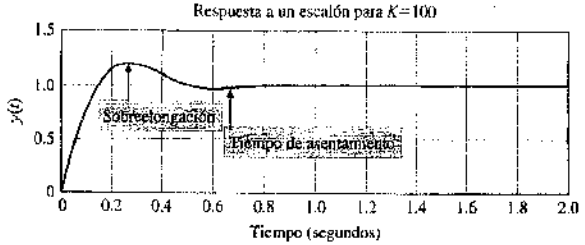
FIGURA 4.28
Análisis del sistema de control de velocidad en lazo cerrado.
(a) Respuesta.
(b) Programa de MATLAB.

Se ha alcanzado una mejora notable en el rechazo de perturbaciones. Está claro que añadir el lazo de realimentación negativa reduce el efecto de la perturbación en la salida. Esto demuestra que la **propiedad del rechazo de perturbaciones** de sistemas realimentados en lazo cerrado. ■

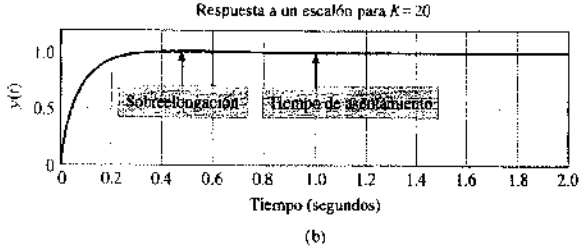
EJEMPLO 4.3. Máquinas taladradoras del Canal Inglés

La Figura 4.21 muestra la descripción del diagrama de bloques de las máquinas taladradoras del Canal Inglés. La función de transferencia de la salida debida a las dos entradas es

$$Y(s) = \frac{K + 11s}{s^2 + 12s + K} R(s) + \frac{1}{s^2 + 12s + K} D(s).$$



(a)



(b)

english1.m

```
% Respuesta a una entrada de escalón unitario R(s)=1/s para K=20 y K=100
%
numg=[1]; deng=[1 1 0]; sysg=tf(numg,deng);
K1=100; K2=20;
num1=[11 K1]; num2=[11 K2]; den=[0 1];
sys1=tf(num1,den);
sys2=tf(num2,den);
%
sysa=series(sys1,sysg); sysb=series(sys2,sysd);
sysc=feedback(sysa,[1]); sysd=feedback(sysb,[1]);
%
t=[0:0.01:2.0];
[y1,t]=step(sysc,t); [y2,t]=step(sysd,t);
subplot(211),plot(t,y1), title('Respuesta a escalón para K=100')
xlabel('Tiempo (segundos)'),ylabel('y(t)'), grid
subplot(212),plot(t,y2), title('Respuesta a escalón para K=20')
xlabel('Tiempo (segundos)'),ylabel('y(t)'), grid
```

Funciones de transferencia en lazo cerrado

Intervalo de tiempo deseado

Etiquetas y títulos en los gráficos

(c)

FIGURA 4.29
Respuesta a una entrada en escalón cuando (a) $K = 100$ y (b) $K = 20$. (c) Programa de MATLAB.

La Figura 4.29 muestra el efecto de la ganancia de control, K, sobre la respuesta transitoria junto con el programa english1.m utilizado para generar los gráficos. Comparando los dos gráficos de las partes (a) y (b), está claro que al disminuir K disminuye la **sobreelongación**. Aunque a partir de los gráficos de la Figura 4.29 no es tan obvio, también es verdad que al disminuir K se incrementa el **tiempo de asentamiento**. Este hecho puede verificarse tomando una vista más cercana (en el nivel de órdenes de MATLAB) de los datos utilizados para generar los gráficos. Este ejemplo demuestra cómo la respuesta transitoria se puede alterar con la ganancia de control realimentado, K. Basándose en el análisis que se ha realizado hasta ahora, se preferiría utilizar $K = 20$. Otra consideración que debe tenerse en cuenta antes de poder establecer el diseño final.

Antes de hacer la elección final de K, es importante considerar la respuesta del sistema a una perturbación de escalón unitario, como se muestra en la Figura 4.30. Se observa que el aumento de K reduce la respuesta del estado estacionario de $y(t)$ a una perturbación escalón. El valor del estado estacionario de $y(t)$ es 0.05 y 0.01 para $K = 20$ y 100, respectivamente. La Tabla 4.3 muestra los errores en estado estacionario, el porcentaje de sobreelongación y los tiempos de asentamiento (criterio del 2%). Los valores en estado estacionario son predichos a partir del teorema del valor final para una entrada de perturbación como sigue:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\left\{\frac{1}{s(s+12)+K}\right\}\frac{1}{s} = \frac{1}{K}.$$

Si la única consideración de diseño es el rechazo a perturbaciones, sería preferible utilizar $K = 100$.

Sólo se ha experimentado con una situación de compromiso muy normal en diseño de sistemas de control. En este ejemplo particular, un incremento de K conlleva un mejor rechazo a perturbaciones, mientras que una disminución de K conlleva un mejor comportamiento (es decir, una menor sobreelongación). La decisión final sobre cómo escoger K depende del diseñador. Aunque MATLAB, por supuesto, puede ayudar en el diseño del sistema de control, no puede reemplazar la capacidad y la intuición del ingeniero en la toma de la decisión.

El último paso en el análisis consiste en observar la sensibilidad del sistema a cambios en la planta. La sensibilidad del sistema viene dada por la Ecuación (4.62), que es

$$S_G^T = \frac{s(s+1)}{s(s+12)+K}.$$

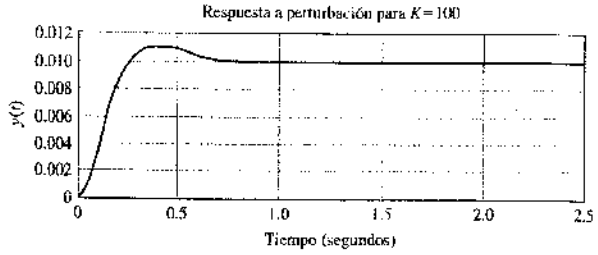
Se pueden calcular los valores de $S_G^T(s)$ para diferentes valores de s y generar un gráfico de la sensibilidad del sistema. Para frecuencias bajas, se puede aproximar la sensibilidad del sistema por

$$S_G^T \simeq \frac{s}{K}.$$

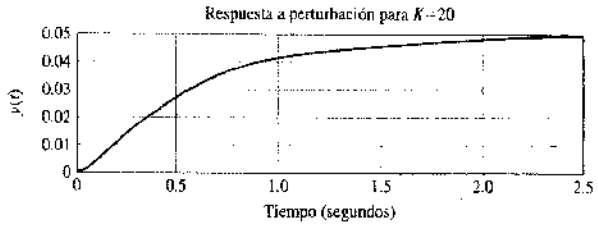
Aumentando la ganancia, K, se reduce la sensibilidad del sistema. La Figura 4.30 muestra los gráficos de la sensibilidad del sistema cuando $s = j\omega$ para $K = 20$. ■

4.10. EJEMPLO DE DISEÑO SECUENCIAL: SISTEMA DE LECTURA DE UNA UNIDAD DE DISCO

El diseño de un sistema de una unidad de disco es un ejercicio de compromiso y optimización. La unidad de disco debe posicionar con precisión la cabeza de lectura a la vez que es capaz de reducir los efectos de los cambios de parámetros, impactos externos y vibraciones. El brazo mecánico y el flexor resonarán a frecuencias que pueden deberse a excitaciones, tales como los impactos de un computador personal. Las perturbaciones en el funcionamiento de la unidad de disco incluyen impactos físicos, roturas o vibraciones en los cojinetes del eje y una modificación de los parámetros debidos a los cambios de los componentes. En esta sección, se examinará el comportamiento del sistema de



(a)



(b)

english2.m

```
% Respuesta a una perturbación D(s)=1/s para K=20 y K=100
%
numg=[1]; deng=[1 1 0];
sysg=tf(numg,deng);
K1=100; K2=20;
num1=[11 K1]; num2=[11 K2]; den=[0 1];
sys1=tf(num1,den); sys2=tf(num2,den);
%
sysa=feedback(sysg,sys1); sysa=minreal(sysa);
sysb=feedback(sysg,sys2); sysb=minreal(sysb);
%
t=[0:0.01:2.5];
[y1,t]=step(sysa,t); [y2,t]=step(sysb,t);
subplot(211),plot(t,y1), title('Respuesta a perturbación para K=100)
xlabel('Tiempo (segundos)'),ylabel('y(t)'), grid
subplot(212),plot(t,y2), title('Respuesta a perturbación para K=20)
xlabel('Tiempo (segundos)'),ylabel('y(t)'), grid
```

Funciones de transferencia en lazo cerrado.

Crea gráficas con etiquetas en los ejes x e y.

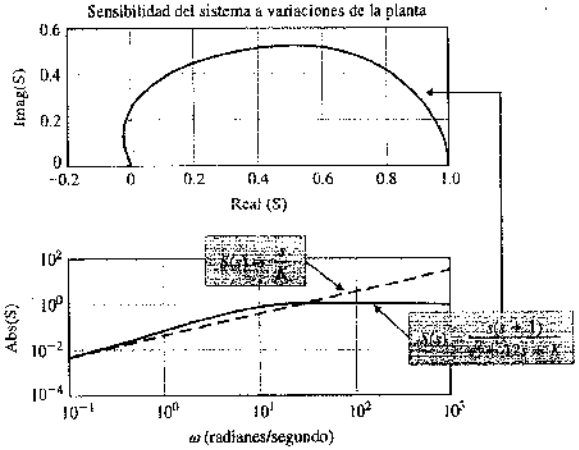
(c)

FIGURA 4.30. Respuesta a una perturbación escalón cuando (a) $K = 100$ y (b) $K = 20$. (c) Programa de MATLAB.

unidad de disco en respuesta a perturbaciones y cambios en los parámetros del sistema. Además, se analizará el error en estado estacionario del sistema para una orden escalón y la respuesta transitoria cuando se ajusta la ganancia del amplificador, K_a. De este

Tabla 4.3 Respuesta del sistema de control de la máquina taladradora para $K = 20$ y $K = 100$

	$K = 20$	$K = 100$
Respuesta a escalón		
P.O.	4%	22%
T_s	1.0*s*	0.7*s*
Respuesta a perturbación		
e_{ss}	5%	1%



(a)

english3.m

```
% Gráfico de la sensibilidad del sistema
%
K=20; num=[1 1 0]; den=[1 12 K];
w=logspace(-1,3,200); s=w*i;
n=s.^2 + s; d= s.^2 + 12*s+K; S=n./d;
n2= s; d2=K; S2=n2./d2;
%
subplot(211), plot(real(S),imag(S))
title('Sensibilidad del sistema a variaciones de la planta')
xlabel('Real(S)'), ylabel('Imag(S)'), grid
subplot(212), loglog(w.abs(S),w,abs(S2))
xlabel('\omega(radianes/segundo)'), ylabel('Abs(S)'), grid
```

Inicialización del vector $s = j\omega$ para calcular la sensibilidad.

Sensibilidad del sistema.

Aproximación de la sensibilidad.

(b)

FIGURA 4.31
(a) Sensibilidad del sistema a variaciones de la planta ($s = j\omega$). (b) Programa de MATLAB.

modo, en esta sección, se llevan a cabo los pasos 6 y 7 del proceso de diseño que se muestra en la Figura 1.19.

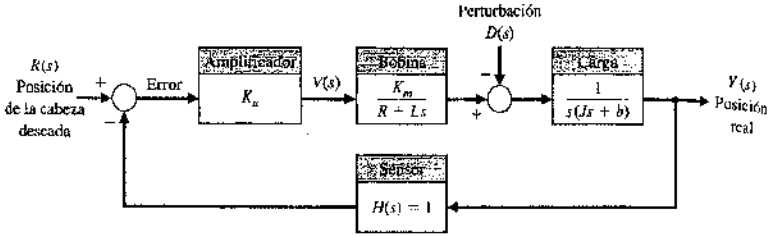


FIGURA 4.32
Sistema de control para la cabeza de lectura de una unidad de disco.

Considérese el sistema que se muestra en la Figura 4.32. Este sistema de lazo cerrado utiliza un amplificador con una ganancia variable como controlador. Utilizando los parámetros especificados en la Tabla 2.9, se obtienen las funciones de transferencia como las que se muestran en la Figura 4.33. En primer lugar, se determinarán los estados estacionarios para una entrada de escalón unitario, $R(s) = 1/s$, cuando $D(s) = 0$. Cuando $H(s) = 1$, se obtiene

$$E(s) = \frac{1}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)} R(s).$$

Por tanto,

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \left[\frac{1}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)} \right] \frac{1}{s}. \tag{4.71}$$

Entonces el error en estado estacionario es $e(\infty) = 0$ para una entrada de escalón. Este comportamiento se obtiene a pesar de los cambios en los parámetros del sistema.

Ahora se determina el comportamiento transitorio del sistema cuando se ajusta K_a. La función de transferencia en lazo cerrado [con $D(s) = 0$] es

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)}$$

$$= \frac{5000\ K_a}{s^3 + 1020s^2 + 20\,000s + 5000K_a}. \tag{4.72}$$

Utilizando el programa de órdenes de MATLAB que se muestra en la Figura 4.34(a), se obtienen las respuestas del sistema para $K_a = 10$ y $K_a = 80$, que se muestran en la Figura 4.34(b). Claramente, el sistema es más rápido en respuesta a la orden de entrada cuando $K_a = 80$, pero la respuesta es inaceptablemente oscilatoria.

Ahora se determina el efecto de la perturbación $D(s) = 1/s$ cuando $R(s) = 0$. Se desea disminuir el efecto de la perturbación hasta un nivel insignificante. Utilizando el sistema de la Figura 4.33, se obtiene la respuesta $Y(s)$ para la entrada $D(s)$ cuando $K_a = 80$ como

$$Y(s) = \frac{G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)} D(s). \tag{4.73}$$

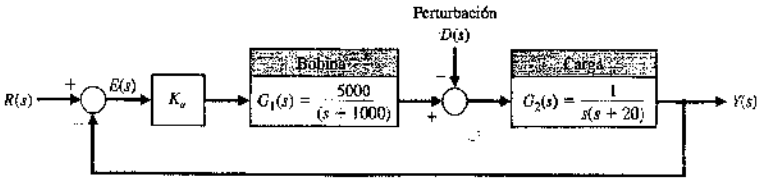
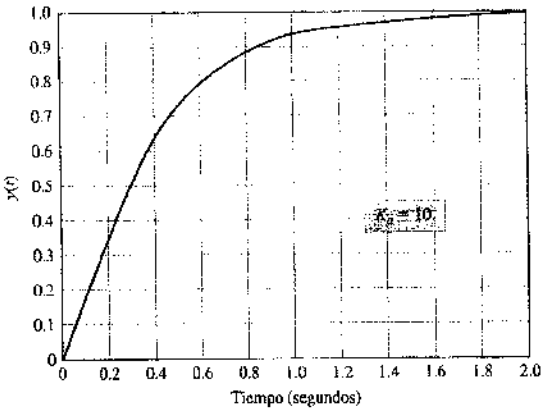
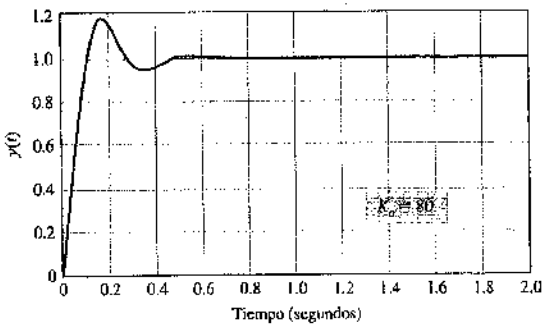


FIGURA 4.33
Sistema de control de la cabeza de una unidad de disco con los parámetros típicos de la Tabla 2.11.


```
Ka=10;                                  ← Selección de Ka
nf=[5000]; df=[1 1000]; sysf=tf(nf,df);
ng=[1]; dg=[1 20 0]; sysg=tf(ng,dg);
sysa=series(Ka*sysf,sysg);
sys=feedback(sysa,[1]);
t=[0:0.01:2];
y=step(sys,t); plot(t,y)
ylabel('y(t)'), xlabel('Tiempo (segundos)'), grid
```

(a)



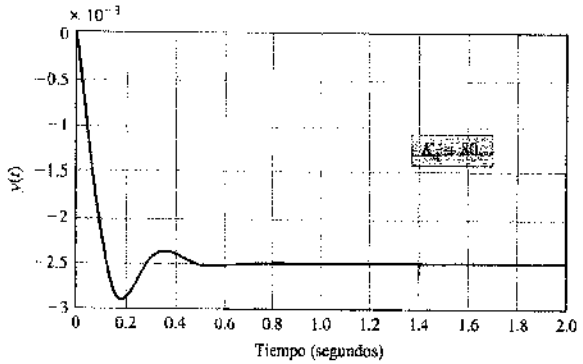


(b)

FIGURA 4.34
Respuesta en lazo cerrado.
(a) Programa de MATLAB.
(b) Respuesta a escalón para $K_a = 10$ y $K_a = 80$.

```
Ka=80;                                  ← Selección de Ka
nf=[5000]; df=[1 1000]; sysf=tf(nf,df);
ng=[1]; dg=[1 20 0]; sysg=tf(ng,dg);
sys=feedback(sysg,Ka*sysf);
sys=-sys;                               ← Introducción de la perturbación con signo negativo
t=[0:0.01:2];
y=step(sys,t);
plot(t,y), grid
ylabel('y(t)'), xlabel('Tiempo (segundos)'), grid
```

(a)



(b)

FIGURA 4.35
Respuesta a un escalón de perturbación.
(a) Programa de MATLAB.
(b) Respuesta a perturbación para $K_a = 80$.

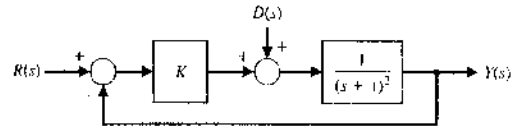
Utilizando el programa de MATLAB que se muestra en la Figura 4.35(a), se obtiene la respuesta del sistema cuando $K_a = 80$ y $D(s) = 1/s$, como se muestra en la Figura 4.35(b). Para reducir más el efecto de la perturbación, sería necesario aumentar K_a por encima de 80. Sin embargo, la respuesta a una orden escalón $r(t) = 1$, $t > 0$ es inaceptablemente oscilatoria. En el capítulo siguiente se intentará determinar el mejor valor para K_a, dado el requisito de una respuesta rápida aunque no oscilatoria.

4.11. RESUMEN

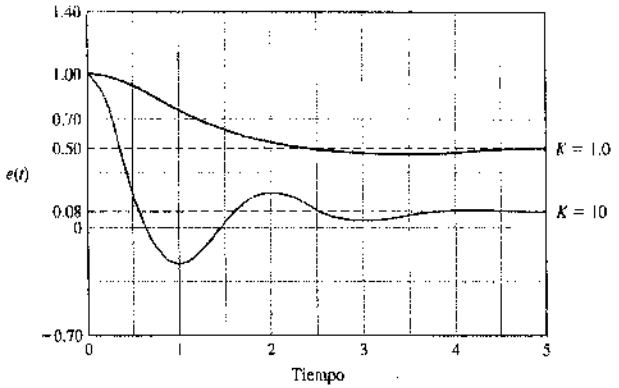
Las razones fundamentales para usar la realimentación, a pesar de su coste y complejidad adicional, son las siguientes:

1. La disminución de la sensibilidad del sistema frente a variaciones en los parámetros del proceso $G(s)$.
2. La facilidad del control y ajuste de la respuesta transitoria del sistema.
3. El mejoramiento en el rechazo de señales de perturbación y de ruido dentro del sistema.
4. El mejoramiento en la reducción del error en estado estacionario del sistema.

Los beneficios de la realimentación se pueden ilustrar considerando el sistema de la Figura 4.36(a). Este sistema se puede considerar para varios valores de ganancia, K. La Tabla 4.4 resume los resultados del sistema funcionando como un sistema en lazo abierto (desconectado el camino de realimentación) y para varios valores de la ganancia, K, con la realimentación conectada. Está claro que el tiempo de asentamiento y la sensibilidad del sistema disminuyen cuando la ganancia aumenta. Además, el sistema realimentado demuestra una reducción notable del error en estado estacionario cuando la ganancia se aumenta. Finalmente, la Figura 4.36(b) muestra la respuesta para una perturbación de escalón unitario [cuando $R(s) = 0$] y muestra cómo un valor grande de la ganancia reducirá el efecto de la perturbación.



(a)



(b)

FIGURA 4.36
(a) Sistema de control realimentado de lazo simple.
(b) La respuesta del error para una perturbación de escalón unitario cuando $R(s) = 0$.

Tabla 4.4 Respuesta del sistema que se muestra en la Figura 4.36(a)

	Lazo abierto*	Lazo cerrado		
	$K = 1$	$K = 1$	$K = 8$	$K = 10$
Tiempo de subida (segundos) (10% a 90% del valor final)	3.35	1.52	0.45	0.38
Porcentaje de sobreelongación (%)	0	4.31	33	40
Valor final de $y(t)$ debido a la perturbación, $D(s) = 1/s$	1.0	0.50	0.11	0.09
Porcentaje del error en estado estacionario para una entrada escalón unitario	0	50%	11%	9%
Porcentaje de cambio en el error de estado estacionario debido a la disminución de un 10% en K	10%	5.3%	1.2%	0.9%

*Respuesta sólo cuando $K = 1$ exactamente.

Los sistemas de control con realimentación tienen muchas características provechosas. Por tanto, no es de sorprender que se encuentren una multitud de sistemas de control con realimentación en la industria, el gobierno y la naturaleza.

EJERCICIOS

E4.1. Un sistema de lazo cerrado se emplea para rastrear el sol, con el objeto de obtener una potencia máxima a partir de un arreglo fotovoltaico. El sistema de rastreo se puede representar por medio de la Figura 4.3 con $H(s) = 1$ y

$$G(s) = \frac{100}{\tau s + 1},$$

donde $\tau = 3$ segundos nominalmente. (a) Calcúlese la sensibilidad de este sistema para un cambio pequeño en τ. (b) Calcúlese la constante de tiempo de la respuesta del sistema de lazo cerrado.

Respuesta: $S = -3\tau/(3s + 101)$; $\tau_c = 3/101$ segundos

E4.2. Un sistema digital de audio se diseña para minimizar el efecto de perturbaciones y ruido, como se muestra en la Figura E4.2. A modo de aproximación, se puede representar $G(s) = K_2$. (a) Calcúlese la sensibilidad del sistema debida a K_2. (b) Calcúlese el efecto de la perturbación sobre V_0. (c) ¿Qué valor de K_1 se seleccionaría para minimizar el efecto de la perturbación?

E4.3. Como se muestra en la Figura E4.3(a), se pueden emplear un brazo de robot y una cámara para recolectar fruta. La cámara se emplea para cerrar el lazo de realimentación a un microcomputador, el cual controla el brazo [8, 9]. La función de transferencia para el proceso es

$$G(s) = \frac{K}{(s + 3)^2}.$$

(a) Calcúlese el error esperado en estado estacionario de la pinza para una orden escalón A como una función de K. (b) Señálese alguna posible señal de perturbación para este sistema.

Respuesta: (a) $e_{ss} = \dfrac{A}{1 + K/9}$

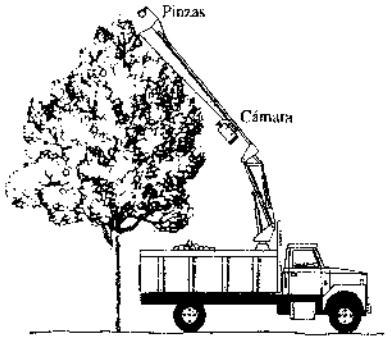


FIGURA E4.3. Robot selector de fruta.

E4.4. El mecanismo de transmisión de un disco magnético requiere un motor para posicionar una cabeza de lectura-escritura sobre pistas de datos de un disco giratorio, como se muestra en la Figura E4.4. El motor y la cabeza se pueden representar mediante la función de transferencia

$$G(s) = \frac{10}{s(\tau s + 1)},$$

donde $\tau = 0.001$ segundos. El controlador toma la diferencia entre las posiciones real y deseada y genera un error. Este error se multiplica por un amplificador K. (a) ¿Cuál es el error en la posición en estado estacionario para un cambio escalón en la entrada deseada? (b) Calcúlese la K requerida para producir un error en estado estacionario de 0.1 mm para una entrada en rampa de 10 cm/s.

Respuesta: $e_{ss} = 0$; $K = 100$

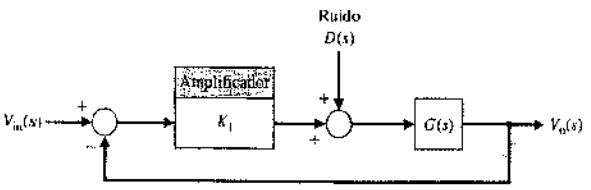


FIGURA E4.2
Sistema de audio digital.

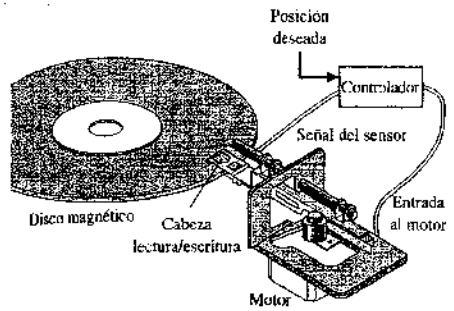


FIGURA E4.4. Control de unidad de disco.

E4.5. La mayoría de la gente ha observado una imagen desenfocada de un proyector de diapositivas. Un proyector con foco automático ajusta las variaciones de las perturbaciones en la posición y temperatura de la diapositiva [11]. Ilústrese un diagrama de bloques de un sistema de autoenfoque y describase cómo trabaja dicho sistema. La proyección desenfocada de una diapositiva es un ejemplo visual de error en estado estacionario.

E4.6. Los automóviles de tracción a las cuatro ruedas son populares en las regiones donde las carreteras en invierno están a menudo resbaladizas debido a la nieve y el hielo. Un vehículo con tracción a las cuatro ruedas con frenos antibloqueo utiliza un sensor para mantener cada rueda girando para conservar la tracción. La Figura E4.6 muestra un sistema. Calcúlese la respuesta en lazo cerrado de este sistema cuando se intenta mantener una velocidad constante de la rueda. Determínese la respuesta cuando $R(s) = A/s$.

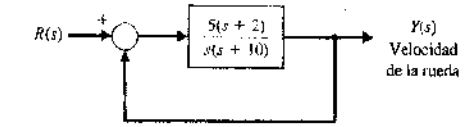


FIGURA E4.6. Auto con tracción a las cuatro ruedas.

E4.7. Los sumergibles con cascos de plástico transparente tienen el potencial para revolucionar el tiempo libre bajo el agua. Un vehículo pequeño sumergible tiene un sistema de control de profundidad como el que se ilustra en la Figura E4.7.

(a) Determínese la función de transferencia en lazo cerrado $T(s) = Y(s)/R(s)$.
(b) Determínese la sensibilidad $S_{K_1}^T$ y S_K^T.
(c) Determínese el error en estado estacionario debido a la perturbación $D(s) = 1/s$.
(d) Calcúlese la respuesta $y(t)$ para una entrada de escalón $R(s) = 1/s$ cuando $K = K_2 = 1$ y $1 < K_1 < 10$. Selecciónese K_1 para la respuesta más rápida.

E4.8. Considérese el sistema de control realimentado que se muestra en la Figura E4.8. (a) Determínese el error en estado estacionario para una entrada de escalón en función de la ganancia K. (b) Determínese la sobreelongación para la respuesta escalón para $40 \leq K \leq 400$. (c) Dibújense la sobreelongación y el error en estado estacionario frente a K.

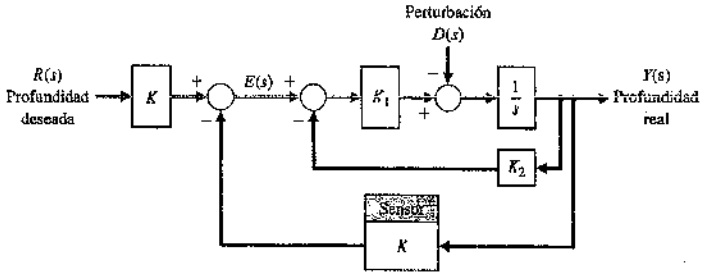


FIGURA E4.7
Sistema de control de profundidad.

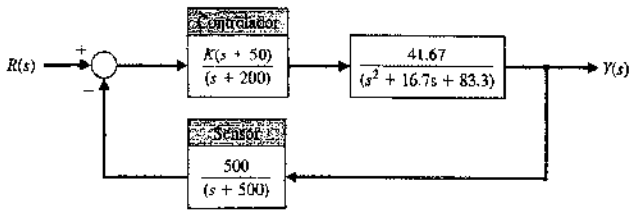


FIGURA E4.8
Sistema de control realimentado.

E4.9. Considérese el sistema de lazo cerrado de la Figura E4.9, donde

$$G(s) = \frac{K}{s + 10}$$

y

$$H(s) = \frac{14}{s^2 + 5s + 6}.$$

(a) Calcúlese la función de transferencia $T(s) = Y(s)/R(s)$.
(b) Defínase el error de seguimiento como $E(s) = Y(s) - R(s)$. Calcúlese $E(s)$ y determínese el error de seguimiento en estado estacionario debido a una entrada de escalón unitario, es decir, $R(s) = 1/s$.
(c) Calcúlese la función de transferencia $Y(s)/T_d(s)$ y determínese el error en estado estacionario de la salida debido a una entrada de perturbación de escalón unitario, es decir, $T_d(s) = 1/s$.
(d) Calcúlese la sensibilidad S_K^T.

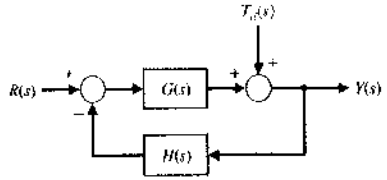


FIGURA E4.9. Sistema de lazo cerrado con realimentación no unitaria.

E4.10. En la Figura E4.10, considérese el sistema en lazo cerrado con ruido en la medida $N(s)$, donde

$$G(s) = \frac{100}{s + 100}, \quad G_c(s) = K_1 \quad \text{y} \quad H(s) = \frac{K_2}{s + 5}.$$

En el siguiente análisis, el error de seguimiento se define como $E(s) = Y(s) - R(s)$.

(a) Calcúlese la función de transferencia $T(s) = Y(s)/R(s)$ y determínese el error de seguimiento en estado estacionario debido a una respuesta de escalón unitario, es decir, supóngase que $R(s) = 1/s$ y que $N(s) = 0$.
(b) Calcúlese la función de transferencia $Y(s)/N(s)$ y determínese el error de seguimiento en estado estacionario debido a una respuesta de perturbación de escalón unitario, es decir, supóngase que $N(s) = 1/s$ y que $R(s) = 0$. Recuérdese, en este caso, que la salida deseada es cero.
(c) Si el objetivo es seguir a la entrada mientras se rechaza el ruido de la medida [en otras palabras, mientras se minimiza el efecto de $N(s)$ en la salida], ¿cómo se deberían seleccionar los parámetros K_1 y K_2?

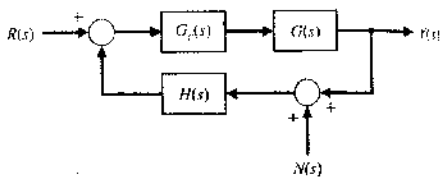


FIGURA E4.10. Sistema de lazo cerrado con realimentación no unitaria y ruido en la medida.

PROBLEMAS

P4.1. La función de transferencia de lazo abierto del sistema de flujo de fluido obtenida en el Problema 2.12 puede escribirse

$$G(s) = \frac{\Delta Q_2(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{1}{\tau s + 1},$$

donde $\tau = RC$, R es una constante equivalente a la resistencia ofrecida por el orificio, de forma que $1/R = \frac{1}{2}kH_0^{-1/2}$ y C = área de la sección transversal del depósito. Como $\Delta H = R\Delta Q_2$, para la función de transferencia que relaciona la cabeza con el cambio de entrada, se tiene

$$G_1(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{R}{RCs + 1}.$$

Para un sistema con realimentación de lazo cerrado, puede usarse un sensor de nivel de flotador y una válvula como se muestra en la Figura P4.1. Suponiendo que el flotador tiene una masa despreciable, la válvula se controla de forma que una reducción en la velocidad del flujo, ΔQ_1, es proporcional a un aumento en la cabeza, ΔH, o $\Delta Q_1 = -K\Delta H$. Dibújese un grafo de flujo de lazo cerrado o un diagrama de bloques. Determínese y compárese el sistema de lazo abierto y de lazo cerrado para: (a) la sensibilidad a los cambios en el coeficiente equivalente R y de realimentación K; (b) la capacidad para reducir los efectos de una perturbación en el nivel de $\Delta H(s)$, y (c) el error en estado estacionario del nivel (cabeza) para un cambio de tipo escalón en la entrada $\Delta Q_1(s)$.

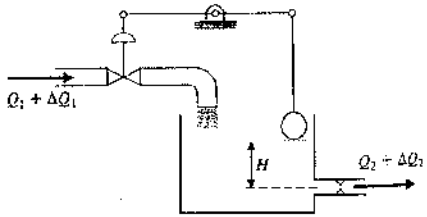
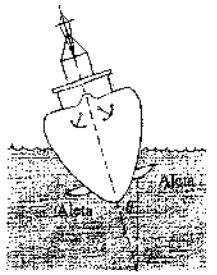
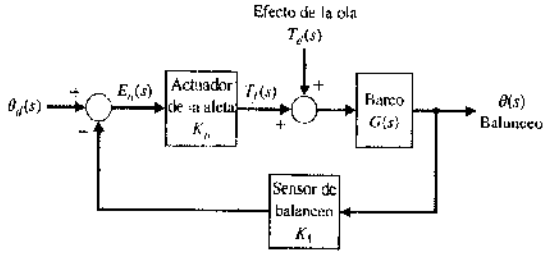


FIGURA P4.1. Control del nivel de un tanque.



(a)



(b)

FIGURA P4.2
Sistema de estabilización de un barco. El efecto de las olas es un par sobre el barco $T_d(s)$.

P4.2. Es importante garantizar la comodidad de los pasajeros en los barcos, estabilizando las oscilaciones causadas por las olas [13]. La mayoría de los sistemas de estabilización de barcos usan aletas o superficies de reacción hidráulica que se proyectan sobre el agua con el objeto de generar un par de estabilización en el barco. En la Figura P4.2 se muestra un diagrama sencillo de un sistema de estabilización de barco. El movimiento de balanceo del barco puede considerarse como un péndulo oscilante con una desviación de la vertical de θ grados y un período típico de 3 segundos. La función de transferencia para un barco típico es

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

donde $\omega_n = 3$ rad/s y $\zeta = 0.20$. Con este bajo factor de amortiguación ζ, las oscilaciones continúan durante varios ciclos y la amplitud del balanceo puede alcanzar 18° para la amplitud esperada de las olas en un mar normal. Determínese y compárese el sistema de lazo cerrado y de lazo abierto para: (a) la sensibilidad a los cambios en la constante del regulador K_a y en la del sensor de balanceo K_1 y (b) la capacidad para reducir los efectos de la perturbación de las olas. Obsérvese que el balanceo deseado $\theta_d(s)$ es de cero grados.

P4.3. Una de las variables más importantes que se deben controlar en sistemas industriales y químicos es la temperatura. En la Figura P4.3 se muestra una representación sencilla de un sistema de control térmico [14]. La temperatura $\mathcal{T}$ del proceso se controla mediante el calentador con una resistencia K. Una representación aproximada de la dinámica relaciona linealmente la pérdida de calor en el proceso con la diferencia de temperatura $(\mathcal{T} - \mathcal{T}_a)$. Esta relación se mantiene si la diferencia de temperatura es relativamente pequeña y el almacenamiento de energía del calentador y las paredes del recipiente es despreciable. Así mismo, se supone que el voltaje conectado al calentador, e_b, es proporcional a e_{deseado} o $e_b = kF_b = k_a E_b e(t)$, donde k_a es la constante del actuador. Entonces la respuesta linealizada del sistema de lazo abierto es

$$\mathcal{T}(s) = \frac{(k_1 k_a E_b)}{\tau s + 1} E(s) + \frac{\mathcal{T}_a(s)}{\tau s + 1},$$

donde

$\tau = MC/\rho A$.
M = masa en el depósito,
A = área de la superficie del depósito,
ρ = constante de transferencia de calor,
C = constante del calor específico,
k_1 = una constante de dimensionalidad, y
e_{th} = voltaje de salida del termopar.

Determínense y compárense los sistemas de lazo abierto y de lazo cerrado para: (a) la sensibilidad a los cambios en la constante $K = k_1 k_a E_b$; (b) la capacidad para reducir los efectos de una perturbación de tipo escalón en la temperatura ambiente $\Delta\mathcal{T}_a(s)$, y (c) el error en estado estacionario del controlador de temperatura para un cambio de escalón en la entrada, e_{deseado}.

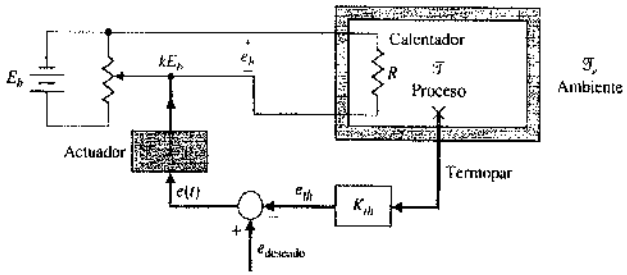


FIGURA P4.3
Sistema de control de temperatura.

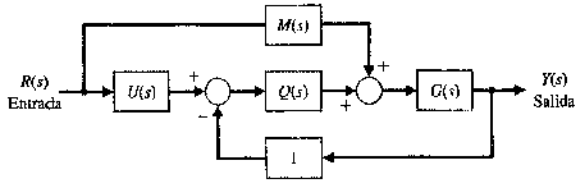


FIGURA P4.4
Sistema de dos trayectorias.

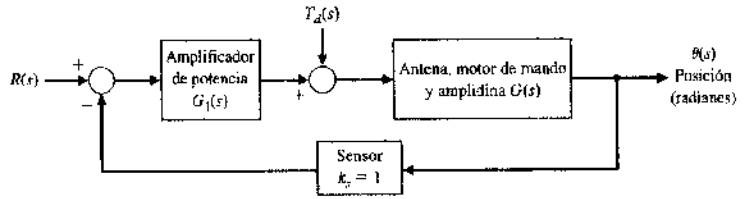


FIGURA P4.5
Sistema de control de antena.

P4.4. Un sistema de control tiene dos trayectorias de señal en sentido directo, como se muestra en la Figura P4.4. (a) Determínese la función de transferencia general $T(s) = Y(s)/R(s)$. (b) Calcúlese la sensibilidad S_G^T usando la Ecuación (4.16). (c) ¿La sensibilidad depende de $U(s)$ o de $M(s)$?

P4.5. Últimamente han adquirido gran importancia las grandes antenas para microondas en la radioastronomía y seguimiento de satélites. Por ejemplo, una antena grande, con un diámetro de 20 m, está expuesta a grandes pares debidos a las ráfagas de viento. Una antena propuesta debe tener un error de menos de 0.10° en un viento de 56 km/h. Los experimentos muestran que esta fuerza del viento ejerce en la antena una perturbación máxima de 27 660 kgm a 56 km/h o el equivalente a 10 V en la entrada, $T_d(s)$, a la amplidina. Otro de los problemas del manejo de antenas grandes es la forma de la función de transferencia del sistema, la cual tiene una resonancia estructural. La Figura P4.5 muestra el servosistema de la antena. La función de transferencia de la antena, el motor del eje y la amplidina se aproxima por medio de

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)},$$

donde $\zeta = 0.707$ y $\omega_n = 15$. La función de transferencia del amplificador de potencia es aproximadamente

$$G_1(s) = \frac{k_a}{\tau s + 1},$$

donde $\tau = 0.15$ segundos. (a) Determínese la sensibilidad del sistema a un cambio del parámetro k_a. (b) El sistema está sujeto a una perturbación $T_d(s) = 10/s$. Determínese la magnitud requerida de k_a con el objeto de mantener el error del sistema en estado estacionario por debajo de 0.10° cuando la entrada $R(s)$ es cero. (c) Determínese el error del sistema cuando está sujeto a una perturbación $T_d(s) = 10/s$, operando como un sistema de lazo abierto ($k_s = 0$) con $R(s) = 0$.

P4.6. En el futuro se necesitará un sistema automático de control de velocidad para automóviles de pasajeros que recorran una vía automática de alta velocidad. En la Figura P4.6 se muestra un modelo de sistema de control de velocidad con realimentación para un vehículo normal. También se muestra la perturbación en la carga debida a un porcentaje de desnivel, $\Delta D(s)$. La ganancia del motor K_e varía en el intervalo de 10 a 1000 para diversos modelos de automóviles. La constante de tiempo del motor, τ_e, es de 20 segundos. (a) Determínese la sensibilidad del sistema a los cambios en la ganancia del motor K_e. (b) Determínese el efecto del par de torsión de la carga en la velocidad. (c) Determínese el porcentaje de desnivel constante $\Delta D(s) = \Delta d/s$ al cual se detiene el vehículo

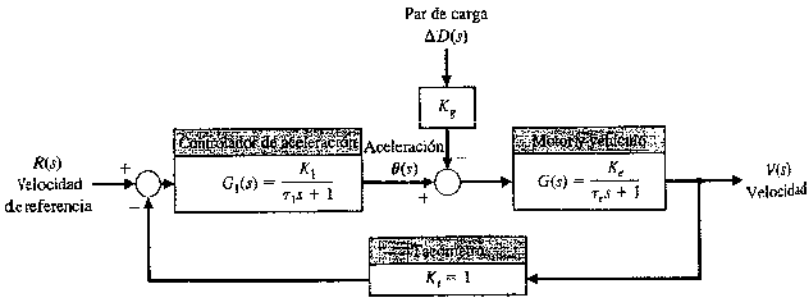


FIGURA P4.6
Control de velocidad de un automóvil.

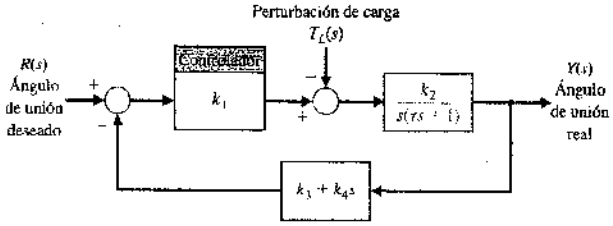


FIGURA P4.7
Sistema de control de un robot.

[velocidad $V(s) = 0$], en términos de los factores de la ganancia. Obsérvese que como el desnivel es constante, resulta suficiente la solución en el estado estacionario. Supóngase que $R(s) = 30/s$ km/h y que $K_g K_1 \gg 1$. Cuando $(K_g/K_1) = 2$, ¿qué porcentaje de desnivel Δd hará que el automóvil se detenga?

P4.7. Un robot utiliza realimentación para controlar la orientación de cada eje de unión. El efecto de la carga varía en función de los objetos cargados y la posición extendida del brazo. El sistema se desviará por la carga que lleva en la pinza. Por tanto, el sistema se puede representar por la Figura P4.7, donde el par de carga es D/s. Supóngase que $R(s) = 0$ en la posición indicada. (a) ¿Cuál es el efecto de $T_L(s)$ sobre $Y(s)$? (b) Determínese la sensibilidad del lazo cerrado para k_2. (c) ¿Cuál es el error en estado estacionario cuando $R(s) = 1/s$ y $T_L(s) = 0$?

P4.8. Los cambios extremos en la temperatura pueden provocar fallos en los circuitos electrónicos [1]. Los sistemas con realimentación para el control de temperatura reducen la magnitud en el cambio de este parámetro empleando un calentador para compensar las bajas temperaturas del exterior. En la Figura P4.8 se muestra un diagrama de bloques para este sistema. El efecto de una caída en la temperatura ambiente es un decremento en escalón en $D(s)$. La temperatura real del circuito electrónico es $Y(s)$. La dinámica del cambio de temperatura en el circuito electrónico está representada por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{200}{s^2 + 20s + 200}$$

(a) Determínese la sensibilidad del sistema para K. (b) Obténgase el efecto de la perturbación $D(s)$ sobre la salida $Y(s)$.

P4.9. Un útil dispositivo unidireccional de percepción es el sensor fotoemisor [15]. Una fuente de luz es sensible a la corriente del emisor que fluye y altera la resistencia del fotosensor. Tanto la fuente de luz como el fotoconductor se encuentran agrupados en un dispositivo único con cuatro terminales. Este dispositivo proporciona alta ganancia y aislamiento total. En la Figura P4.9(a) se muestra un lazo con

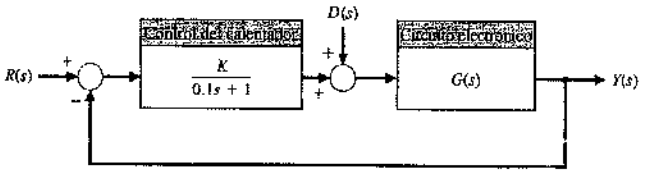


FIGURA P4.8
Sistema de control de temperatura.

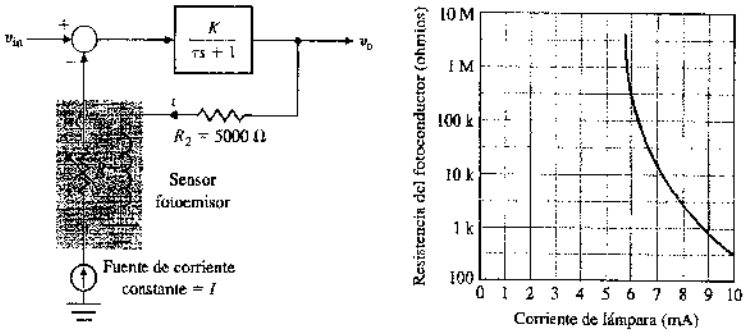


FIGURA P4.9
Sistema fotosensor.

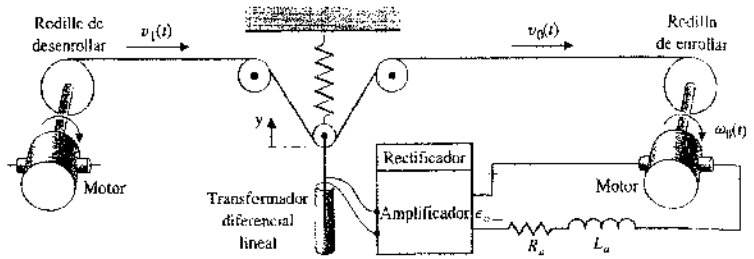


FIGURA P4.10
Control de la tensión del papel.

realimentación que utiliza este dispositivo, y en la Figura P4.9(b) se muestra la característica no lineal de corriente-resistencia para el Raytheon CK1116. La curva de resistencia puede representarse por la ecuación

$$\log_{10} R = \frac{0.175}{(i - 0.005)^{1/3}},$$

donde i es la corriente de lámpara. El punto de operación normal se obtiene cuando $v_{ss} = 35$ V, y $v_{ss} = 2.0$ V. (a) Determínese la función de transferencia de lazo cerrado del sistema. (b) Determínese la sensibilidad del sistema para cambios en la ganancia K.

P4.10. Para una planta procesadora de papel, es importante mantener una tensión constante en las hojas continuas de papel entre los rodillos de desenrollar y enrollar. La tensión varía cuando cambia la anchura de los rodillos y es necesario un ajuste en la velocidad del motor, como se muestra en la Figura P4.10. Si la velocidad de enrollar del motor es incontrolable, cuando el papel se transfiera del rodillo de desenrollar al de enrollar disminuirá la velocidad (v_0) y descenderá la tensión del papel [10, 14]. La combinación de tres rodillos y un resorte proporciona una medida de la tensión del papel. La fuerza del resorte es igual a $k_1 y$ y el transformador diferencial lineal, rectificador y amplificador puede representarse por $e_0 = -k_2 y$. Por tanto, la medida de la tensión se describe por la relación $2T(s) = k_1 y$, donde y es la desviación de la condición de equilibrio, y $T(s)$ es la componente vertical de la desviación en la tensión de la condición de equilibrio. La constante de tiempo del motor es $\tau = L_a/R_a$ y la velocidad lineal del rodillo de enrollar es dos veces la velocidad angular del motor; es decir, $v_0(t) = 2\omega_0(t)$. Entonces, la ecuación del motor es:

$$E_0(s) = \frac{1}{K_m}[\tau s\omega_0(s) + \omega_0(s)] + k_3 \Delta T(s),$$

donde ΔT = una perturbación en la tensión. (a) Dibújese el diagrama de bloques de lazo cerrado para el sistema, incluyendo la perturbación $\Delta T(s)$. (b) Añádase al diagrama de bloques el efecto de una perturbación en la velocidad de desenrollamiento $\Delta V_1(s)$. (c) Determínese la sensibilidad del sistema a la constante del motor K_m. (d) Determínese el error en estado estacionario en la tensión cuando ocurre una perturbación de escalón en la velocidad de entrada, $\Delta V_1(s) = A/s$.

P4.11. Un objetivo importante en el proceso de fabricación de papel es mantener una consistencia uniforme en la pulpa de salida a medida que ésta pasa al secado y enrollamiento. En la Figura P4.11(a) se muestra un diagrama del sistema de control de dilución para la consistencia del espesor de la pulpa. La consistencia se determina directamente por la cantidad de agua que se agregue. El diagrama de bloques del sistema se muestra en la Figura P4.11(b). Sean $H(s) = 1$ y

$$G_c(s) = \frac{K}{10s + 1}, \qquad G(s) = \frac{1}{2s + 1}.$$

Determínese: (a) la función de transferencia $T(s) = Y(s)/R(s)$ del lazo cerrado; (b) la sensibilidad S_T^K; (c) el error en estado estacionario para un cambio en escalón de la consistencia deseada $R(s) = A/s$, y (d) el valor requerido de K para un error permisible en estado estacionario del 2%.

P4.12. En las Figuras P4.12(a) y (b) se muestran dos sistemas con realimentación. (a) Calcúlense las funciones de transferencia de lazo cerrado T_1 y T_2 para cada sistema. (b) Demuéstrese que $T_1 = T_2 = 100$ cuando $K_1 = K_2 = 100$. (c) Compárense las sensibilidades de los dos sistemas con respecto al parámetro K_1 para los valores nominales de $K_1 = K_2 = 100$.

P4.13. Una forma de la función de transferencia de lazo cerrado es la siguiente:

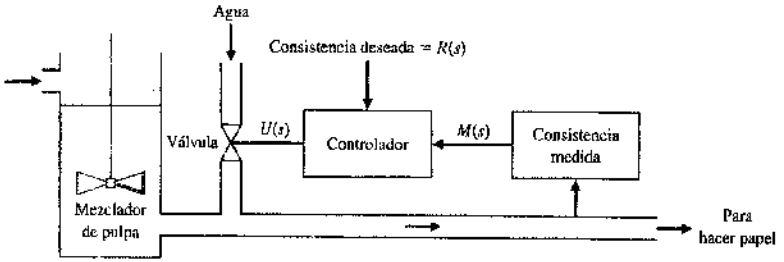
$$T(s) = \frac{G_1(s) + kG_2(s)}{G_3(s) + kG_4(s)}.$$

(a) Utilícese la Ecuación (4.16) para demostrar que [1]

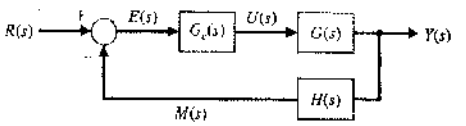
$$S_k^T = \frac{k(G_2G_3 - G_1G_4)}{(G_3 + kG_4)(G_1 + kG_2)}.$$

(b) Determínese la sensibilidad del sistema que se muestra en la Figura P4.13 empleando la ecuación que se verificó en el apartado (a).

P4.14. Un avión hipersónico propuesto podría subir a 100 000 pies, volar a 3800 mph y cruzar el Pacífico en 2 horas. El control de la velocidad del avión podría representarse por el modelo de la Figura P4.14. Calcúlese la sensibilidad de la función de transferencia en lazo cerrado, $T(s)$, para pequeños cambios en el parámetro a.

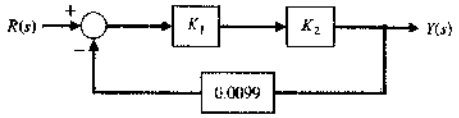


(a)

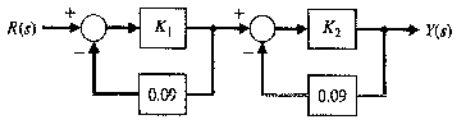


(b)

FIGURA P4.11
Control de la manufactura del papel.



(a)



(b)

FIGURA P4.12
Dos sistemas realimentados.

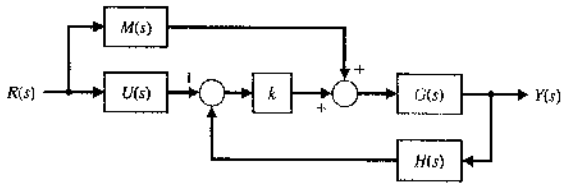


FIGURA P4.13
Sistema en lazo cerrado.

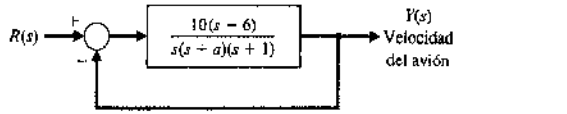


FIGURA P4.14
Control de velocidad de un avión hipersónico.

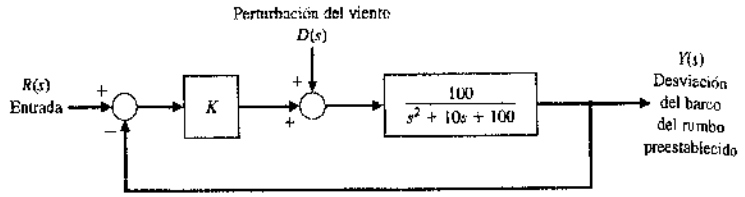


FIGURA P4.15
Control de posición de un barco.

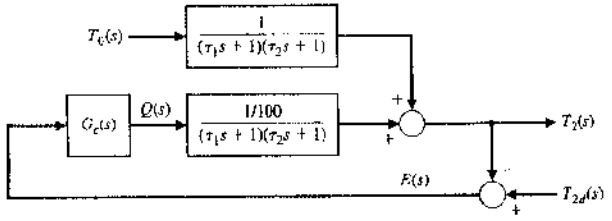


FIGURA P4.16
Control de temperatura de dos depósitos.

P4.15. El control de dirección de un barco moderno se puede representar por el sistema que se muestra en la Figura P4.15 [16, 20]. Calcúlese el efecto, en estado estacionario, de una fuerza de viento constante representada por $D(s) = 1/s$ para $K = 5$ y $K = 25$. (a) Supóngase que la entrada del timón, $R(s)$, es cero sin ninguna perturbación y no ha sido ajustada. (b) Demuéstrese que se puede utilizar el timón para llevar la desviación del barco otra vez a cero.

P4.16. La Figura P4.16 muestra el modelo de un sistema de dos depósitos que contienen un líquido caliente, donde T_0 es la temperatura del fluido que entra en el primer depósito y T_2 es la temperatura del líquido que sale del segundo depósito. El sistema de los dos depósitos tiene un calentador en el primer depósito con una entrada caliente controlable Q. Las constantes de tiempo son $\tau_1 = 10$ s y $\tau_2 = 50$ s. (a) Determínese $T_2(s)$ en términos de $T_0(s)$ y $T_{2d}(s)$. (b) Si $T_{2d}(s)$, la temperatura de salida deseada, cambia instantáneamente de $T_{2d}(s) = A/s$ a $T_{2d}(s) = 2A/s$, donde $T_0(s) = A/s$, determínese la respuesta transitoria de $T_2(t)$ cuando $G_c(s) = K = 500$. (c) Calcúlese el error en estado estacionario, e_{ss}, para el sistema del apartado (b), donde $E(s) = T_{2d}(s) - T_2(s)$.

P4.17. Una pinza de robot, que se muestra en la parte (a) de la Figura P4.17, se controla de tal forma que se cierra un ángulo θ utilizando un sistema de control de motor de cc como se muestra en la parte (b). El modelo del sistema de control se muestra en la parte (c), donde $K_m = 30$, $R_f = 1\ \Omega$, $K_f = K_i = 1$, $J = 0.1$ y $b = 1$. (a) Determínese la respuesta $\theta(t)$ del sistema para un cambio de escalón en $\theta_d(t)$ cuando $K = 20$. (b) Suponiendo que $\theta_d(t) = 0$, calcúlese el efecto de una perturbación en la carga $T_d(s) = A/s$. (c) Determínese el error en estado estacionario, e_{ss}, cuando la entrada es $r(t) = t$, $t > 0$. (Supóngase que $T_d = 0$).

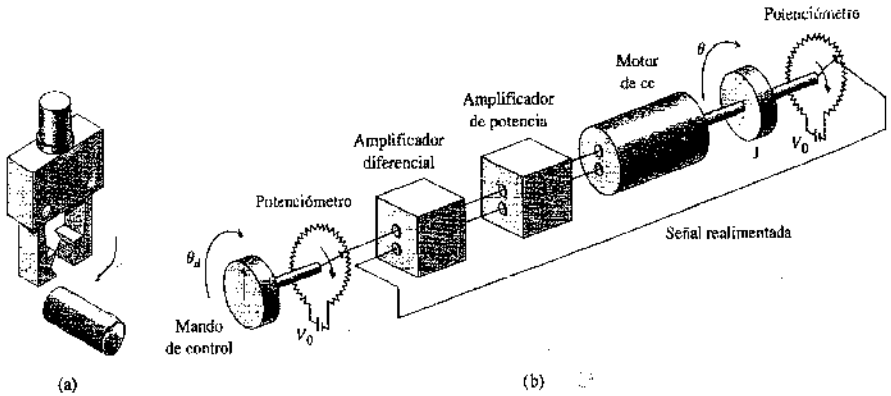


FIGURA P4.17. Control de una pinza de robot.

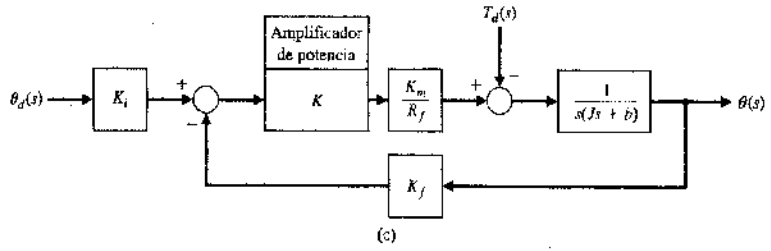


FIGURA P4.17. Continuación.

PROBLEMAS AVANZADOS

PA4.1. La Figura PA4.1(a) muestra el control regulador del nivel de un depósito. Se desea regular el nivel h, en respuestas a un cambio de perturbación q_3. El diagrama de bloques muestra pequeños cambios de las variables respecto de las condiciones de equilibrio tal que $h_d(t) = 0$. Determínese la ecuación para el error $E(s)$ y el error en estado estacionario para una perturbación de escalón unitario cuando (a) $G(s) = K$ y (b) $G(s) = K/s$.

PA4.2. La unión del hombro de un brazo robótico utiliza un motor de cc con control por inducido y un conjunto de engranajes sobre el eje de salida. La Figura PA4.2 muestra el modelo del sistema con un par de perturbación, $D(s)$, que representa el efecto de la carga. Determínese el error en estado estacionario cuando la entrada del ángulo deseado es un escalón tal que $\theta_d(s) = A/s$, $G_c(s) = K$ y la entrada de perturbación es cero. Cuando $\theta_d(s) = 0$ y el efecto de la carga es $D(s) = M/s$, determínese el error en estado estacionario cuando (a) $G_c(s) = K$ y (b) $G_c(s) = K/s$.

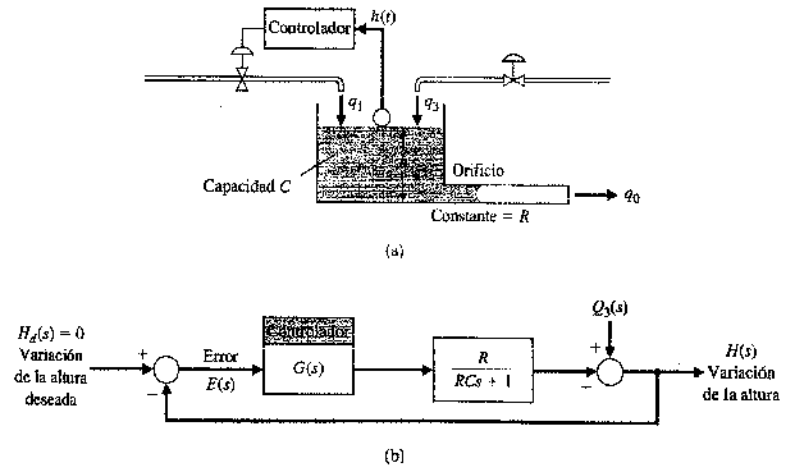


FIGURA PA4.1. Regulador del nivel de un depósito.

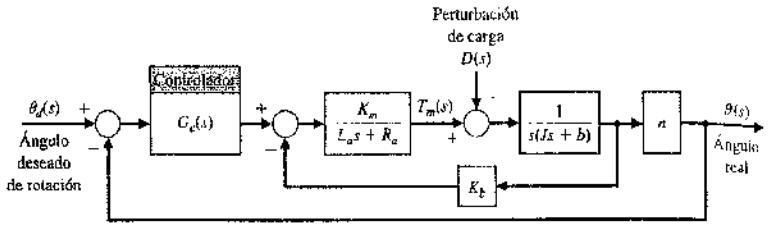


FIGURA PA4.2
Control de la unión de un robot.

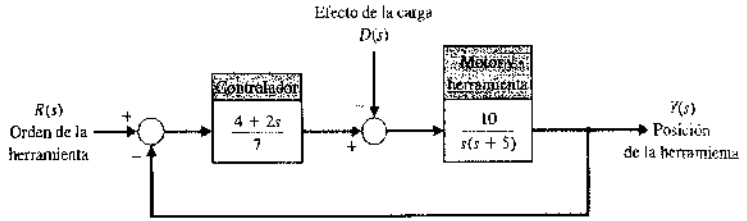


FIGURA PA4.3
Realimentación de la herramienta de una máquina.

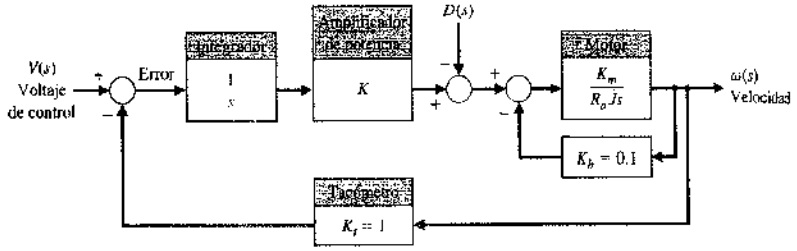


FIGURA PA4.4
Motor de cc con realimentación.

PA4.3. La herramienta de una máquina se diseña para que siga una trayectoria deseada tal que

$$r(t) = (1 - t)u(t).$$

donde $u(t)$ es la función de escalón unitario. La Figura PA4.3 muestra el sistema de control de la herramienta de la máquina.

(a) Determínese el error en estado estacionario cuando $r(t)$ es la trayectoria deseada como la dada y $D(s) = 0$.
(b) Dibújese el error $e(t)$ para la trayectoria descada del apartado (a) para $0 < t \leqslant 10$ segundos.
(c) Si la entrada deseada es $r(t) = 0$, calcúlese el error en estado estacionario cuando $D(s) = 1/s$.
(d) Dibújese el error $e(t)$ para el apartado (c) para $0 < t \leqslant 10$ segundos.

PA4.4. La Figura PA4.4 muestra un motor de cc controlado por inducido con realimentación tacométrica. Supóngase que $K_m = 10$, $J = 1$ y $K = 1$.

(a) Determínese la ganancia requerida, K, para restringir el error en estado estacionario para una entrada de rampa [$r(t) = t$ para $t > 0$] a 0.1 [supóngase que $D(s) = 0$].
(b) Para la ganancia seleccionada en el apartado (a), determínese y dibújese el error $e(t)$, debido a una perturbación de rampa tal que $d(t) = t$, $0 \leqslant t \leqslant 5$ segundos.

PA4.5. Un sistema que controla la presión media arterial durante la anestesia ha sido diseñado y probado [12]. Se postula que el nivel de la presión arterial mantiene una relación con la profundidad de la anestesia durante una operación quirúrgica. La Figura PA4.5 muestra un diagrama de bloques del sistema, donde la acción de la cirugía se representa por la perturbación $D(s)$.

(a) Determínese el error en estado estacionario debido a la perturbación $D(s) = 1/s$ [sea $R(s) = 0$].
(b) Determínese el error en estado estacionario para una entrada de rampa $r(t) = t$, $t > 0$ [sea $D(s) = 0$].
(c) Selecciónese un valor adecuado de K menor o igual a 10, y dibújese la respuesta $y(t)$ para una entrada de perturbación de escalón unitario [supóngase que $r(t) = 0$].

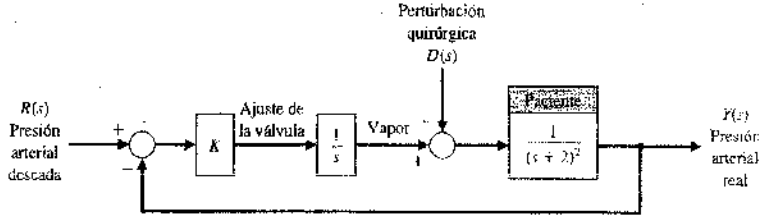


FIGURA PA4.5
Control de la presión arterial.

PA4.6. Un circuito útil, denominado red de adelanto, el cual se utiliza en el Capítulo 10, se muestra en la Figura PA4.6.

(a) Determínese la función de transferencia $G(s) = V_0(s)/V(s)$.
(b) Determínese la sensibilidad de $G(s)$ con respecto a la capacitancia C.
(c) Determínese y dibújese la respuesta transitoria, $v_0(t)$, para una entrada de escalón, $V(s) = 1/s$.

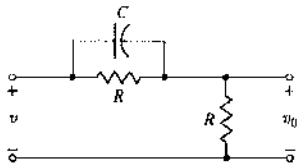


FIGURA PA4.6
Red de adelanto.

PA4.7. La Figura PA4.7 muestra un sistema de control realimentado con un sensor de ruido y una entrada de perturbación. El objetivo es reducir los efectos del ruido y de la perturbación. Sea $R(s) = 0$.

(a) Determínese el efecto de la perturbación sobre $Y(s)$.
(b) Determínese el efecto del ruido sobre $Y(s)$.
(c) Selecciónese el mejor valor para K cuando $1 \leqslant K \leqslant 100$ tal que el efecto del error en estado estacionario debido a la perturbación y el ruido sea mínimo. Supóngase que $D(s) = A/s$ y $N(s) = B/s$.

PA4.8. La Figura PA4.8 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control para la herramienta de una máquina.

(a) Determínese la función de transferencia $T(s) = Y(s)/R(s)$.
(b) Determínese la sensibilidad S_b^T.
(c) Selecciónese K cuando $1 \leqslant K \leqslant 50$ para que los efectos de la perturbación y S_b^T sean mínimos.

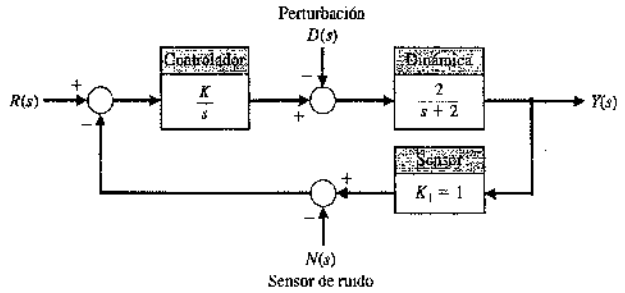


FIGURA PA4.7
Sistema realimentado con ruido.

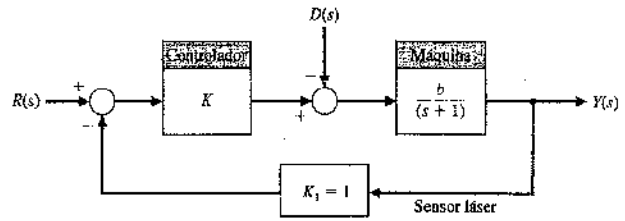


FIGURA PA4.8
Control de la herramienta de una máquina.

PROBLEMAS DE DISEÑO

PDC4.1. En PDC2.1 se describió un motor de arrastre para una mesa deslizante. La posición del pasador, x, se mide con un indicador de capacidad, como se muestra en la Figura PDC4.1, el cual es muy lineal y preciso. Dibújese el modelo del sistema realimentado y determínese la respuesta del mismo cuando el controlador es un amplificador y $H(s) = 1$. Determínese la respuesta a un escalón para varios valores seleccionados de la ganancia del amplificador, $G_c(s) = K_c$.

PD4.1. La Figura PD4.1 muestra un sistema de control de velocidad de lazo cerrado sujeto a una perturbación debida a la carga. La velocidad deseada es $\omega_d(t) = 100$ rad/s y la perturbación de carga es una entrada de escalón unitario, $D(s) = 1/s$. Supóngase que la velocidad ha alcanzado una velocidad sin carga de 100 rad/s y está en estado estacionario. (a) Determínese el efecto de la perturbación de carga en estado estacionario, y (b) dibújese $\omega(t)$ para una perturbación de escalón para valores seleccionados de ganancia tal que $10 \leqslant K \leqslant 25$. Determínese un valor adecuado para la ganancia K.

PD4.2. El control del ángulo de balanceo de un avión se logra utilizando un par desarrollado por alerones. La Figura PD4.2 muestra un modelo lineal del sistema de control de balanceo para un avión experimental pequeño, donde $q(t)$ es el flujo de fluido dentro del cilindro hidraúlico y

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 9}.$$

El objetivo es mantener un ángulo de balanceo, θ, pequeño debido a perturbaciones. Selecciónese una ganancia apropiada, KK_1, que reduzca el efecto de la perturbación mientras se alcance una respuesta transitoria deseable a una perturbación de escalón, con $\theta_d(t) = 0$. Para obtener una respuesta transitoria deseable tómese $KK_1 < 35$.

PD4.3. El sistema de control de velocidad de la Figura PD4.1 se modifica de forma que $G(s) = 1/(s+5)$ y la realimentación es K_1, como se muestra en la Figura PD4.3.

(a) Determínese el intervalo de K_1 permisible para que el error en estado estacionario sea $e_{ss} \leqslant 1\%$.

(b) Determínese un valor adecuado para K_1 y K tal que la magnitud del error en estado estacionario a una perturbación de viento $d(t) = 2t$ mrad/s, $0 \leqslant t < 5$ s, sea menor que 0.1 mrad.

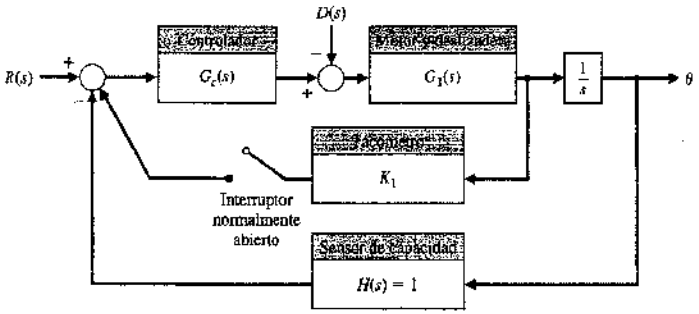


FIGURA PDC4.1
Modelo del sistema realimentado con un sensor de medida de capacidad. El tacómetro se puede montar en el motor (opcional), y el interruptor estará normalmente abierto.

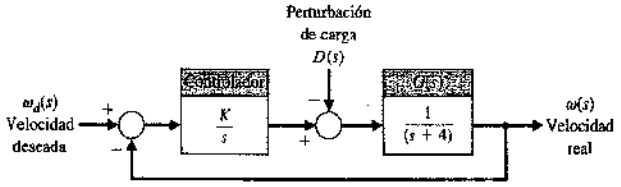


FIGURA PD4.1
Sistema de control de velocidad.

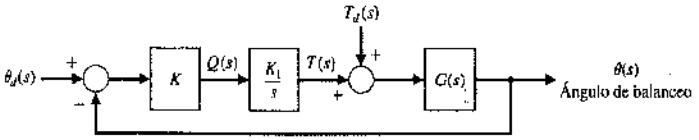


FIGURA PD4.2
Control del ángulo de balanceo de un avión.

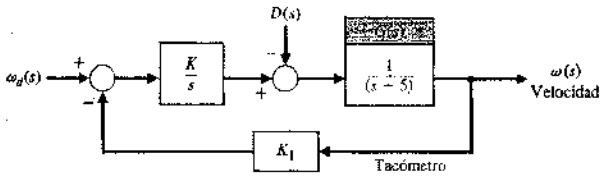
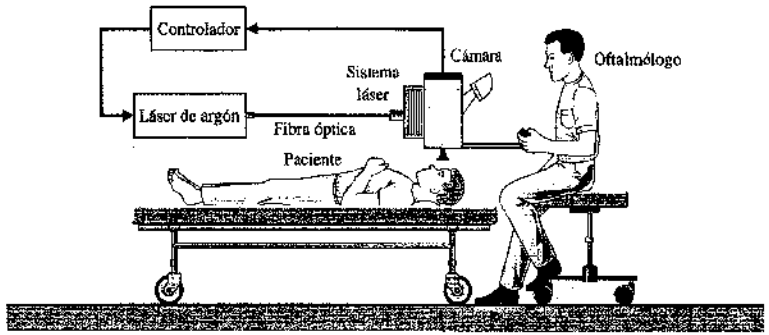


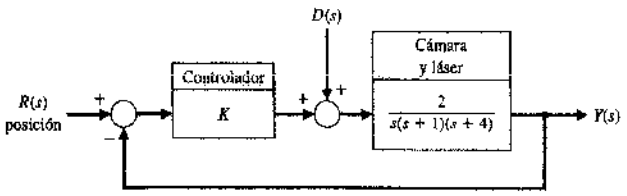
FIGURA PD4.3
Sistema de control de velocidad.

PD4.4. Los láseres se han utilizado para la cirugía de ojos durante más de 25 años. Pueden cortar tejidos o ayudar en la coagulación [17]. El láser permite al oftalmólogo aplicar calor a una parte del ojo de forma controlada. Muchos procedimientos utilizan la retina como un blanco del láser. La retina es el tejido sensorial delgado que descansa sobre la superficie interna de detrás del ojo y es el transductor real del ojo, que convierte la energía luminosa en pulsos eléctricos. A veces esta capa se separa de la pared, lo que provoca la muerte de la zona separada por falta de sangre y conduce a una ceguera parcial o total en ese ojo. Un láser se puede utilizar para «soldar» la retina dentro de su propio lugar sobre la pared interna.

El control automatizado de posición permite al oftalmólogo indicar al controlador dónde deberían ser introducidas las lesiones. Entonces, el controlador monitoriza la retina y controla la posición del láser de tal forma que cada lesión se sitúa en su propia localización. Para monitorizar el movimiento de la retina se necesita un sistema de cámara y vídeo de ángulo amplio, tal como se muestra en la Figura PD4.4(a). Si el ojo se mueve durante la irradiación, el láser debe redireccionarse o retirarse. La Figura PD4.4(b) muestra el sistema de control de posición. Selecciónese una ganancia adecuada para el controlador tal que la respuesta transitoria para un cambio de escalón en $r(t)$ sea satisfactoria y el efecto de la perturbación debido al ruido en el sistema sea mínimo. Además, asegúrese de que el error en estado estacionario para una orden de entrada de escalón es cero. Para asegurar una respuesta transitoria aceptable se requiere que $K < 10$.



(a)



(b)

FIGURA PD4.4
Sistema de cirugía láser para ojos.

PD4.5. Un circuito amplificador operacional puede utilizarse para generar un pulso corto. La Figura PD4.5 muestra el circuito que puede generar el pulso $v_0(t) = 5e^{-100t}$, $t > 0$, cuando la entrada $v(t)$ es un escalón unitario [6]. Selecciónense los valores adecuados para las resistencias y el condensador. Supóngase un amplificador operacional ideal.

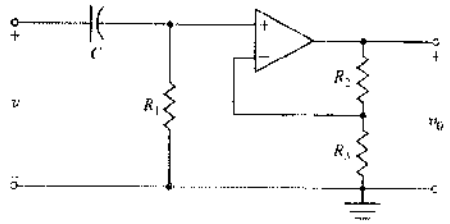
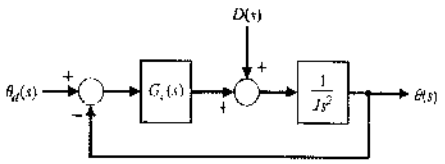


FIGURA PD4.5. Circuito amplificador operacional.

PD4.6. Se considera un robot acuático para exploración remota debajo del hielo de Europa, una luna del planeta gigante Júpiter. La Figura PD4.6(a) muestra una versión artística de la misión. El robot acuático es un vehículo submarino autopropulsado que analizaría la composición química del agua en búsqueda de señales de vida. Un aspecto importante del vehículo es el descenso vertical controlado a profundidades en presencia de corrientes submarinas. La Figura PD4.6(b) muestra un sistema realimentado de control simplificado. El parámetro $J > 0$ es el momento de inercia de cabeceo. (a) Supóngase que $G_c(s) = K$. ¿Para qué intervalo de K el sistema es estable? (b) ¿Cuál es el error en estado estacionario para una perturbación de escalón unitario cuando $G_c(s) = K$? (c) Supóngase que $G_c(s) = K_p + K_p s$. ¿Para qué intervalos de K_p y K_p el sistema es estable? (d) ¿Cuál es el error en estado estacionario para una perturbación de escalón unitario cuando $G_c(s) = K_p + K_p s$?

(a)



(b)

FIGURA PD4.6. (a) Exploración de Europa bajo el hielo. (Utilizado con permiso. Cedido: NASA.) (b) Sistema realimentado.

PROBLEMAS CON MATLAB

PM4.1. Considérese la función de transferencia (sin realimentación):

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 25}.$$

Cuando la entrada es un escalón unitario, el valor deseado del estado estacionario de la salida es uno. Utilizando la función step de MATLAB, demuéstrese que el error en estado estacionario a una entrada de escalón unitario es 0.8.

PM4.2. Considérese un sistema de realimentación unitaria con

$$G(s) = \frac{75}{s^2 + 10}.$$

Obténgase la respuesta a un escalón con MATLAB y determínese el porcentaje de sobreelongación. ¿Cuál es el error en estado estacionario?

PM4.3. Considérese la función de transfetencia en lazo cerrado

$$T(s) = \frac{10K}{s^2 + 20s + K}.$$

Obténgase la familia de respuestas a escalones para $K = 10$, 100 y 500. Dibújense conjuntamente las respuestas y elabórese una tabla de resultados que incluya el porcentaje de sobreelongación, el tiempo de asentamiento y el error en estado estacionario.

FIGURA PMP4.4 Sistema de control con realimentación negativa en lazo cerrado.

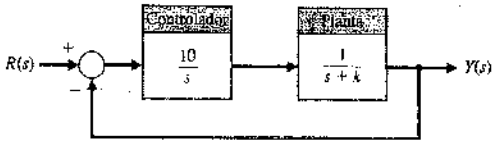
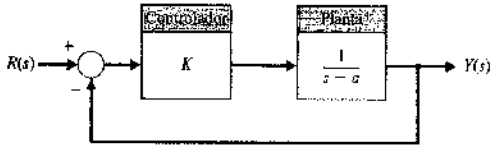


FIGURA PMP4.5 Sistema de control en lazo cerrado con incertidumbre en el parámetro a.



PM4.4. Considérese el sistema de control en lazo cerrado que se muestra en la Figura PM4.4. Desarrolle un programa en MATLAB que ayude a buscar un valor de k tal que el porcentaje de sobreelongación para una entrada de escalón unitario sea mayor que el 1% pero menor que el 10%. El programa debería calcular la función de transferencia de lazo cerrado, $T(s) = Y(s)/R(s)$, y generar la respuesta a un escalón. Verifíquese gráficamente que el error en estado estacionario para una entrada de escalón unitario es cero.

PM4.5. Considérese el sistema de control en lazo cerrado que se muestra en la Figura PM4.5. La ganancia del controlador es $K = 2$. El valor nominal del parámetro de la planta es $a = 1$. El valor nominal se utiliza únicamente a efectos de diseño, ya que en realidad el valor no se conoce exactamente. El objetivo del análisis es analizar la sensibilidad del sistema en lazo cerrado para el parámetro a.

(a) Para $a = 1$, demuéstrese analíticamente que el valor de $y(t)$ en estado estacionario es igual a 2 cuando $r(t)$ es un escalón unitario. Verifíquese que la respuesta a un escalón unitario está dentro del 2% del valor final después de 4 segundos.

(b) La sensibilidad del sistema para cambios en el parámetro a se puede analizar estudiando los efectos de los cambios del parámetro sobre la respuesta transitoria. Dibújese la respuesta a un escalón unitario para $a = 0.5$, 2 y 5. Analícense los resultados.

PM4.6. Considérese el sistema mecánico de torsión de la Figura 4.6(a). El par debido a la torsión del eje es $-k\theta$; el par de amortiguamiento debido al dispositivo de freno es $-b\dot{\theta}$; el par de perturbación es $d(t)$; el par de entrada es $r(t)$; y el momento de inercia del sistema mecánico es J. La función de transferencia del sistema mecánico de torsión es

$$G(s) = \frac{1/J}{s^2 + (b/J)s + k/J}.$$

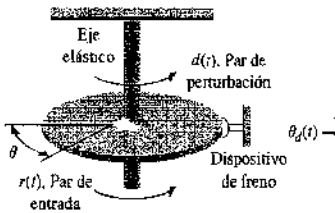
La Figura 4.6(b) muestra un sistema de control en lazo cerrado. Supóngase que el ángulo deseado $\theta_d = 0°$, $k = 5$, $b = 0.9$ y $J = 1$.

(a) Determínese la respuesta en lazo abierto del sistema, $\theta(t)$, para una perturbación de salto unitario, $d(t)$, utilizando MATLAB [sea $r(t) = 0$].

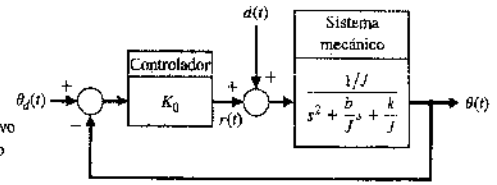
(b) Con la ganancia del controlador $K_0 = 50$, determínese la respuesta en lazo cerrado, $\theta(t)$, para una perturbación de salto unitario, $d(t)$, utilizando MATLAB.

(c) Dibújese conjuntamente la respuesta de lazo abierto y la respuesta en lazo cerrado para una entrada de perturbación. Analícense los resultados y realícese un argumento para utilizar control realimentado en lazo cerrado a fin de mejorar las propiedades de rechazo a perturbaciones del sistema.

FIGURA PMP4.6
(a) Sistema mecánico de torsión.
(b) Sistema de control realimentado del sistema mecánico de torsión.



(a)



(b)

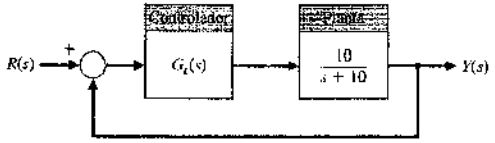


FIGURA PM4.7
Sistema de control realimentado con un lazo simple.

PM4.7. La Figura PM4.7 describe un sistema de control con realimentación negativa. Supóngase que el objetivo de diseño es encontrar un controlador, $G_c(s)$, de complejidad mínima para que el sistema en lazo cerrado pueda seguir a una entrada de escalón unitario con error en estado estacionario cero.

(a) Inicialmente, considérese un controlador proporcional simple

$$G_c(s) = K.$$

donde K es una ganancia fija. Sea $K = 2$. Utilizando MATLAB, dibújese la respuesta a un escalón unitario y determínese en la gráfica el error en estado estacionario.

(b) Ahora considérese un controlador más complejo

$$G_c(s) = K_0 + \frac{K_1}{s},$$

donde $K_0 = 2$ y $K_1 = 20$. Este controlador se conoce como controlador proporcional integral (PI). Dibújese la respuesta a un escalón unitario y determínese en la gráfica el error en estado estacionario.

(c) Compárense los resultados de los apartados (a) y (b) y analícese el compromiso entre la complejidad del controlador y el comportamiento del error de seguimiento en estado estacionario.

PM4.8. Considérese el sistema en lazo cerrado de la Figura PM4.8, cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{10s}{s + 100} \quad y \quad H(s) = \frac{5}{s + 50}$$

(a) Obténgase la función de transferencia en lazo cerrado $T(s) = Y(s)/R(s)$ y la respuesta a un escalón unitario; es decir, sea $R(s) = 1/s$ y supóngase que $N(s) = 0$.

(b) Utilizando MATLAB, obténgase la respuesta a perturbación cuando

$$N(s) = \frac{10}{s^2 + 100}$$

es una entrada sinusoidal de frecuencia $\omega = 10$ rad/s. Supóngase que $R(s) = 0$.

(c) En el estado estacionario, ¿cuál es la frecuencia y la magnitud de pico de la respuesta a perturbación del apartado (b)?

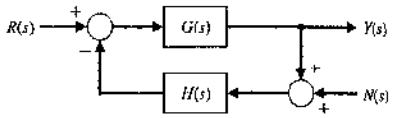


FIGURA PM4.8. Sistema de lazo cerrado con realimentación no unitaria y ruido en la medida.

TÉRMINOS Y CONCEPTOS

Complejidad. Medida de la estructura, complicación, o comportamiento de un sistema que caracteriza las relaciones e interacciones entre varios componentes.

Componentes. Partes, subsistemas o subconjuntos que forman el sistema total.

Error en estado estacionario. Error cuando el periodo de muestreo es grande y la respuesta transitoria ha decaído, quedando la respuesta continua.

Inestabilidad. Atributo de un sistema que describe una tendencia del sistema a separarse de la condición de equilibrio cuando se desplaza inicialmente.

Pérdida de ganancia. Reducción en la amplitud de la razón de la señal de salida a la señal de entrada a través del sistema, usualmente medida en decibelios.

Respuesta transitoria. Respuesta de un sistema como una función del tiempo.

Sensibilidad del sistema. Razón del cambio en la función de transferencia del sistema al cambio de una función de transferencia (o parámetro) del proceso para un cambio incremental pequeño.

Señal de error. Diferencia entre la salida deseada, $R(s)$, y la salida real, $Y(s)$. Por tanto, $E(s) = R(s) - Y(s)$.

Señal de perturbación. Señal de entrada no deseada que afecta a la señal de salida del sistema.

Sistema directo. *Véase* Sistema en lazo abierto.

Sistema en lazo abierto. Sistema sin realimentación que genera directamente la salida en respuesta a una señal de entrada.

Sistema en lazo cerrado. Sistema con una medida de la señal de salida y una comparación con la salida deseada para generar una señal de error que se aplica al actuador.

CAPÍTULO 5

Comportamiento de los sistemas de control con realimentación

5.1. Introducción 244
5.2. Señales de entrada de prueba 245
5.3. Comportamiento de un sistema de segundo orden 247
5.4. Efectos de un tercer polo y un cero sobre la respuesta de un sistema de segundo orden 253
5.5. Estimación de la razón de amortiguamiento 258
5.6. Localización de las raíces en el plano *s* y respuesta transitoria 259
5.7. El error en estado estacionario de los sistemas de control con realimentación 260
5.8. El error en estado estacionario de los sistemas con realimentación no unitaria 265
5.9. Índices de comportamiento 267
5.10. Simplificación de sistemas lineales 276
5.11. Ejemplo de diseño: Control de apuntamiento del telescopio Hubble 279
5.12. Comportamiento de sistemas utilizando MATLAB y Simulink 282
5.13. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 291
5.14. Resumen 295

SINOPSIS

La capacidad para ajustar la respuesta transitoria y de estado estacionario de un sistema de control realimentado es un resultado beneficioso del diseño de sistemas de control. Uno de los primeros pasos en el proceso de diseño es especificar las medidas del comportamiento. En este capítulo, se introducen las especificaciones comunes en el dominio temporal, como el porcentaje de sobreelongación, el tiempo de asentamiento, el tiempo de pico, el tiempo de subida y el error de seguimiento en estado estacionario. Se utilizarán señales de entrada seleccionadas, como el escalón y la rampa, para poner a prueba la respuesta del sistema de control. Se estudia la correlación entre el comportamiento del sistema y la situación de los polos y ceros de la función de transferencia del sistema en el plano *s*. Se desarrollarán relaciones valiosas entre las especificaciones de comportamiento y la frecuencia natural y la razón de amortiguamiento para sistemas de segundo orden. Teniendo en cuenta la noción de polos dominantes, se pueden extrapolar las ideas asociadas con sistemas de segundo orden a aquellos de orden superior.

Se considerará el concepto de un índice de comportamiento que representa un comportamiento del sistema con un único número (o índice). Se presentarán un conjunto de medidas de comportamiento cuantitativas populares que representan adecuadamente el comportamiento del sistema de control. Este método permitirá ajustar el sistema para el comportamiento óptimo. El capítulo finaliza con un análisis del comportamiento del Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco.

5.1. INTRODUCCIÓN

La capacidad para ajustar el comportamiento transitorio y de estado estacionario es una clara ventaja de los sistemas de control con realimentación. Con el objeto de analizar y diseñar sistemas de control, se debe definir y medir el comportamiento de un sistema. Después, basándose en el comportamiento deseado de un sistema de control, deben ajustarse los parámetros del sistema con el objeto de proporcionar la respuesta deseada. Como los sistemas de control son intrínsecamente dinámicos, por lo general se especifica el comportamiento en términos de la respuesta transitoria y la respuesta en estado estacionario. La **respuesta transitoria** es la respuesta que desaparece con el tiempo. La **respuesta en estado estacionario** es la respuesta que existe durante mucho tiempo siguiendo a cualquier iniciación de señal de entrada.

Las **especificaciones de diseño** para los sistemas de control normalmente incluyen varios índices de respuesta en el tiempo para determinada orden de entrada, así como una precisión deseada en el estado estacionario. Sin embargo, en el curso de cualquier diseño a menudo se revisan las especificaciones con el objeto de efectuar algún ajuste. Por tanto, las especificaciones pocas veces constituyen un conjunto rígido de requisitos; más bien son un primer intento de proponer un comportamiento deseado. El compromiso y ajuste efectivo de las especificaciones puede ilustrarse gráficamente examinando la Figura 5.1. Es evidente que el parámetro p puede minimizar la medida del comportamiento M_2 escogiendo p como un valor muy pequeño. Sin embargo, esto produce una gran magnitud de M_1, lo cual es una situación no deseable. Está claro que si las mediciones del comportamiento son igualmente importantes, el punto de cruce en $p_{\min}$ proporciona el mejor compromiso. Este tipo de compromiso suele encontrarse en el diseño de los sistemas de control. Es evidente que si las especificaciones originales M_1 y M_2 son cero, dichas especificaciones no pueden cumplirse simultáneamente y deberán modificarse de forma que se considere el compromiso resultante con $p_{\min}$ [1, 12, 17, 23].

Las especificaciones establecidas en función de las medidas del comportamiento indican al diseñador la calidad del sistema. En otras palabras, tales medidas son una respuesta a la pregunta: ¿Cómo cumple el sistema la tarea para la que fue diseñado?

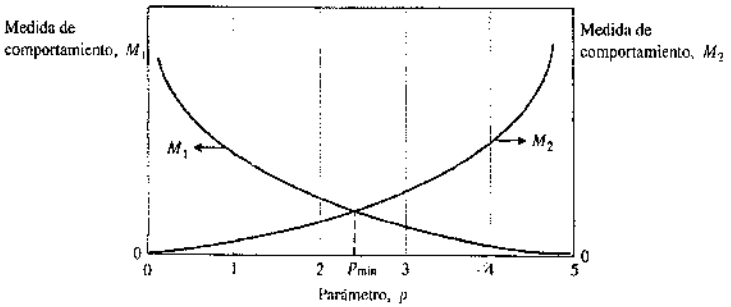


FIGURA 5.1
Dos medidas de comportamiento con respecto al parámetro p.

5.2. SEÑALES DE ENTRADA DE PRUEBA

Las especificaciones del comportamiento en el dominio del tiempo son índices importantes, pues los sistemas de control son inherentemente sistemas en el dominio del tiempo. Es decir, el estado transitorio del sistema o el comportamiento con respecto al tiempo es la respuesta de principal interés para los sistemas de control. Es necesario determinar inicialmente si el sistema es estable, utilizando para ello las técnicas de los capítulos siguientes. Si el sistema es estable, entonces la respuesta a una señal específica de entrada proporcionará varias medidas del comportamiento. Sin embargo, como suele desconocerse la señal real de entrada del sistema, normalmente se escoge una señal estándar como **entrada de prueba**. Este enfoque es verdaderamente útil pues existe una correlación razonable entre la respuesta de un sistema a una entrada estándar de prueba y la capacidad del sistema para funcionar en condiciones de operación normal. Además, la utilización de una señal estándar permite al diseñador comparar diferentes diseños. Así mismo, muchos sistemas de control experimentan señales de entrada muy semejantes a las estándar de prueba.

Las señales estándar de entrada de prueba utilizadas con mayor frecuencia son la de escalón, la de rampa y la parabólica. La Figura 5.2 muestra estas señales de entrada. En la Tabla 5.1 se proporcionan las ecuaciones que representan estas señales de entrada; la transformada de Laplace puede obtenerse usando la Tabla 2.3. La señal de rampa es la integral de la entrada de escalón y la parábola es simplemente la integral de la rampa. Además, a efectos de señal de prueba, es útil una función de **impulso unitario**. El impulso unitario se basa en una función rectangular tal que

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & -\dfrac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \dfrac{\varepsilon}{2}; \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

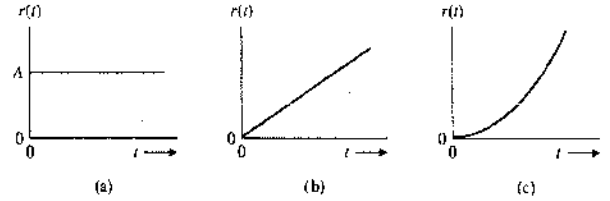
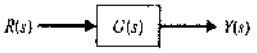


FIGURA 5.2
Señales de entrada de prueba: (a) escalón, (b) rampa y (c) parabólica.

Tabla 5.1 Señales de entrada de prueba

Señal de prueba	$r(t)$	$R(s)$
Escalón	$r(t) = A,\ t > 0$ $= 0,\ t < 0$	$R(s) = A/s$
Rampa	$r(t) = At,\ t > 0$ $= 0,\ t < 0$	$R(s) = A/s^2$
Parabólica	$r(t) = At^2,\ t > 0$ $= 0,\ t < 0$	$R(s) = 2A/s^3$

FIGURA 5.3
Sistema de control directo (lazo abierto) (sin realimentación).



donde $\varepsilon > 0$. A medida que ε se aproxima a cero, la función $f_\varepsilon(t)$ se aproxima a la función de impulso $\delta(t)$, la cual tiene las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)g(t)\,dt = g(a). \tag{5.1}$$

La entrada de impulso es útil cuando se considera la integral de convolución para la salida $y(t)$ en términos de una entrada $r(t)$, la cual se escribe como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)r(\tau)\,d\tau = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)R(s)\}. \tag{5.2}$$

La Figura 5.3 muestra esta relación en forma de diagrama de bloques. Evidentemente, si la entrada es una función de impulso de amplitud unitaria, se tiene

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\delta(\tau)\,d\tau. \tag{5.3}$$

La integral sólo tiene un valor en $\tau = 0$ y, por tanto,

$$y(t) = g(t),$$

la respuesta del sistema $G(s)$ al impulso. La señal de prueba de respuesta al impulso puede, a menudo, usarse para un sistema dinámico, sometiéndolo a un pulso de área A, estrecho y de gran amplitud.

Las señales estándar de prueba tienen la forma general

$$r(t) = t^n, \tag{5.4}$$

y la transformada de Laplace es

$$R(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}. \tag{5.5}$$

Es evidente que se puede relacionar la respuesta para una señal de prueba con la respuesta de otra señal de prueba de la forma de la Ecuación (5.4). La señal de entrada de escalón es la más fácil de generar y calcular, por lo que a menudo se escoge para pruebas de comportamiento.

Considérese la respuesta del sistema que se muestra en la Figura 5.3 para una entrada de escalón unitario cuando

$$G(s) = \frac{9}{(s+10)}.$$

Entonces la salida es

$$Y(s) = \frac{9}{s(s+10)},$$

la respuesta durante el periodo transitorio es

$$y(t) = 0.9(1 - e^{-10t}),$$

y la respuesta en el estado estacionario es

$$y(\infty) = 0.9.$$

Si el error es $E(s) = R(s) - Y(s)$, entonces el error en estado estacionario es

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = 0.1.$$

5.3. COMPORTAMIENTO DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Considérese un sistema de segundo orden de lazo simple y determínese su respuesta a una entrada de escalón unitario. En la Figura 5.4 se muestra un sistema de control de lazo cerrado con realimentación. La salida del lazo cerrado es

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}R(s) = \frac{K}{s^2 + ps + K}R(s). \tag{5.6}$$

Utilizando la notación general de la Sección 2.4, se puede escribir ahora la Ecuación (5.6) como

$$\boxed{Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}R(s).} \tag{5.7}$$

Con una entrada de escalón unitario, se obtiene

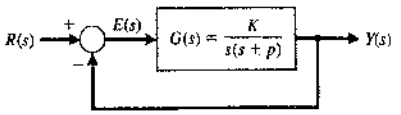
$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, \tag{5.8}$$

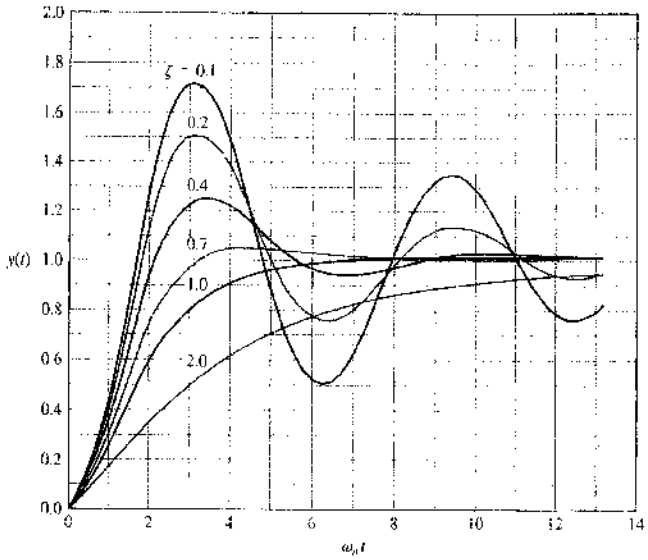
para la cual la salida transitoria, obtenida según la tabla de transformadas de Laplace de la Tabla 2.3, es

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_n\beta t + \theta), \tag{5.9}$$

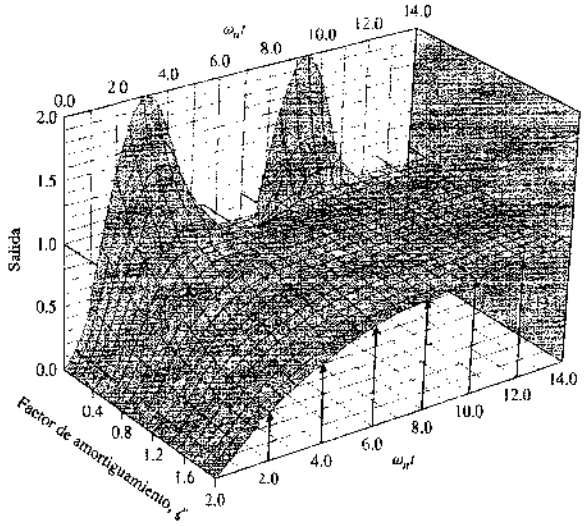
donde $\beta = \sqrt{1-\zeta^2}$, $\theta = \cos^{-1}\zeta$ y $0 < \zeta < 1$. La Figura 5.5 muestra la respuesta transitoria de este sistema de segundo orden para diferentes valores de la razón de amortiguamiento ζ. A medida que ζ disminuye, las raíces del lazo cerrado tienden al eje imaginario y la respuesta se vuelve cada vez más oscilatoria. En la Figura 5.5(b) también se muestra la respuesta como una función de ζ y del tiempo para una entrada de escalón.

FIGURA 5.4
Sistema de control de lazo cerrado (con realimentación).





(a)



(b)

FIGURA 5.5
(a) Respuesta transitoria de un sistema de segundo orden (Ecuación 5.9) para una entrada de escalón.
(b) Respuesta transitoria de un sistema de segundo orden (Ecuación 5.9) para una entrada de escalón como una función de ζ y $\omega_n t$. (Cortesía del profesor R. Jacquot, Universidad de Wyoming.)

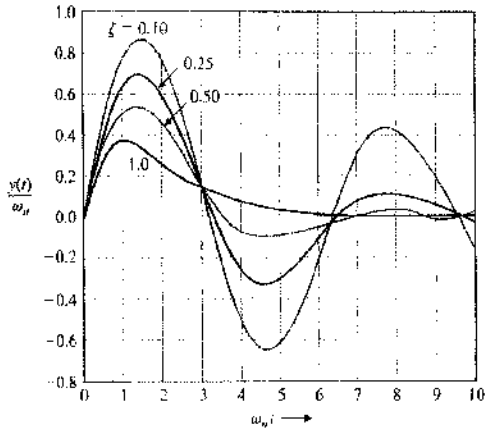


FIGURA 5.6
Respuesta de un sistema de segundo orden para una función de impulso de entrada.

La transformada de Laplace del impulso unitario es $R(s) = 1$ y, por tanto, la salida para un impulso es

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{5.10}$$

la cual es $T(s) = Y(s)/R(s)$, la función de transferencia del sistema de lazo cerrado. La respuesta transitoria para una función de impulso de entrada es entonces

$$y(t) = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n \beta t, \tag{5.11}$$

que es simplemente la derivada de la respuesta a una entrada de escalón. En la Figura 5.6 se muestra la respuesta al impulso de un sistema de segundo orden para varios valores de la razón de amortiguamiento, ζ. El diseñador es capaz de seleccionar varias medidas alternativas de comportamiento a partir de la respuesta transitoria del sistema para una entrada de escalón o de impulso.

Las medidas estándar de comportamiento generalmente se definen en términos de la respuesta de escalón de un sistema, como se muestra en la Figura 5.7. La rapidez de la respuesta se mide por el **tiempo de subida**, T_r, y el **tiempo de pico**, T_p. Para sistemas subamortiguados con sobreelongación, el tiempo de subida 0-100% es un índice útil. Si el sistema es sobreamortiguado, entonces el tiempo de pico no está definido y se usa normalmente el tiempo de subida 10-90%, T_{r_1}. La semejanza con que la respuesta real iguala a la entrada de escalón se mide mediante el porcentaje de sobreelongación y el tiempo de asentamiento T_s. El **porcentaje de sobrelongación** se define como

$$\text{P.O.} = \frac{M_{p_t} - fv}{fv} \times 100\% \tag{5.12}$$

para una entrada de escalón unitario, donde M_{p_t} es el valor pico de la respuesta del tiempo y fv es el valor final de la respuesta. Normalmente, fv es la magnitud de la entrada, pero muchos sistemas tienen un valor final significativamente diferente a la magnitud de la entrada deseada. Para el sistema con escalón unitario representado en la Ecuación (5.8), se tiene $fv = 1$.

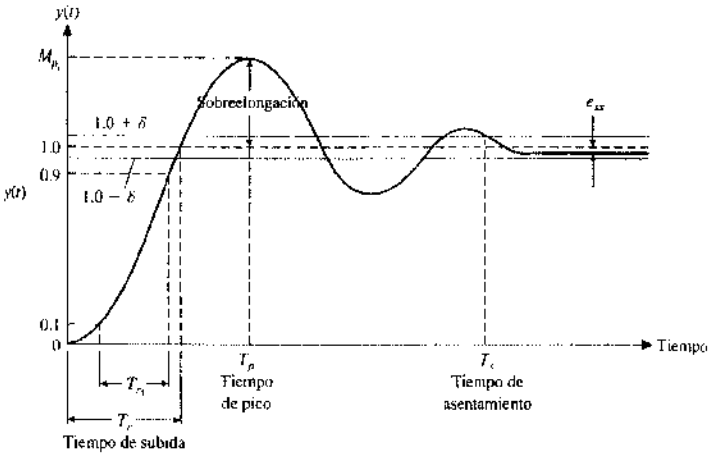


FIGURA 5.7
Respuesta a un escalón de un sistema de control (Ecuación 5.9).

El **tiempo de asentamiento**, T_s, se define como el tiempo necesario para que el sistema se estabilice dentro de cierto porcentaje, δ, de la amplitud de entrada. En la Figura 5.7 se muestra esta banda de $\pm\delta$. Para el sistema de segundo orden con una constante de amortiguamiento $\zeta\omega_n$ de lazo cerrado y una respuesta descrita por la Ecuación (5.9), se busca determinar el tiempo, T_s, para el cual la respuesta se mantiene dentro del 2% del valor final. Esto ocurre aproximadamente cuando

$$e^{-\zeta\omega_n T_s} < 0.02,$$

o

$$\zeta\omega_n T_s \cong 4.$$

Por lo tanto, se tiene

$$\boxed{T_s = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n}} \tag{5.13}$$

De este modo, se definirá el tiempo de asentamiento como cuatro constantes de tiempo (es decir, $\tau = 1/(\zeta\omega_n)$ de las raíces dominantes de la ecuación característica. El error del sistema en estado estacionario puede medirse en la respuesta de escalón del sistema, como se muestra en la Figura 5.7.

Por tanto, la respuesta transitoria del sistema puede describirse en función de dos factores:

1. La rapidez de la respuesta, representada por el tiempo de subida y el tiempo de pico.
2. La proximidad de la respuesta a los valores deseados, representada por la sobreelongación y el tiempo de asentamiento.

Como es natural, éstos son requisitos contradictorios y debe obtenerse un compromiso. Con objeto de obtener una relación explícita para M_{p_t} y T_p como función de ζ, se puede derivar la Ecuación (5.9) y hacerla igual a cero. Alternativamente, se puede utili-

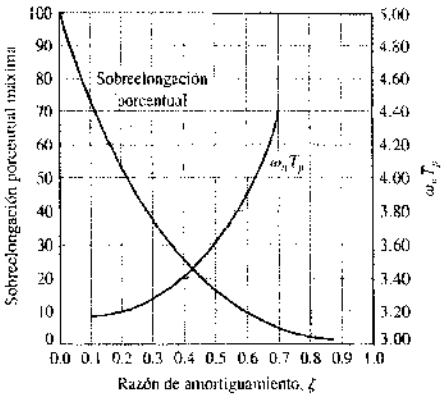


FIGURA 5.8
Sobreelongación porcentual y tiempo de pico normalizado contra la razón de amortiguamiento ζ para un sistema de segundo orden (Ecuación 5.8).

zar la propiedad de derivación de la transformada de Laplace, la cual se puede escribir como

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s)$$

cuando el valor inicial de $y(t)$ es cero. Por tanto, es posible obtener la derivada de $y(t)$ multiplicando la Ecuación (5.8) por s, y con esto se obtiene el lado derecho de la Ecuación (5.10). Tomando la transformada inversa del lado derecho de la Ecuación (5.10) se obtiene la ecuación (5.11), que es igual a cero cuando $\omega_n\beta t = \pi$. Por tanto, se tiene que la relación del tiempo de pico para este sistema de segundo orden es

$$\boxed{T_p = \frac{\tau}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{5.14}$$

y la respuesta pico es

$$M_{p_t} = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{5.15}$$

Por tanto, el porcentaje de sobreelongación es

$$\boxed{\text{P.O.} = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{5.16}$$

En la Figura 5.8 se muestra el porcentaje de sobreelongación contra la razón de amortiguamiento, ζ. Así mismo, en la Figura 5.8 se muestra el tiempo normalizado de pico, $\omega_n T_p$, contra la razón de amortiguamiento ζ. En la Tabla 5.2 se muestra el porcentaje de sobreelongación frente a la razón de amortiguamiento para distintos valores de la razón de amortiguamiento. De nuevo, uno se enfrenta con un compromiso necesario entre la rapidez de respuesta y la sobreelongación permisible.

Tabla 5.2 Porcentaje del pico de sobreelongación frente a la razón de amortiguamiento para un sistema de segundo orden

Razón de amortiguamiento	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
Sobreelongación porcentual	0.2	1.5	4.6	9.5	16.3	25.4	37.2

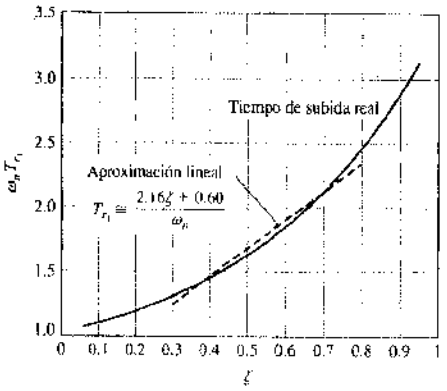


FIGURA 5.9
Tiempo de subida normalizado. T_{r_1}, frente a ζ para un sistema de segundo orden.

La velocidad de la respuesta a un escalón se puede medir como el tiempo que se tarda en ir desde el 10% al 90% de la magnitud de la entrada de escalón. Ésta es la definición del tiempo de subida, T_{r_1}, que se muestra en la Figura 5.7. La Figura 5.9 muestra el tiempo de subida normalizado, $\omega_n T_{r_1}$, frente a ζ ($0.05 \leq \zeta \leq 0.95$). Aunque es difícil obtener las expresiones analíticas para T_{r_1}, se puede utilizar la aproximación lineal

$$T_{r_1} = \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n}, \tag{5.17}$$

que es exacta para $0.3 \leq \zeta \leq 0.8$. La Figura 5.9 muestra esta aproximación lineal.

La rapidez de una respuesta a una entrada de escalón, como se describe en la Ecuación (5.17), depende de ζ y ω_n. Para una determinada ζ, la respuesta es más rápida para una mayor ω_n, tal como se muestra en la Figura 5.10. Obsérvese que la sobreelongación depende de ω_n.

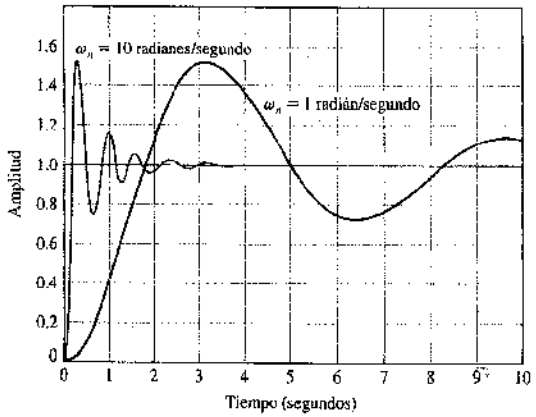


FIGURA 5.10
Respuesta a un escalón para $\zeta = 0.2$ con $\omega_n = 1$ y $\omega_n = 10$.

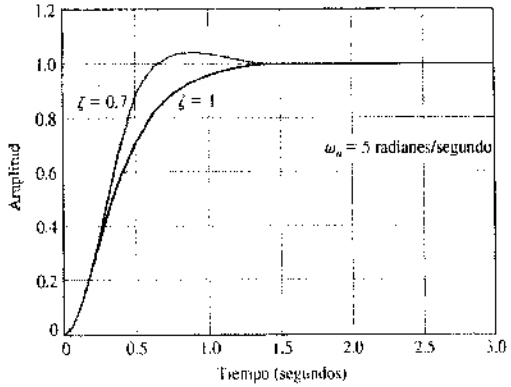


FIGURA 5.11
Respuesta a un escalón para $\omega_n = 1$ con $\zeta = 0.7$ y $\zeta = 1$

Para una determinada ω_n, la respuesta es más rápida cuanto menor sea ζ, tal como se muestra en la Figura 5.11. Sin embargo, la rapidez de la respuesta estará limitada por la sobreelongación que se pueda tolerar.

5.4. EFECTOS DE UN TERCER POLO Y UN CERO SOBRE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Las curvas presentadas en la Figura 5.8 sólo son exactas para el sistema de segundo orden de la Ecuación (5.8). Sin embargo, proporcionan una magnífica fuente de datos, ya que muchos sistemas tienen un par dominante de raíces y la respuesta al escalón puede estimarse mediante la Figura 5.8. Este método, aun cuando es una aproximación, evita el cálculo de la transformada inversa de Laplace para determinar el porcentaje de sobreelongación y otras medidas del comportamiento. Por ejemplo, para un sistema de tercer orden con una función de transferencia de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta s + 1)(\gamma s + 1)}, \tag{5.18}$$

el diagrama del plano s se muestra en la Figura 5.12. Este sistema de tercer orden está normalizado con $\omega_n = 1$. Se determinó experimentalmente que el comportamiento

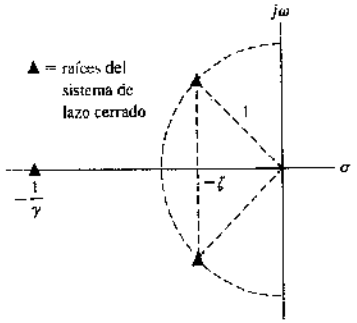


FIGURA 5.12
Diagrama del plano s de un sistema de tercer orden.

Tabla 5.3 Efecto de un tercer polo (Ecuación 5.18) para $\zeta = 0.45$

γ	$\frac{1}{\gamma}$	Sobreelongación porcentual	Tiempo de asentamiento
2.25	0.444	0	9.63
1.5	0.666	3.9	6.3
0.9	1.111	12.3	8.81
0.4	2.50	18.6	8.67
0.05	20.0	20.5	8.37
0	∞	20.5	8.24

* *Nota:* El tiempo de asentamiento está normalizado a $\omega_n T$, y se utiliza el criterio del 2%.

(como el indicado por el porcentaje de sobreelongación, P.O., y el tiempo de asentamiento, T_s) se representa por las curvas del sistema de segundo orden cuando [4]

$$|1/\gamma| \geq 10|\zeta\omega_n|.$$

En otras palabras, la respuesta de un sistema de tercer orden puede aproximarse mediante las **raíces dominantes** del sistema de segundo orden, siempre que dichas raíces sean inferiores a 1/10 de la parte real de la tercera raíz [17, 23].

Empleando una simulación por computador, cuando $\zeta = 0.45$ se puede determinar la respuesta de un sistema a una entrada de escalón unitario. Cuando $\gamma = 2.25$, se observa que la respuesta está sobreamortiguada, ya que la parte real de los polos complejos es -0.45, mientras que el polo real es igual a -0.444. Mediante la simulación, se halló que el tiempo de asentamiento (dentro del 2% del valor final) fue igual a 9.6 segundos. Si $\gamma = 0.90$ o $1/\gamma = 1.11$ se compara con $\zeta\omega_n = 0.45$ de los polos complejos, se observa que la sobreelongación es del 12% y que el tiempo de asentamiento es de 8.8 segundos. Si las raíces complejas fueran completamente dominantes, se esperaría que la sobreelongación fuera del 20% y el tiempo de asentamiento de $4/\zeta\omega_n = 8.9$ segundos. La Tabla 5.3 muestra los resultados.

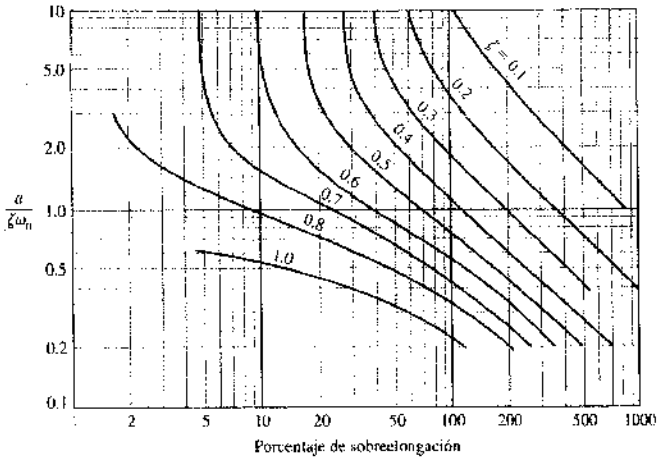
Así mismo, debe observarse que las medidas del comportamiento según la Figura 5.8 sólo son correctas para una función de transferencia sin ceros finitos. Si la función de transferencia de un sistema tiene ceros finitos y éstos se localizan relativamente cerca de los polos complejos dominantes, entonces los ceros afectarán materialmente a la respuesta transitoria del sistema [5].

La respuesta transitoria de un sistema con un cero y dos polos se puede alterar por la localización del cero [5]. En la Figura 5.13(a) se ilustra el porcentaje de sobreelongación para una entrada de escalón como una función de $a/\zeta\omega_n$, cuando $\zeta \leq 1$, para la función de transferencia del sistema

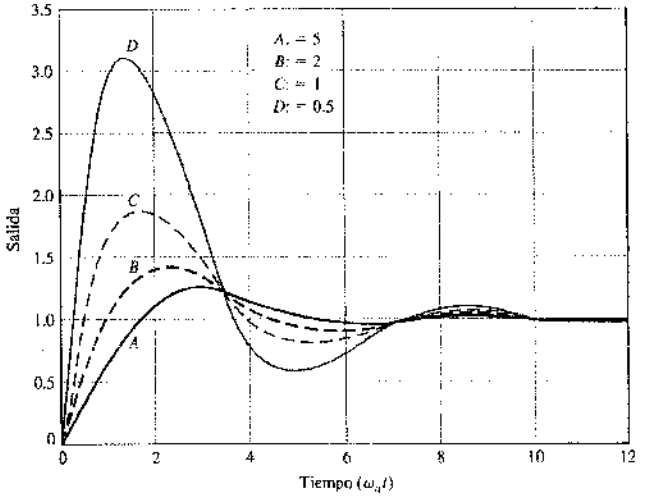
$$T(s) = \frac{(\omega_n^2/a)(s + a)}{s^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2}.$$

La Figura 5.13(b) muestra la respuesta transitoria real para una entrada de escalón para valores determinados de $a/\zeta\omega_n$. La Tabla 5.4 muestra la respuesta real para estos valores seleccionados cuando $\zeta = 0.45$.

La correlación de la respuesta en el dominio del tiempo de un sistema con la localización en el plano s de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado es muy útil para escoger las especificaciones de un sistema. Para ilustrar la utilidad del plano s, se considerará un ejemplo sencillo.



(a)



(b)

FIGURA 5.13. (a) Porcentaje de sobreelongación como una función de ζ y ω_n cuando una función de transferencia de segundo orden contiene un cero. (Con permiso de R. N. Clark, *Introduction to Automatic Control Systems*, Nueva York, Wiley, 1962.) (b) Respuesta para la función de transferencia de segundo orden con un cero para cuatro valores de la razón ($a/\zeta\omega_n$): $A = 5$, $B = 2$, $C = 1$ y $D = 0.5$ cuando $\zeta = 0.45$.

Tabla 5.4 Respuesta de un sistema de segundo orden con un cero y $T_s = 0.4s$

$a/\zeta\omega_n$	Sobreelongación porcentual	Tiempo de asentamiento	Tiempo de pico
5	23.1	8.0	3.0
2	39.7	7.6	2.2
1	89.9	10.1	1.8
0.5	210.0	10.3	1.5

Nota. El tiempo está normalizado a $\omega_n T_s$ y el tiempo de asentamiento se basa en el criterio del 2%.

EJEMPLO 5.1. Selección de parámetros

En la Figura 5.14 se muestra un sistema de control con realimentación de lazo simple. Se desea seleccionar la ganancia K y el parámetro p de tal forma que se satisfagan las especificaciones en el dominio del tiempo. La respuesta transitoria a un escalón deberá ser lo más rápida posible y con una sobreelongación menor que el 5%. Además, el tiempo de asentamiento dentro del 2% del valor final deberá ser de menos de 4 segundos. La razón de amortiguamiento, ζ, para una sobreelongación del 4.3% es de 0.707. En la Figura 5.15 se muestra gráficamente esta razón de amortiguamiento. Como el tiempo de asentamiento es

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 4 \text{ s},$$

se necesita que la parte real de los polos complejos de $T(s)$ sea

$$\zeta\omega_n \geq 1.$$

Esta región también se muestra en la Figura 5.15. La región que satisface ambos requisitos en el dominio del tiempo se muestra dentro de la cuadrícula del plano s de la Figura 5.15.

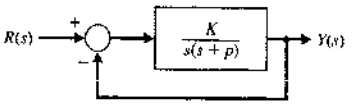


FIGURA 5.14
Sistema de control con realimentación de lazo simple.

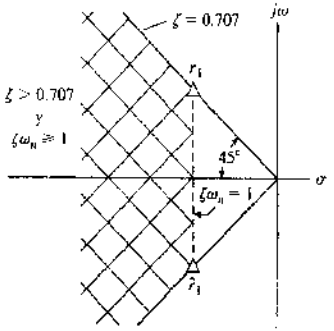


FIGURA 5.15
Especificaciones y localizaciones de las raíces en el plano s.

Cuando las raíces del lazo cerrado son $r_1 = -1 + j1$ y $\hat{r}_1 = -1 - j1$, se tiene $T_s = 4s$ y una sobreelongación de 4.3%. Por tanto, $\zeta = 1/\sqrt{2}$ y $\omega_n = 1/\zeta = \sqrt{2}$. La función de transferencia de lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{s^2 + ps + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Por tanto, se necesita que $K = \omega_n^2 = 2$ y $p = 2\zeta\omega_n = 2$. Es importante para el diseñador y el analista de sistemas comprender bien la correlación entre la localización de las raíces del lazo cerrado y la respuesta transitoria del sistema. Por tanto, se considerará el tema más detalladamente en las siguientes secciones. ■

EJEMPLO 5.2. Polos dominantes de $T(s)$

Considérese un sistema con función de transferencia en lazo cerrado

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\dfrac{\omega_n^2}{a}(s + a)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(1 + \tau s)}.$$

Tanto el cero como el polo real pueden afectar a la respuesta transitoria. Si $a \gg \zeta\omega_n$ y $\tau \ll 1/\zeta\omega_n$, el polo y el cero tendrán un efecto pequeño sobre la respuesta a un escalón.

Supóngase que se tiene

$$T(s) = \frac{62.5(s + 2.5)}{(s^2 + 6s + 25)(s + 6.25)}.$$

Obsérvese que la ganancia de cc es igual a 1 [$T(0) = 1$], y para una entrada de escalón se espera un error en estado estacionario igual a cero. Se tiene $\zeta\omega_n = 3$, $\tau = 0.16$ y $a = 2.5$. La Figura 5.16 muestra los polos y el cero en el plano s. Como una primera aproximación se desprecia el polo real y se obtiene

$$T(s) \approx \frac{10(s + 2.5)}{(s^2 + 6s + 25)}.$$

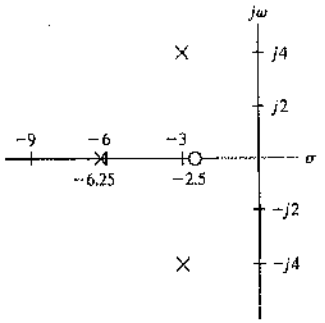


FIGURA 5.16
Polos y ceros en el plano s para un sistema de tercer orden.

Ahora se tiene $\zeta = 0.6$ y $\omega_n = 5$ para los polos dominantes con un cero de acompañamiento para el cual $a/(\zeta\omega_n) = 0.833$. Utilizando la Figura 5.13(a), se obtiene que el porcentaje de sobreelongación es 55%. Se espera que el tiempo de asentamiento dentro del 2% del valor final sea

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.6(5)} = 1.33 \text{ s}.$$

Utilizando una simulación por computador para el sistema de tercer orden real, se obtiene que el porcentaje de sobreelongación es igual a 38% y el tiempo de asentamiento es 1.6 segundos. De este modo, el efecto del amortiguamiento del tercer polo de $T(s)$ es atenuar la sobreelongación e incrementa el tiempo de asentamiento (por tanto, el polo real no se puede despreciar). ■

5.5. ESTIMACIÓN DE LA RAZÓN DE AMORTIGUAMIENTO

La razón de amortiguamiento se puede estimar a partir de la respuesta del sistema a una entrada en escalón [14]. La respuesta a un escalón de un sistema de segundo orden para una entrada de escalón unitario está dada por la Ecuación (5.9), la cual es

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n \beta t + \theta),$$

donde $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$ y $\theta = \cos^{-1}\zeta$. Por tanto, la frecuencia del término sinusoidal amortiguado para $\zeta < 1$ es

$$\omega = \omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2} = \omega_n\beta,$$

y el número de ciclos en 1 segundo es $\omega/2\pi$.

La constante de tiempo para la decadencia exponencial es $\tau = 1/(\zeta\omega_n)$ en segundos. El número de ciclos de la sinusoide amortiguada durante una constante de tiempo es

$$(\text{ciclos/s}) \times \tau = \frac{\omega}{2\pi\zeta\omega_n} = \frac{\omega_n\beta}{2\pi\zeta\omega_n} = \frac{\beta}{2\pi\zeta}.$$

Suponiendo que la respuesta decae en n constantes de tiempo visibles, se tiene

$$\text{ciclos visibles} = \frac{n\beta}{2\pi\zeta}. \tag{5.19}$$

Para el sistema de segundo orden, la respuesta queda dentro del 2% del valor de estado estacionario después de cuatro constantes de tiempo (4τ). Por tanto, $n = 4$, y

$$\text{ciclos visibles} = \frac{4\beta}{2\pi\zeta} = \frac{4(1 - \zeta^2)^{1/2}}{2\pi\zeta} \simeq \frac{0.55}{\zeta} \tag{5.20}$$

para $0.2 \leqslant \zeta \leqslant 0.6$.

Como ejemplo, examínese la respuesta que se muestra en la Figura 5.5(a) para $\zeta = 0.4$. Utilícese $y(t) = 0$ como primer punto mínimo y cuéntese 1.4 ciclos visibles (hasta que la respuesta se encuentre en el 2% del valor final). Entonces se estima

$$\zeta = \frac{0.55}{\text{ciclos}} = \frac{0.55}{1.4} = 0.39.$$

Se puede utilizar esta aproximación para sistemas con polos complejos dominantes tal que

$$T(s) \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Por tanto, es posible estimar la razón de amortiguamiento ζ de la respuesta de un sistema real de un sistema físico.

Un método alternativo para estimar ζ es determinar el porcentaje de sobreelongación para la respuesta a un escalón y utilizar la Figura 5.8 para estimar ζ. Por ejemplo, determínese, a partir de la respuesta de la Figura 5.5(a) una sobreelongación del 25% para $\zeta = 0.4$. Utilizando la Figura 5.8, se estima que $\zeta = 0.4$, tal como se esperaba.

5.6. LOCALIZACIÓN DE LAS RAÍCES EN EL PLANO s Y RESPUESTA TRANSITORIA

La respuesta transitoria de un sistema de control con realimentación de lazo cerrado puede describirse en función de la localización de los polos de la función de transferencia. La función de transferencia de lazo cerrado se escribe en general como

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_i(s)\Delta_i(s)}{\Delta(s)}.$$

donde $\Delta(s) = 0$ es la ecuación característica del sistema. Para el sistema de lazo simple de la Figura 5.14, la ecuación característica se reduce a $1 + G(s) = 0$. Los ceros y los polos de $T(s)$ son los que determinan la respuesta transitoria. Sin embargo, para un sistema de lazo cerrado, los polos de $T(s)$ son las raíces de la ecuación característica $\Delta(s) = 0$ y los polos de $\sum P_i(s)\Delta_i(s)$. La salida de un sistema sin raíces repetidas (con ganancia = 1) y una entrada de escalón unitario puede formularse como un desarrollo en fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i}{s + \sigma_i} + \sum_{k=1}^{N} \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\alpha_k s + (\alpha_k^2 + \omega_k^2)}, \tag{5.21}$$

donde las A_i, B_k y C_k son los residuos. Las raíces del sistema pueden ser $s = -\sigma_i$ o pares conjugados complejos como $s = -\alpha_k \pm j\omega_k$. Entonces la transformada inversa da como resultado la respuesta transitoria como una suma de términos

$$y(t) = 1 + \sum_{i=1}^{M} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{k=1}^{N} D_k e^{-\alpha_k t} \operatorname{sen}(\omega_k t + \theta_k), \tag{5.22}$$

donde D_k es una constante y depende de B_k, C_k, α_k y ω_k. La respuesta transitoria está formada por la salida en estado estacionario, los términos exponenciales y los términos sinusoidales amortiguados. Obviamente, para que la respuesta sea estable, es decir, limitada para una entrada de escalón, se puede requerir que la parte real de las raíces, $-\sigma_i$ y $-\alpha_k$, esté en la parte izquierda del plano s. En la Figura 5.17 se muestra la respuesta a un impulso para diversas localizaciones de las raíces. La información proporcionada por la localización de las raíces es verdaderamente gráfica, y vale la pena determinar la localización de las raíces en el plano s.

Para el analista de sistemas de control es importante entender la relación entre la representación frecuencia-complejo de un sistema lineal, mediante los polos y ceros de su función de transferencia, y su respuesta dominio-tiempo a entradas de escalón y otras entradas. Muchos de los cálculos de diseño y análisis en áreas como el procesamiento y control de señales se realizan en el plano de frecuencia-complejo, donde el modelo del

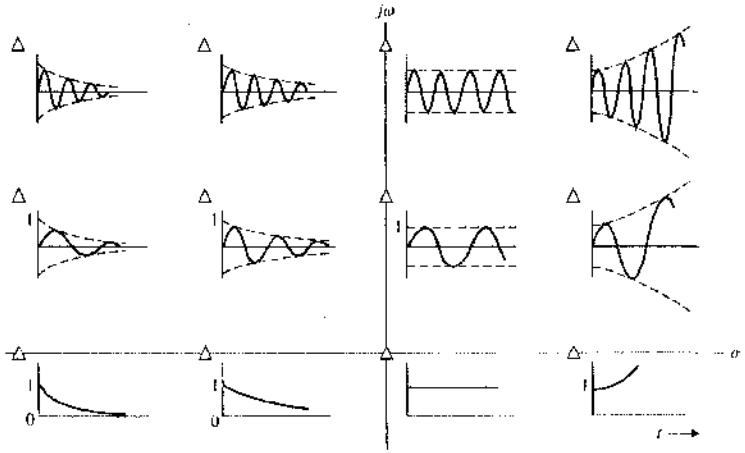


FIGURA 5.17
Respuesta a un impulso para varias localizaciones de raíces en el plano s. (No se muestra la raíz conjugada).

sistema se representa en términos de los polos y ceros de su función de transferencia $T(s)$. Por otro lado, el comportamiento de un sistema se suele analizar examinando las respuestas del dominio-tiempo, en particular cuando se trata de sistemas de control.

El diseñador de sistemas capaz puede visualizar los efectos que tiene sobre las respuestas de impulso y de escalón añadir, eliminar o mover los polos y ceros de $T(s)$ en el plano s. Así mismo, el diseñador debe ser capaz de visualizar los cambios que se tienen que hacer en los polos y ceros de $T(s)$ con el objeto de provocar los cambios deseados en las respuestas de impulso y de escalón del modelo.

El diseñador experimentado es consciente de los efectos de la localización de los ceros sobre la respuesta del sistema. Los polos de $T(s)$ determinan los modos de respuesta particulares que se presentarán, y los ceros de $T(s)$ determinan la influencia relativa de las funciones de los modos individuales. Por ejemplo, mover un cero más cerca de un polo específico reducirá la contribución relativa de la función de forma que corresponda al polo.

Se puede desarrollar un programa de computación que permita al usuario especificar conjuntos arbitrarios de polos y ceros para la función de transferencia de un sistema lineal. Entonces, el computador evaluará y dibujará individualmente las respuestas de escalón y de impulso del sistema. Además se mostrarán de forma reducida con las gráficas de polos-ceros.

Una vez ejecutado el programa para un conjunto de polos y ceros, el usuario puede modificar la localización de uno o más de ellos. Entonces, se presentan gráficas que muestren los polos y ceros nuevos y antiguos en el plano complejo, así como las respuestas nuevas y antiguas de escalón y de impulso.

5.7. EL ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO DE LOS SISTEMAS DE CONTROL CON REALIMENTACIÓN

Una de las razones fundamentales para usar realimentación, a pesar de su costo y complejidad, es la mejora esperada en la reducción del error del sistema en estado estacionario. Como se ilustró en la Sección 4.5, este error del sistema de lazo cerrado generalmente es varios órdenes de magnitud menor que el error del sistema de lazo abierto.

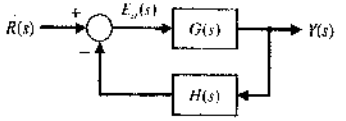


FIGURA 5.18
Sistema de control de lazo cerrado.

La señal de actuación del sistema, que es una medida del error de éste, se representa por $E_a(s)$. Sin embargo, el error real del sistema es $E(s) = R(s) - Y(s)$. Considerando el sistema con realimentación de lazo cerrado de la Figura 5.18, se tiene

$$E(s) = R(s) - \frac{G(s)}{1 + GH(s)} R(s) = \frac{[1 + GH(s) - G(s)]}{1 + GH(s)} R(s).$$

El error del sistema es igual a la señal $E_a(s)$ cuando $H(s) = 1$. Entonces,

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s).$$

El error en estado estacionario, cuando $H(s) = 1$, es entonces

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}. \tag{5.23}$$

Es útil determinar el error del sistema en estado estacionario para las tres entradas estándar de prueba en un sistema de realimentación unitaria $[H(s) = 1]$.

Entrada de escalón. El error en estado estacionario para una entrada de escalón de magnitud A es entonces

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s(A/s)}{1 + G(s)} = \frac{A}{1 + G(0)}.$$

Evidentemente, la forma de la función de transferencia del lazo $G(s)$ determina el error en estado estacionario. La función de transferencia del lazo se escribe en forma general como

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{M} (s + z_i)}{s^N \prod_{k=1}^{Q} (s + p_k)}, \tag{5.24}$$

donde Π designa el producto de los factores. Por tanto, la función de transferencia del lazo, a medida que s se aproxima a cero, depende del número N de integraciones. Si N es mayor que cero, entonces $G(0)$ se aproxima a infinito y el error en estado estacionario se aproxima a cero. El número de integraciones suele indicarse marcando un sistema con un **número de tipo** que es simplemente igual a N.

Por tanto, para un sistema de tipo cero, $N = 0$, el error en estado estacionario es

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + G(0)} = \frac{A}{1 + \left(K \prod_{i=1}^{M} z_i / \prod_{k=1}^{Q} p_k \right)}. \tag{5.25}$$

La constante $G(0)$ es designada por K_p, la **constante del error de posición**, de modo que

$$\boxed{K_p = \lim_{s\to 0} G(s).}$$

El error de seguimiento en estado estacionario para una entrada de escalón de magnitud A está dado por

$$\boxed{e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}.} \tag{5.26}$$

Evidentemente, el error en estado estacionario para una entrada de escalón unitario con una integración o más, $N \geqslant 1$, es cero ya que

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{1 + (K\Pi z_i/s^N\Pi p_k)}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{As^N}{s^N + (K\Pi z_i/\Pi p_k)} = 0. \tag{5.27}$$

Entrada de rampa. El error en estado estacionario para una entrada de rampa (velocidad) con una pendiente A es

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s(A/s^2)}{1 + G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s + sG(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{sG(s)}. \tag{5.28}$$

Nuevamente, el error en estado estacionario depende del número de integraciones N. Para un sistema de tipo cero, $N = 0$, dicho error es infinito. Para un sistema de tipo 1, $N = 1$, el error es

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s\{[K\Pi(s + z_i)]/[s\Pi(s + p_k)]\}},$$

o

$$\boxed{e_{ss} = \frac{A}{(K\Pi z_i/\Pi p_k)} = \frac{A}{K_v},} \tag{5.29}$$

donde K_v es la **constante del error de velocidad**. La constante del error de velocidad se calcula como

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s).$$

Cuando la función de transferencia tiene dos o más integraciones, $N \geqslant 2$, se obtiene un error en estado estacionario igual a cero. Cuando $N = 1$, existe un error en estado estacionario. Sin embargo, la velocidad en estado estacionario de la salida es igual a la velocidad de la entrada, como se verá en breve.

Entrada de aceleración. Cuando la entrada del sistema es $r(t) = At^2/2$, el error en estado estacionario es

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s(A/s^3)}{1 + G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s^2G(s)}. \tag{5.30}$$

Tabla 5.5 Resumen de errores en estado estacionario

Número de integraciones en $G(s)$, número de tipo	Entrada		
	Escalón, $r(t) = A$, $R(s) = A/s$	Rampa, At, A/s^2	Parábola, $At^2/2$, A/s^3
0	$e_{ss} = \dfrac{A}{1 + K_p}$	Infinito	Infinito
1	$e_{ss} = 0$	$\dfrac{A}{K_v}$	Infinito
2	$e_{ss} = 0$	0	$\dfrac{A}{K_a}$

El error en estado estacionario es infinito para una integración; para dos integraciones, $N = 2$, se obtiene

$$\boxed{e_{ss} = \frac{A}{K\Pi z_i/\Pi p_k} = \frac{A}{K_a},} \tag{5.31}$$

donde K_a es la **constante de error de aceleración**. La constante de error de aceleración es

$$\boxed{K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s).}$$

Cuando el número de integraciones iguala o excede a tres, entonces el error del sistema en estado estacionario es cero.

Los sistemas de control se describen frecuentemente en función de su número de tipo y las constantes de error, K_p, K_v y K_a. Las definiciones para las constantes de error y el error en estado estacionario para las tres entradas se resumen en la Tabla 5.5. La utilidad de las constantes de error puede ilustrarse considerando un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 5.3. Control de dirección de un robot móvil

Una persona incapacitada podría emplear un robot móvil para utilizarlo como dispositivo de asistencia o sirviente [8]. El sistema de control de dirección para dicho robot se puede representar por medio del diagrama de bloques de la Figura 5.19. El controlador de la dirección es

$$G_1(s) = K_1 + K_2/s. \tag{5.32}$$

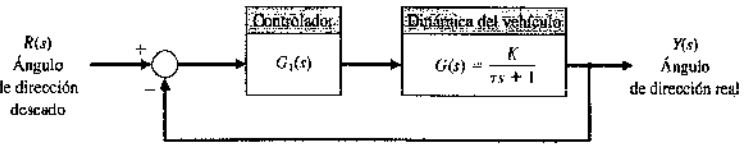


FIGURA 5.19
Diagrama de bloques del sistema de control de dirección para un robot móvil.

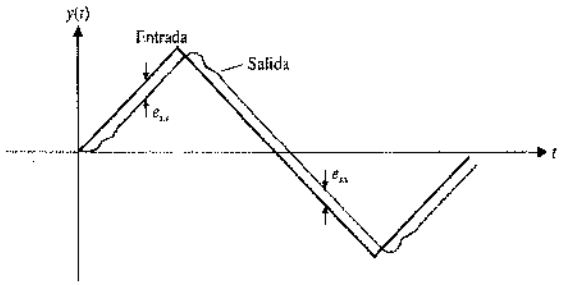


FIGURA 5.20
Respuesta de onda triangular.

El error del sistema en estado estacionario para una entrada de escalón cuando $K_2 = 0$ y $G_1(s) = K_1$ es entonces

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}, \tag{5.33}$$

donde $K_p = KK_1$. Cuando K_2 es mayor que cero, se tiene un sistema de tipo uno,

$$G_1(s) = \frac{K_1 s + K_2}{s},$$

y el error en estado estacionario es cero para una entrada de escalón.

Si la orden de dirección fuese una entrada de rampa, el error en estado estacionario sería entonces

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v}, \tag{5.34}$$

donde

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_1(s)G(s) = K_2K.$$

En la Figura 5.20 se muestra la respuesta transitoria del vehículo a una entrada de onda triangular cuando $G_1(s) = (K_1s + K_2)/s$. Dicha respuesta muestra con claridad el efecto del error en estado estacionario, el cual puede no ser objetable si K_v es suficientemente grande. Obsérvese que la salida alcanza la velocidad deseada tal como exige la entrada, aunque presenta un error en estado estacionario. ■

Las constantes de error, K_p, K_v y K_a, de un sistema de control describen la capacidad del sistema para reducir o eliminar el error en estado estacionario. Por tanto, se utilizan como medidas numéricas del comportamiento en el estado estacionario. El diseñador determina las constantes de error para un sistema dado e intenta determinar métodos que incrementen las constantes de error, manteniendo una respuesta transitoria aceptable. En el caso del sistema de control de dirección, es deseable aumentar el factor de ganancia KK_2 con el objeto de incrementar K_v y reducir el error en estado estacionario. Sin embargo, un aumento en KK_2 produce una consecuente disminución en la razón de amortiguamiento, ζ, del sistema y, por tanto, una respuesta más oscilatoria a una entrada de escalón. Nuevamente, se desea un compromiso que proporcione la máxima K_v basada en la mínima ζ permisible.

5.8. EL ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO DE LOS SISTEMAS CON REALIMENTACIÓN NO UNITARIA

La Figura 5.21 muestra un sistema realimentado general con realimentación no unitaria, con $H(s)$ distinto de la unidad. Para un sistema en el que la realimentación es no unitaria, las unidades de la salida, $Y(s)$, normalmente son diferentes de la salida del sensor. Por ejemplo, la Figura 5.22 muestra un sistema de control de velocidad, donde $H(s) = K_2$. Las constantes K_1 y K_2 explican la conversión de un conjunto de unidades a otro (aquí se convierten rad/s a voltios). Se puede seleccionar K_1, y por tanto fijar $K_1 = K_2$ y mover el bloque para que K_1 y K_2 estén después del nodo de suma. La Figura 5.23 muestra el diagrama de bloque equivalente que se obtiene. De este modo, se obtiene un sistema de realimentación unitario como se desea.

Vuélvase al sistema de la Figura 5.21 con $H(s)$. En este caso,

$$H(s) = \frac{K_2}{(\tau s + 1)}$$

Tiene una ganancia de cc para $H(s)$ de

$$\lim_{s \to 0} H(s) = K_2.$$

K_2 es un factor de conversión de unidades. Si se fija $K_2 = K_1$, entonces el sistema se transforma en el de la Figura 5.23 (para el cálculo de la ganancia de cc o estado estacionario). Por tanto, el error del sistema que se muestra en esta figura es $E(s)$, donde

$$E(s) = R(s) - Y(s) = [1 - T(s)]R(s), \tag{5.35}$$

debido a que $Y(s) = T(s)R(s)$. Obsérvese que

$$T(s) = \frac{K_1G(s)}{1 + K_1G(s)},$$

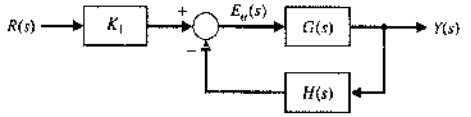


FIGURA 5.21
Sistema de realimentación no unitaria.

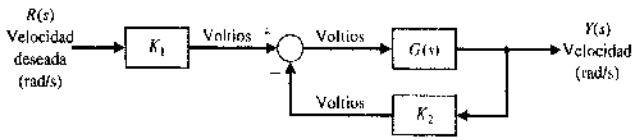


FIGURA 5.22
Sistema de control de velocidad.

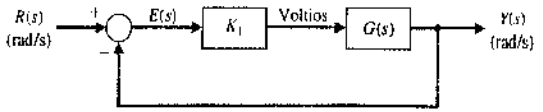


FIGURA 5.23
Sistema de control de velocidad de la Figura 5.22 con $K_1 = K_2$.

y por tanto

$$E(s) = \frac{1}{1 + K_1 G(s)} R(s).$$

Luego el error en estado estacionario para una entrada de escalón unitario es

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \frac{1}{1 + K_1 G(0)}. \tag{5.36}$$

En general, siempre se puede determinar el error de sistema real utilizando la Ecuación (5.23).

EJEMPLO 5.4. Error en estado estacionario

Determínese el valor apropiado de K_1 y calcúlese el error en estado estacionario para una entrada de escalón unitario para el sistema que se muestra en la Figura 5.21 cuando

$$G(s) = \frac{40}{(s + 5)}$$

y

$$H(s) = \frac{20}{(s + 10)} = \frac{K_2}{(0.1s + 1)}.$$

Se puede escribir como

$$H(s) = \frac{2}{(0.1s + 1)}.$$

Seleccionando $K_1 = K_2 = 2$, se puede utilizar la Ecuación (5.36) para determinar

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_1 G(0)} = \frac{1}{1 + 2(8)} = \frac{1}{17},$$

o 5.9% de la magnitud de la entrada en escalón. ■

EJEMPLO 5.5. Sistema realimentado

Considérese el sistema de la Figura 5.24, donde se supone, como se hizo para el sistema de la Figura 5.21, que no se puede insertar una ganancia K_1 a continuación de $R(s)$. Por tanto, la Ecuación (5.35) proporciona el error verdadero, el cual es

$$E(s) = [1 - T(s)]R(s).$$

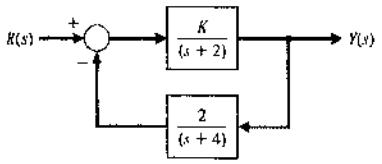


FIGURA 5.24
Sistema con una realimentación $H(s)$.

Determínese una ganancia apropiada, K, tal que el error en estado estacionario para una entrada escalón sea mínimo. El error en estado estacionario es

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s[1 - T(s)] \frac{1}{s},$$

donde

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K(s + 4)}{(s + 2)(s + 4) + 2K}.$$

Por tanto, se tiene

$$T(0) = \frac{4K}{8 + 2K}.$$

El error en estado estacionario para una entrada de escalón unitario es

$$e_{ss} = [1 - T(0)].$$

De este modo, para alcanzar un error en estado estacionario nulo, es necesario que

$$T(0) = \frac{4K}{8 + 2K} = 1,$$

u $8 + 2K = 4K$. Por tanto, $K = 4$ producirá un error nulo en estado estacionario. ■

5.9. ÍNDICES DE COMPORTAMIENTO

En la bibliografía reciente sobre control automático se observa un interés creciente en la medición y formulación matemáticas del comportamiento del sistema de control. La teoría moderna de control presupone que los ingenieros de sistemas pueden especificar cuantitativamente el comportamiento requerido del sistema. Entonces se puede calcular un índice de comportamiento y utilizarlo para evaluar el comportamiento de un sistema. Se necesita una medida cuantitativa del comportamiento de un sistema para la operación de sistemas de control modernos adaptativos, para la optimización de parámetros automáticos en un sistema de control y para el diseño de sistemas óptimos.

Si el propósito es mejorar el diseño de un sistema o diseñar un sistema de control, se debe elegir y medir un índice de comportamiento.

Un índice de comportamiento es una medida cuantitativa del comportamiento de un sistema que se diseña de forma que el sistema óptimo realimentado minimiza el índice.

Un sistema se considera **sistema de control óptimo** cuando sus parámetros se ajustan de forma que el índice alcanza un valor extremo, comúnmente un valor mínimo. Para que un índice de comportamiento resulte útil, siempre debe ser un número positivo o cero. Entonces el mejor sistema se define como aquel que minimiza este índice.

Un índice de comportamiento adecuado es la integral del cuadrado del error, ISE, que se expresa

$$\text{ISE} = \int_0^T e^2(t)\, dt. \tag{5.37}$$

El límite superior T es un tiempo finito elegido un tanto arbitrariamente de forma que la integral tienda a un valor en estado estacionario. Por lo general, es conveniente elegir T como el tiempo de asentamiento, T_s. En la Figura 5.25(b) se muestra la respuesta de escalón para un sistema específico de control con realimentación; en la Figura 5.25(c) aparece el error. El cuadrado del error se muestra en la Figura 5.25(d); y la integral del cuadrado del error, en la Figura 5.25(e). Este criterio discriminará entre los sistemas excesivamente sobreamortiguados y los excesivamente subamortiguados. El valor mínimo de la integral resulta para un valor de compromiso del amortiguamiento. El índice de comportamiento de la Ecuación (5.37) se adapta fácilmente para mediciones prácticas, pues se obtiene sin dificultad un circuito de elevar al cuadrado. Además, el cuadrado del error es matemáticamente conveniente a efectos analíticos y de cálculo.

Otro criterio de comportamiento, aplicable con facilidad, es la integral de la magnitud absoluta del error, IAE, la cual se escribe como

$$\text{IAE} = \int_0^T |e(t)|\, dt. \tag{5.38}$$

Este índice es particularmente útil para estudios de simulación en computadores.

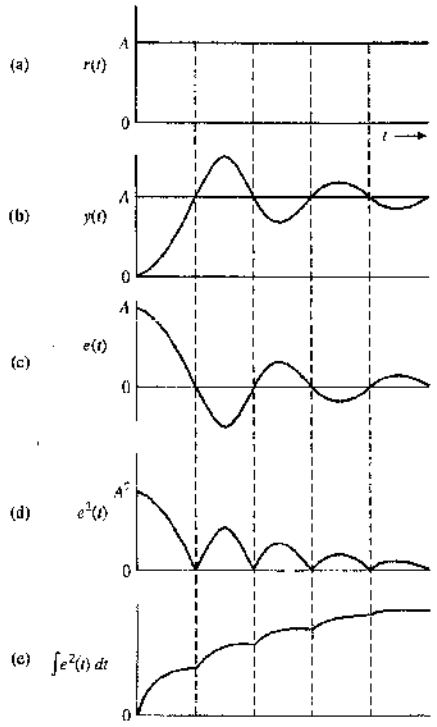


FIGURA 5.25
Cálculo de la integral del cuadrado del error.

Para reducir la contribución del gran error inicial al valor de la integral de comportamiento, así como para destacar los errores que se producen después en la respuesta, se ha propuesto el siguiente índice [6]:

$$\text{ITAE} = \int_0^T t|e(t)|\, dt. \tag{5.39}$$

Este índice de comportamiento se designa como la integral del tiempo multiplicada por el error absoluto, ITAE. Otro índice semejante es la integral del tiempo multiplicada por el error al cuadrado, o

$$\text{ITSE} = \int_0^T te^2(t)\, dt. \tag{5.40}$$

El índice de comportamiento ITAE, proporciona la mejor selectividad de los índices de comportamiento; es decir, el valor mínimo de la integral se discierne fácilmente a medida que varían los parámetros del sistema. La forma general de la integral de comportamiento es

$$I = \int_0^T f(e(t), r(t), y(t), t)\, dt, \tag{5.41}$$

donde f es una función del error, la entrada, la salida y el tiempo. Evidentemente, se pueden obtener numerosos índices basados en diferentes combinaciones de las variables y el tiempo del sistema. Obsérvese que la minimización de IAE o ISE a menudo es de significado práctico. Por ejemplo, la minimización de un índice de comportamiento puede relacionarse directamente con la minimización del consumo de combustible en aeronaves y vehículos espaciales.

Los índices de comportamiento son útiles para el análisis y diseño de sistemas de control. Dos ejemplos ilustrarán la utilidad de este método.

EJEMPLO 5.6. Criterios de comportamiento

En la Figura 5.26 se muestra un sistema de control con realimentación de lazo simple, donde la frecuencia natural es el valor normalizado, $\omega_n = 1$. La función de transferencia de lazo cerrado es entonces

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}. \tag{5.42}$$

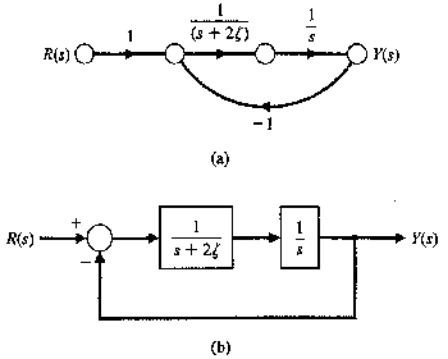


FIGURA 5.26
Sistema de control con realimentación de lazo simple. (a) Grafo de flujo de señal. (b) Modelo de diagrama de bloques.

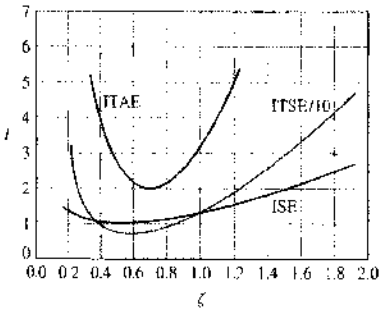


FIGURA 5.27
Tres criterios de comportamiento para un sistema de segundo orden.

En la Figura 5.27 se muestran tres índices de comportamiento, ISE, ITAE e ITSE, calculados para diferentes valores de la razón de amortiguamiento, ζ, y para una entrada de escalón. Estas curvas muestran la selectividad del índice ITAE en comparación con el ISE. El valor de la razón de amortiguamiento, ζ, seleccionado con base en ITAE, es 0.7. Para un sistema de segundo orden produce una respuesta rápida para un escalón con una sobreelongación del 4.6%. ■

EJEMPLO 5.7. Sistema de control de un telescopio espacial

En la Figura 5.28 se muestra la gráfica de flujo de señal para un sistema de control de posición de un telescopio espacial [11]. Se desea seleccionar la magnitud de la ganancia

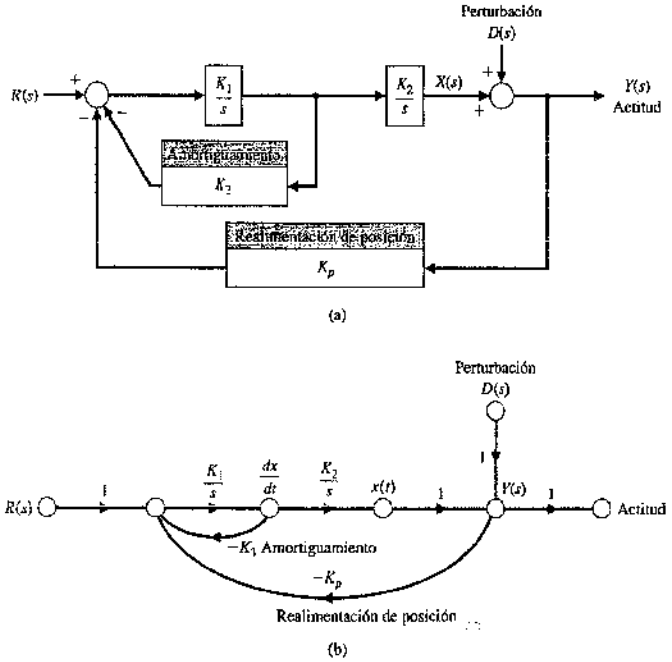


FIGURA 5.28
Sistema de control de la posición de un telescopio espacial. (a) Diagrama de bloques. (b) Grafo de flujo de señal.

K_3 con el objeto de minimizar el efecto de la perturbación $D(s)$. En este caso, la perturbación equivale a un error de posición inicial. La función de transferencia de lazo cerrado para la perturbación se obtiene usando la fórmula de la ganancia del flujo de señal de Mason como sigue:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{P_1(s)\Delta_1(s)}{\Delta(s)} = \frac{1 \cdot (1 + K_1K_3s^{-1})}{1 + K_1K_3s^{-1} + K_1K_2K_ps^{-2}} = \frac{s(s + K_1K_3)}{s^2 + K_1K_3s + K_1K_2K_p}. \tag{5.43}$$

Los valores típicos para las constantes son $K_1 = 0.5$ y $K_1K_2K_p = 2.5$. Entonces la frecuencia natural del vehículo es $f_n = \sqrt{2.5}/2\pi = 0.25$ ciclos/s. Para una perturbación de escalón unitario, el ISE mínimo puede calcularse analíticamente. La posición es

$$y(t) = \frac{\sqrt{10}}{\beta}\left[e^{-0.25K_3t}\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}t + \psi\right)\right], \tag{5.44}$$

donde $\beta = K_3\sqrt{(K_3^2/8) - 5}$. Elevando $y(t)$ al cuadrado e integrando el resultado, se tiene

$$I = \int_0^\infty \frac{10}{\beta^2} e^{-0.5K_3t}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}t + \psi\right)dt = \int_0^\infty \frac{10}{\beta^2} e^{-0.5K_3t}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\beta t + 2\psi)\right)dt = \left(\frac{1}{K_3} + 0.1K_3\right). \tag{5.45}$$

Derivando I e igualando el resultado a cero, se obtiene

$$\frac{dI}{dK_3} = -K_3^{-2} + 0.1 = 0. \tag{5.46}$$

Por tanto, el mínimo ISE se obtiene cuando $K_3 = \sqrt{10} = 3.2$. Este valor de K_3 corresponde a una razón de amortiguamiento ζ de 0.50. La Figura 5.29 representa los valores de ISE e IAE para este sistema. El mínimo para el índice de comportamiento IAE se obtiene cuando $K_3 = 4.2$ y $\zeta = 0.665$. Aunque el criterio ISE no es tan selectivo como el

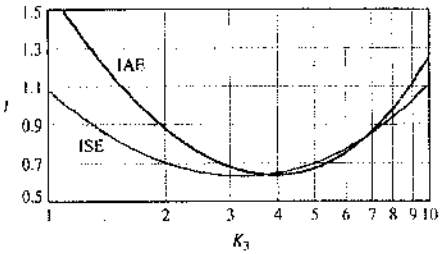


FIGURA 5.29
Índices de comportamiento del sistema de control de posición contra K_3.

Tabla 5.6 Coeficientes óptimos de $T(s)$ basados en el criterio de ITAE para una entrada en escalón

$$s + \omega_n$$
$$s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2$$
$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3$$
$$s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4$$
$$s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5$$
$$s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6$$

IAE, es evidente que se puede resolver analíticamente para el valor mínimo de ISE. El mínimo de IAE se obtiene midiendo el valor real de IAE para varios valores del parámetro de interés. ■

Un sistema de control es óptimo cuando el índice de comportamiento seleccionado se hace mínimo. Sin embargo, el valor óptimo de los parámetros depende directamente de la definición de óptimo, es decir, del índice de comportamiento. Por tanto, en los dos ejemplos observamos que el ajuste óptimo varió para diferentes índices de comportamiento.

Los coeficientes que minimizan el criterio de comportamiento ITAE para una entrada de escalón se determinaron para la función de transferencia general de lazo cerrado [6]

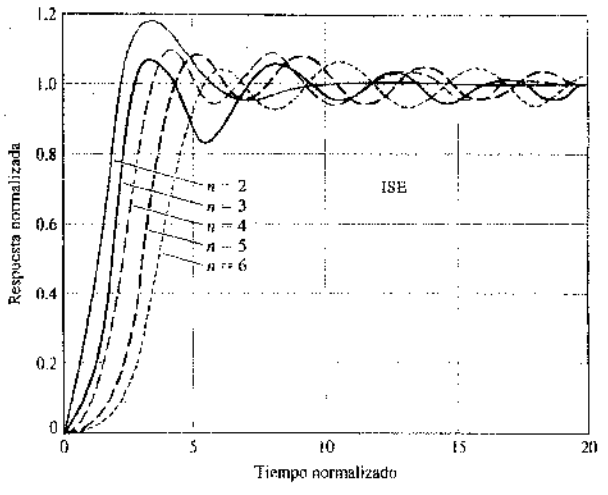
$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}. \tag{5.47}$$

Esta función de transferencia tiene un error en estado estacionario igual a cero para una entrada de escalón. Obsérvese que la función de transferencia tiene n polos y ningún cero. En la Tabla 5.6 se proporcionan los coeficientes óptimos para el criterio ITAE. En la Figura 5.30 se presentan las respuestas para una entrada de escalón, empleando coeficientes óptimos, para ISE, IAE e ITAE. La respuestas se proporcionan para un tiempo normalizado de $\omega_n t$. Existen otras formas estándar basadas en diferentes índices de comportamiento, las cuales pueden ayudar al diseñador a determinar el intervalo de los coeficientes para un problema específico. Un último ejemplo ilustrará la utilidad de las formas estándar para el ITAE.

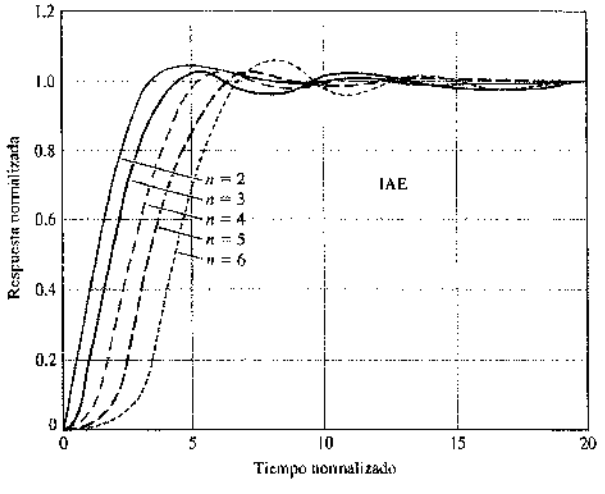
EJEMPLO 5.8. Control de un sistema de doble cámara

Para que un sistema permita que actores reales actúen aparentemente dentro de escenarios complejos en miniatura, se requiere un sistema de control que responda rápida y precisamente. En la Figura 5.31(a) se muestra el sistema de doble cámara: una de las cámaras está enfocada sobre el actor y la otra sobre el escenario en miniatura. El desafío es obtener una coordinación rápida y precisa de las dos cámaras, utilizando la información de un sensor de la cámara de primer plano para controlar el movimiento de la cámara de fondo. En la Figura 5.31(b) se muestra el diagrama de bloques del sistema de la cámara de fondo para un eje de movimiento de dicha cámara. La función de transferencia de lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{K_a K_m \omega_0^2}{s^3 + 2\zeta\omega_0 s^2 + \omega_0^2 s + K_a K_m \omega_0^2}. \tag{5.48}$$



(a)



(b)

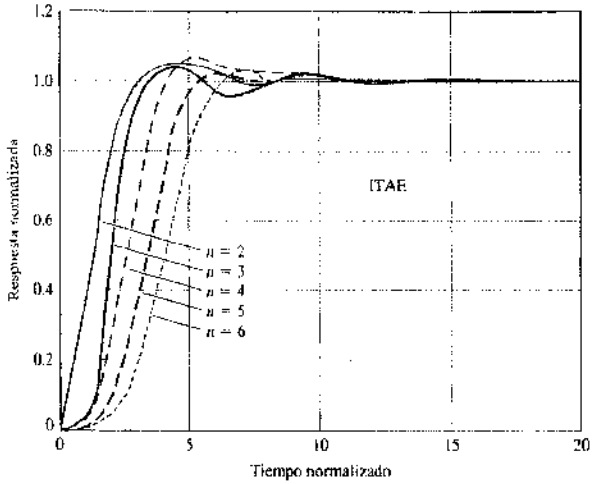
FIGURA 5.30
Respuestas de escalón de una función de transferencia normalizada empleando coeficientes óptimos para (a) ISE, (b) IAE y (c) ITAE. La respuesta está para el tiempo normalizado $\omega_n t$.

La forma estándar para el sistema de tercer orden dado en la Tabla 5.6 requiere que

$$2\zeta\omega_0 = 1.75\omega_n, \qquad \omega_0^2 = 2.15\omega_n^2 \quad \text{y} \quad K_a K_m \omega_0^2 = \omega_n^3.$$

Examinando la Figura 5.30(c) para $n = 3$, se estima que el tiempo de asentamiento es aproximadamente 8 segundos (tiempo normalizado). Por tanto, se estima que

$$\omega_n T_s = 8.$$



(c)

FIGURA 5.30
Continuación.

Como se necesita una respuesta rápida, se seleccionará una ω_n grande de forma que el tiempo de asentamiento sea inferior a 1 segundo. Por tanto, ω_n será igual a 10 rad/s. Entonces, para un sistema ITAE, es necesario que los parámetros de la dinámica de la cámara sean

$$\omega_0 = 14.67 \text{ rad/s}$$

y

$$\zeta = 0.597.$$

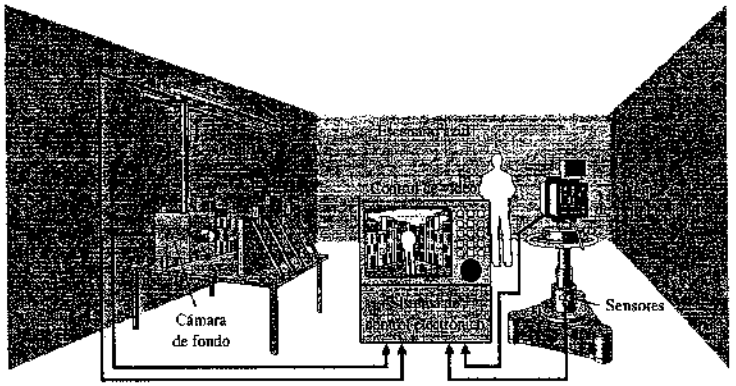
Se requiere que la ganancia del amplificador y del motor sea

$$K_a K_m = \frac{\omega_n^3}{\omega_0^2} = \frac{\omega_n^3}{2.15\omega_n^2} = \frac{\omega_n}{2.15} = 4.65.$$

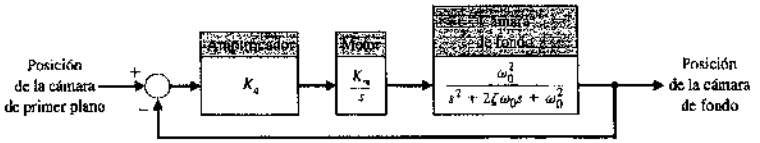
Entonces, la función de transferencia de lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{1000}{s^3 + 17.5s^2 + 215s + 1000} = \frac{1000}{(s + 7.08)(s + 5.21 + j10.68)(s + 5.21 - j10.68)}. \quad (5.49)$$

En la Figura 5.32 se muestra la localización de las raíces del lazo cerrado determinadas por el sistema ITAE. La velocidad de amortiguamiento de las raíces complejas es $\zeta = 0.44$. Sin embargo, las raíces complejas no son dominantes. Empleando una simulación por computador se obtuvo la respuesta real a una entrada de escalón; dicha respuesta mostró que la sobreelongación era sólo del 2% y que el tiempo de asentamiento (dentro del 2% del valor final) era igual a 0.75 segundos.



(a)



(b)

FIGURA 5.31. La cámara de primer plano, que puede ser de cine o de vídeo, está enfocada sobre el escenario panorámico azul. La instalación del control servoelectrónico permite el encadenamiento de las dos cámaras mediante dispositivos servoelectrónicos. La cámara de fondo enfoca el escenario en miniatura con lentes periscópicas y reproduce instantáneamente todos los movimientos de la cámara de primer plano en la escala de la miniatura. La instalación del control de vídeo permite que la imagen compuesta sea controlada por monitor y grabada en vivo. [Parte (a) impresa con permiso de Electronic Design, vol. 24, 11, 24 de mayo de 1976. Derecho de autor Hayden Publishing Co., Inc., 1976.]

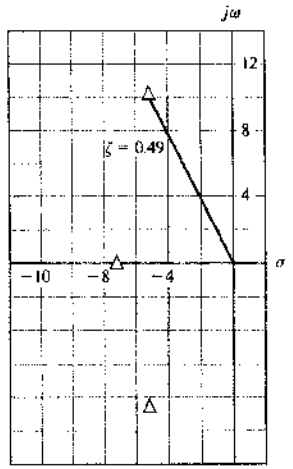


FIGURA 5.32
Raíces del lazo cerrado de un sistema ITAE mínimo.

Tabla 5.7 Coeficientes óptimos de $T(s)$ basados en el criterio de ITAE para una entrada en rampa

$$s^2 + 3.2\omega_n s + \omega_n^2$$
$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 3.25\omega_n^2 s + \omega_n^3$$
$$s^4 + 2.41\omega_n s^3 + 4.93\omega_n^2 s^2 + 5.14\omega_n^3 s + \omega_n^4$$
$$s^5 + 2.19\omega_n s^4 + 6.50\omega_n^2 s^3 + 6.30\omega_n^3 s^2 + 5.24\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

Para una entrada de rampa, se han determinado los coeficientes que minimizan el criterio ITAE para la función general de transferencia de lazo cerrado [6]

$$T(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}. \tag{5.50}$$

Esta función de transferencia tiene un error en estado estacionario igual a cero para una entrada de rampa. En la Tabla 5.7 se proporcionan los coeficientes óptimos para esta función de transferencia. La función de transferencia, Ecuación (5.50), implica que la planta $G(s)$ tiene dos o más integraciones puras, como se requiere para proporcionar un error cero en estado estacionario. ■

5.10. SIMPLIFICACIÓN DE SISTEMAS LINEALES

Es muy útil estudiar sistemas complejos con funciones de transferencia de alto orden usando modelos de aproximación de orden reducido. Por ejemplo, un sistema de cuarto orden podría aproximarse mediante un sistema de segundo orden, utilizando los índices de la Figura 5.8. Actualmente se dispone de varios métodos para reducir el orden de una función de transferencia de sistemas.

Una manera relativamente sencilla de eliminar cierto polo insignificante de una función de transferencia es ver un polo que tenga parte real negativa que es mucho mayor que la del resto de los polos. De esta manera, se espera que el polo afecta muy poco a la respuesta transitoria.

Por ejemplo, si se tiene una planta de un sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+30)},$$

seguramente se puede despreciar el impacto del polo en $s = -30$. Sin embargo, se debe conservar la respuesta en estado estacionario del sistema; por tanto, se reduce el sistema a

$$G(s) = \frac{(K/30)}{s(s+2)}.$$

Un método más sofisticado intenta hacer coincidir lo máximo posible la respuesta en frecuencia de la función de transferencia de orden reducido con la respuesta en frecuencia de la función de transferencia original. Aunque los métodos de respuesta en frecuencia se estudian en el Capítulo 8, el método de aproximación asociado se basa

estrictamente en manipulaciones algebraicas y se presenta aquí. Se supondrá que el sistema de alto orden está descrito por la función de transferencia

$$H(s) = K\frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + 1}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + 1}, \tag{5.51}$$

en la cual los polos están a la izquierda del plano s, y $m \leq n$. La función de transferencia aproximada de orden reducido es

$$L(s) = K\frac{c_p s^p + \cdots + c_1 s + 1}{d_q s^q + \cdots + d_1 s + 1}, \tag{5.52}$$

donde $p \leq q < n$. Obsérvese que, con el objeto de asegurar la misma respuesta de estado estacionario, la constante de ganancia K es la misma para el sistema original y el aproximado. El método expuesto en el Ejemplo 5.9 se basa en la selección de c_i y d_i de forma que $L(s)$ tenga una respuesta de frecuencia casi igual a la de $H(s)$ (*véase* el Capítulo 8). Esto equivale a establecer que $H(j\omega)/L(j\omega)$ se debe desviar la mínima cantidad respecto de la unidad para varias frecuencias. Los coeficientes c y d se obtienen utilizando la siguiente ecuación:

$$M^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k}M(s) \tag{5.53}$$

y

$$\Delta^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k}\Delta(s), \tag{5.54}$$

donde $M(s)$ y $\Delta(s)$ son los polinomios del numerador y del denominador de $H(s)/L(s)$, respectivamente. También se define

$$M_{2q} = \sum_{k=0}^{2q}\frac{(-1)^{k+q}M^{(k)}(0)M^{(2q-k)}(0)}{k!(2q-k)!}, \qquad q = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.55}$$

y una ecuación completamente idéntica para Δ_{2q}. Las soluciones para los coeficientes c y d se obtienen igualando

$$M_{2q} = \Delta_{2q} \tag{5.56}$$

para $q = 1, 2, \ldots$ hasta el número requerido para resolver los coeficientes desconocidos.

Se considera un ejemplo con el objeto de aclarar el uso de estas ecuaciones.

EJEMPLO 5.9. Modelo simplificado

Considérese el sistema de tercer orden

$$H(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{1}{1 + (^{11}/_6)s + s^2 + (^1/_6)s^3}. \tag{5.57}$$

Utilizando el modelo de segundo orden

$$L(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2}, \tag{5.58}$$

se determina que

$$M(s) = 1 + d_1 s + d_2 s^2 \quad \text{y} \quad \Delta(s) = 1 + (^{11}/_6)s + s^2 + (^1/_6)s^3.$$

Entonces se sabe que

$$M^0(s) = 1 + d_1 s + d_2 s^2, \tag{5.59}$$

y $M^0(0) = 1$. Igualmente, se tiene

$$M^1 = \frac{d}{ds}(1 + d_1 s + d_2 s^2) = d_1 + 2d_2 s. \tag{5.60}$$

Por tanto, $M^1(0) = d_1$. Continuando con este proceso, se obtiene que

$$\begin{aligned} M^0(0) &= 1 & \Delta^0(0) &= 1, \\ M^1(0) &= d_1 & \Delta^1(0) &= {}^{11}/_6, \\ M^2(0) &= 2d_2 & \Delta^2(0) &= 2, \end{aligned} \tag{5.61}$$

y

$$M^3(0) = 0 \qquad \Delta^3(0) = 1.$$

Ahora se iguala $M_{2q} = \Delta_{2q}$ para $q = 1$ y 2. Se obtiene que, para $q = 1$,

$$\begin{aligned} M_2 &= (-1)\frac{M^0(0)M^2(0)}{2} + \frac{M^1(0)M^1(0)}{1} + (-1)\frac{M^2(0)M^0(0)}{2} \\ &= -d_2 + d_1^2 - d_2 = -2d_2 + d_1^2. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Entonces, como la ecuación para Δ_2 es idéntica, se tiene

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (-1)\frac{\Delta^0(0)\Delta^2(0)}{2} + \frac{\Delta^1(0)\Delta^1(0)}{1} + (-1)\frac{\Delta^2(0)\Delta^0(0)}{2} \\ &= -1 + \frac{121}{36} - 1 = \frac{49}{36}. \end{aligned} \tag{5.63}$$

De la Ecuación (5.56) con $q = 1$ se observa que $M_2 = \Delta_2$; por tanto,

$$-2d_2 + d_1^2 = {}^{49}/_{36}. \tag{5.64}$$

Completando el proceso para $M_4 = \Delta_4$, se obtiene

$$d_2^2 = {}^7/_{18}. \tag{5.65}$$

Resolviendo las Ecuaciones (5.64) y (5.65) se obtiene que $d_1 = 1.615$ y $d_2 = 0.625$. (Los otros conjuntos de soluciones se desprecian, pues conducen a polos inestables.) La función de transferencia de orden reducido es

$$L(s) = \frac{1}{1 + 1.615s + 0.625s^2} = \frac{1.60}{s^2 + 2.584s + 1.60}. \tag{5.66}$$

Es interesante ver que los polos de $H(s)$ están en $s = -1, -2, -3$, mientras que los polos de $L(s)$ están en $s = -1.029$ y -1.555. Como el modelo de orden reducido tiene dos polos, se puede estimar que se obtendría una respuesta ligeramente sobreamortiguada con un tiempo de asentamiento, dentro del 2% del valor final, de aproximadamente tres segundos. ■

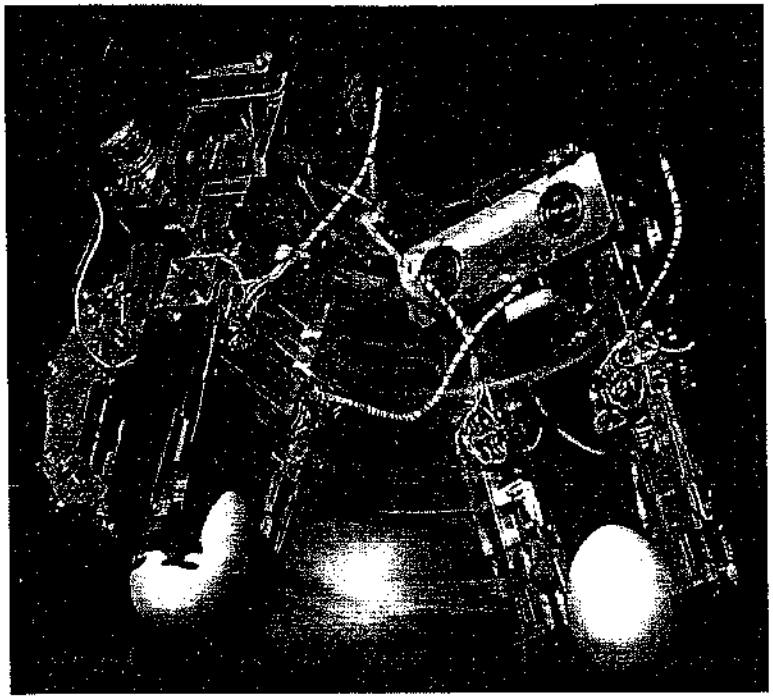


FIGURA 5.33
Una mano de robot de alto rendimiento con un tacto delicado ilustra el reto a que se enfrentan los sistemas de control modernos de alto rendimiento. (Fotografía por cortesía de Hitachi America Ltd.)

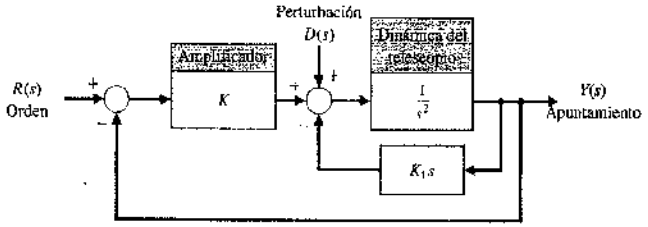
Algunas veces es deseable conservar los polos dominantes del sistema original, $H(s)$, en el modelo de orden reducido. Esto puede lograrse especificando el denominador de $L(s)$ como los polos dominantes de $H(s)$ y permitiendo que el numerador de $L(s)$ esté sujeto a aproximaciones. Un sistema complejo como la mano de robot de la Figura 5.33 es un ejemplo de sistema de alto orden que se puede representar adecuadamente por medio de un modelo de orden reducido.

Otro método original y útil para reducir el orden es el método de aproximación de Routh basado en la idea de truncar la tabla de Routh utilizada para determinar la estabilidad. Las aproximaciones de Routh se pueden calcular mediante un algoritmo recursivo finito que es adecuado para programarse en un computador digital [22].

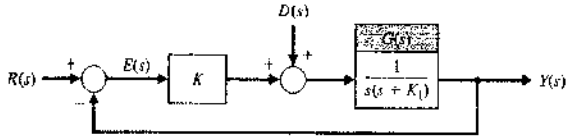
5.11. EJEMPLO DE DISEÑO: CONTROL DE APUNTAMIENTO DEL TELESCOPIO HUBBLE

El telescopio espacial Hubble en órbita es el instrumento científico más complejo y caro que se ha construido. Lanzado a 380 millas sobre la tierra el 24 de abril de 1990, el telescopio ha empujado a la tecnología a nuevos límites. El espejo del telescopio de 2.4 metros (94.5 pulgadas) tiene la superficie más lisa que la de cualquier espejo que se haya hecho, y su sistema de apuntamiento puede centrarse sobre una moneda a 400 millas de distancia [21]. El espejo tuvo una aberración esférica que en gran parte se corri-

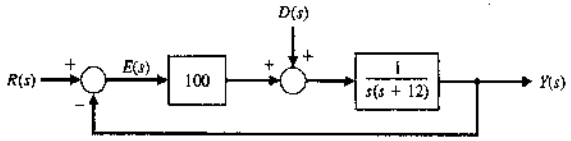
gió durante misiones espaciales en 1993 y 1997 [24]. Considérese el modelo del sistema de apuntamiento del telescopio que se muestra en la Figura 5.34.



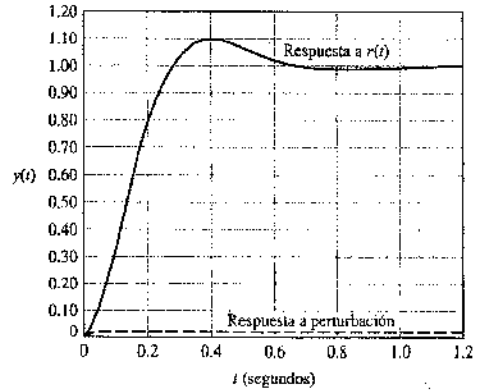
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 5.34
(a) Sistema de apuntamiento del telescopio Hubble, (b) diagrama de bloques reducido. (c) diseño del sistema y (d) respuesta del sistema a una orden de entrada de escalón unitario y a una entrada de perturbación de escalón unitario.

El objetivo del diseño es elegir K_1 y K tal que (1) el porcentaje de sobreelongación de la salida a una orden escalón, $r(t)$, sea menor o igual al 10%, (2) el error en estado estacionario a una orden rampa sea mínimo, y (3) el efecto de una perturbación de escalón sea reducido. Como el sistema tiene un lazo interno, la reducción del diagrama de bloques puede utilizarse para obtener el sistema simplificado de la Figura 5.34(b).

La fórmula de la ganancia del flujo de señal de Mason puede utilizarse para obtener la salida debida a las dos entradas del sistema de la Figura 5.34(b), o

$$Y(s) = T(s)R(s) + [T(s)/K]D(s), \tag{5.67}$$

donde

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{KG(s)}{1 + L(s)}.$$

El error es

$$E(s) = \frac{1}{1 + L(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + L(s)} D(s). \tag{5.68}$$

En primer lugar se seleccionan K y K_1 para conseguir el porcentaje de sobreelongación requerida para una entrada de escalón, $R(s) = A/s$. Fijando $D(s) = 0$, se tiene

$$Y(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} R(s)$$

$$= \frac{K}{s(s + K_1) + K} \left(\frac{A}{s}\right) = \frac{K}{s^2 + K_1 s + K} \left(\frac{A}{s}\right). \tag{5.69}$$

Para fijar la sobreelongación por debajo del 10%, se selecciona $\zeta = 0.6$ examinando la Figura 5.8 o utilizando la Ecuación (5.16) para determinar que la sobreelongación será del 9.5% para $\zeta = 0.6$. A continuación se examina el error en estado estacionario para una rampa, $r(t) = Bt$, $t \geq 0$, utilizando (Ecuación 5.28):

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left\{ \frac{B}{sKG(s)} \right\} = \frac{B}{(K/K_1)}. \tag{5.70}$$

El error estacionario debido a una perturbación de escalón unitario es igual a $-1/K$. (¿Puede demostrar esto?) La respuesta transitoria del error debido a una entrada de perturbación en escalón puede reducirse aumentando K (*véase* la Ecuación 5.68). Resumiendo, se busca una K grande y un valor grande de (K/K_1) para obtener un error en estado estacionario pequeño para una entrada de rampa (*véase* la Ecuación 5.70). Sin embargo, también se requiere $\zeta = 0.6$ para limitar la sobreelongación.

Para este diseño, se necesita seleccionar K. Con $\zeta = 0.6$, la ecuación característica del sistema es

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = (s^2 + 2(0.6)\omega_n s + K). \tag{5.71}$$

Por tanto, $\omega_n = \sqrt{K}$, y el segundo término del denominador de la Ecuación (5.69) requiere $K_1 = 2(0.6)\omega_n$. Luego $K_1 = 1.2\sqrt{K}$, o la razón K/K_1 llega a ser

$$\frac{K}{K_1} = \frac{K}{1.2\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{K}}{1.2}.$$

Seleccionando $K = 25$, se tiene $K_1 = 6$ y $K/K_1 = 4.17$. Si se selecciona $K = 100$, se tiene $K_1 = 12$ y $K/K_1 = 8.33$. De manera real, se debe limitar K para que la operación del sistema sea lineal. La Figura 5.34(c) muestra el sistema que se obtiene cuando se

utiliza $K = 100$. La Figura 5.34(d) muestra las respuestas del sistema a una orden de entrada de escalón unitario y a una entrada de perturbación de escalón unitario. Obsérvese cómo el efecto de la perturbación es relativamente insignificante.

Finalmente, obsérvese que el error en estado estacionario para una entrada de rampa (*véase* la Ecuación 5.70) es

$$e_{ss} = \frac{B}{8.33} = 0.12B.$$

Este diseño, utilizando $K = 100$, es un sistema excelente.

5.12. COMPORTAMIENTO DE SISTEMAS UTILIZANDO MATLAB Y SIMULINK

En esta sección, se analizarán las especificaciones de comportamiento en el dominio del tiempo dadas en términos de respuesta transitoria para una señal de entrada específica y los errores de seguimiento en estado estacionario resultantes. Se finalizará con un análisis de la simplificación de sistemas lineales. La función de MATLAB que se introduce en esta sección es impulse. Se revisará la función lsim (introducida en el Capítulo 3) y se verá cómo estas funciones se utilizan para simular un sistema lineal. También se introduce la utilización de Simulink. El Apéndice B muestra un resumen de los elementos básicos de Simulink. En la web de MCS se pueden encontrar más ejemplos con Simulink.

Especificaciones en el dominio temporal. Las especificaciones de comportamiento en el dominio temporal generalmente vienen dadas en términos de la respuesta transitoria de un sistema a una señal de entrada específica. Como las señales de entrada reales son generalmente desconocidas, se suele utilizar una señal de entrada estándar de prueba.

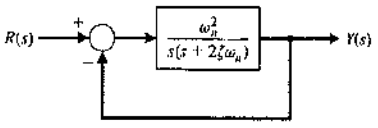


FIGURA 5.35
Sistema realimentado de segundo orden con lazo simple.

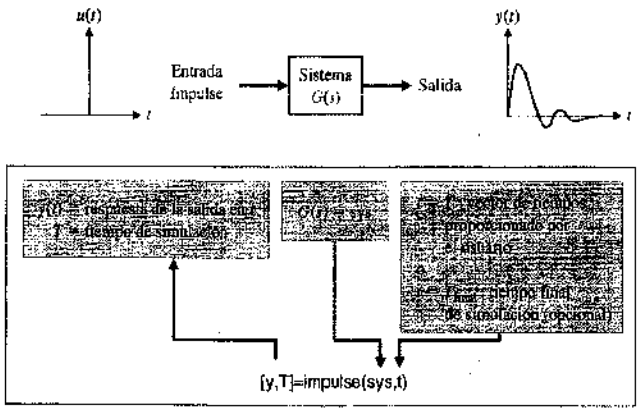
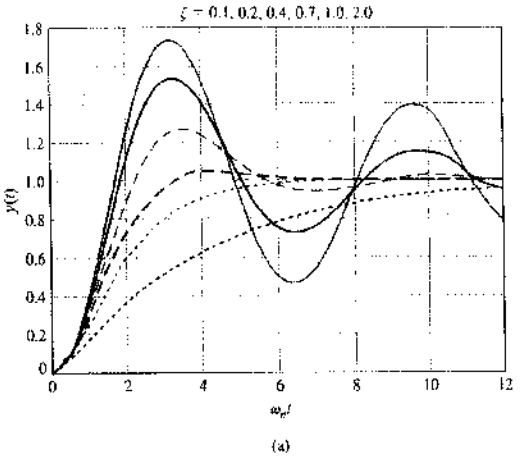


FIGURA 5.36
Función **Impulse**.



(a)

stepresp.m

```
%Cálculo de la respuesta a un escalón para un sistema de segundo orden
%Duplicar la Figura 5.5 (a)
%
t=[0:0.1:12]; num=[1];
zeta1=0.1; den1=[1 2*zeta1 1]; sys1=tf(num,den1);
zeta2=0.2; den2=[1 2*zeta2 1]; sys2=tf(num,den2);
zeta3=0.4; den3=[1 2*zeta3 1]; sys3=tf(num,den3);
zeta4=0.7; den4=[1 2*zeta4 1]; sys4=tf(num,den4);
zeta5=1.0; den5=[1 2*zeta5 1]; sys5=tf(num,den5);
zeta6=2.0; den6=[1 2*zeta6 1]; sys6=tf(num,den6);
%
[y1,T1]=step(sys1,t); [y2,T2]=step(sys2,t);
[y3,T3]=step(sys3,t); [y4,T4]=step(sys4,t);
[y5,T5]=step(sys5,t); [y6,T6]=step(sys6,t);
%
plot(T1,y1,T2,y2,T3,y3,T4,y4,T5,y5,T6,y6)
xlabel(' \omega_n t'), ylabel('y(t)')
title('\zeta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 1.0, 2.0'), grid
```

Cálculo de la respuesta escalón

Generación de gráficos y etiquetas

(b)

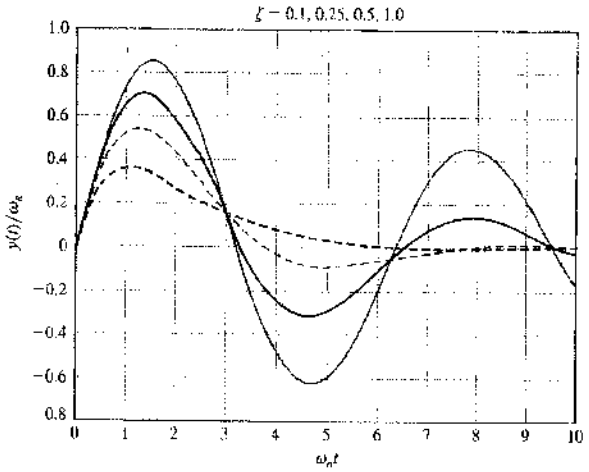
FIGURA 5.37
(a) Respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada en escalón.
(b) Programa de MATLAB.

Considérese el sistema de segundo orden que se muestra en la Figura 5.35. La salida en lazo cerrado es

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s). \tag{5.72}$$

La utilización de la función step para el cálculo de la respuesta a un escalón de un sistema ya ha sido analizada. Ahora se estudia otra señal de prueba importante: el impulso. La respuesta impulsional es la derivada en el tiempo de la respuesta a un escalón. La Figura 5.36 muestra el cálculo de la respuesta impulsional con la función impulse.

Con la función step se puede obtener una gráfica similar a la de la Figura 5.5(a), tal como se muestra en la Figura 5.37. Utilizando la función impulse, se puede obtener una gráfica similar a la de la Figura 5.6. La Figura 5.38 muestra la respuesta de un sistema



(a)

impresp.m

```
%Cálculo de la respuesta impusional para un sistema de segundo orden
%Duplicar la Figura 5.6
%
t=[0:0.1:10]; num=[1];
zeta1=0.1; den1=[1 2*zeta1 1]; sys1=tf(num,den1);
zeta2=0.25; den2=[1 2*zeta2 1]; sys2=tf(num,den2);
zeta3=0.5; den3=[1 2*zeta3 1]; sys3=tf(num,den3);
zeta4=1.0; den4=[1 2*zeta4 1]; sys4=tf(num,den4);
%
[y1,T1]=impulse(sys1,t);
[y2,T2]=impulse(sys2,t);
[y3,T3]=impulse(sys3,t);
[y4,T4]=impulse(sys4,t);
%
plot(t,y1,t,y2,t,y3,t,y4)
xlabel(' \omega _nt'), ylabel('y(t)/\omega_n^2')
title('\zeta = 0.1, 0.25, 0.5, 1.0'), grid
```

Cálculo de la respuesta impulsional

Generación de gráficos y etiquetas

(b)

FIGURA 5.38
(a) Respuesta de un sistema de segundo orden a una función de impulso como entrada.
(b) Programa de MATLAB.

de segundo orden para una función de impulso como entrada. En el programa, se fija $\omega_n = 1$, que equivale a calcular la respuesta a un escalón frente a $\omega_n t$. Esto proporciona una gráfica más general válida para cualquier $\omega_n > 0$.

En muchos casos, puede ser necesario simular la respuesta del sistema a una entrada arbitraria pero conocida. En estos casos, se utiliza la función lsim. La Figura 5.39 muestra la función lsim. La función lsim se estudió en el Capítulo 3 para su utilización con modelos en variables de estado; sin embargo, ahora se considera la utilización de lsim en modelos con funciones de transferencia. El Ejemplo 5.10 es un ejemplo de la utilización de lsim.

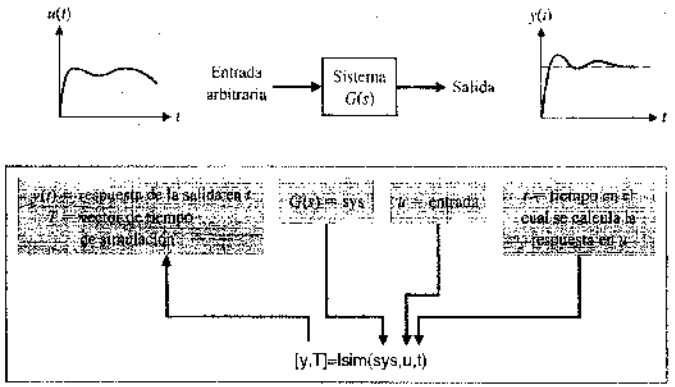


FIGURA 5.39
Función lsim.

EJEMPLO 5.10. Control de la dirección de un robot móvil

La Figura 5.19 muestra el diagrama de bloques para el sistema de control de dirección de un robot móvil. Supóngase que la función de transferencia del controlador de dirección es

$$G_1(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}.$$

Cuando la entrada es una rampa, el error en estado estacionario es

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v}, \tag{5.73}$$

donde

$$K_v = K_2 K.$$

El efecto de la constante del controlador, K_2, sobre el error en estado estacionario es evidente a partir de la Ecuación (5.73). Cuando K_2 es grande, el error en estado estacionario es pequeño.

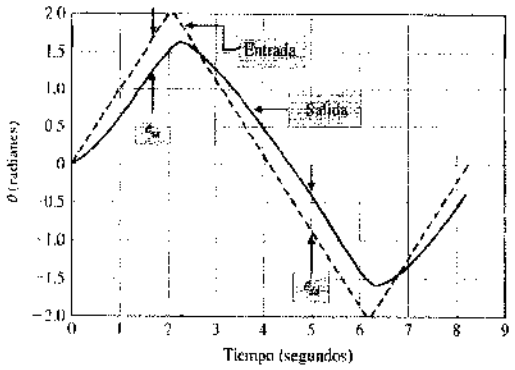
Se puede simular la respuesta del sistema en lazo cerrado para una entrada de rampa utilizando la función lsim. Las ganancias del controlador, K_1 y K_2, y la ganancia del sistema, K, pueden representarse simbólicamente en el programa de forma que se puedan seleccionar y simular varios valores. La Figura 5.40 muestra los resultados para $K_1 = K = 1$, $K_2 = 2$ y $\tau = 1/10$. ■

Simplificación de sistemas lineales. Es posible desarrollar un modelo aproximado de orden reducido que se parezca mucho a la respuesta entrada-salida de un sistema de orden superior. La Sección 5.10 muestra un procedimiento para la aproximación de funciones de transferencia. Se puede utilizar MATLAB para comparar el modelo aproximado con el modelo real; el siguiente ejemplo ilustra este hecho.

EJEMPLO 5.11. Modelo simplificado

Considérese el sistema de tercer orden

$$H(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}.$$



(a)

mobilerobot.m

```
%Cálculo de la respuesta del control de un robot móvil
%Sistema para una entrada de onda triangular
%
numg=[10 20]; deng=[1 10 0]; sysg=tf(numg,deng);
[sys]=feedback(sysg, [1]);
t=[0:0.1:8.2]';
v1=[0:0.1:2]';v2=[2:-0.1:-2]';v3=[-2:0.1:0]';
u=[v1;v2;v3];
[y,T]=lsim(sys,u,t);
plot(T,y,t,u,'--'),
xlabel('Tiempo (segundos)'), ylabel('\theta (radianes)'), grid
```

(b)

FIGURA 5.40
(a) Respuesta transitoria del sistema de control de dirección de un robot móvil a una entrada de rampa. (b) Programa de MATLAB.

Una aproximación de segundo orden (*véase* el Ejemplo 5.9) es

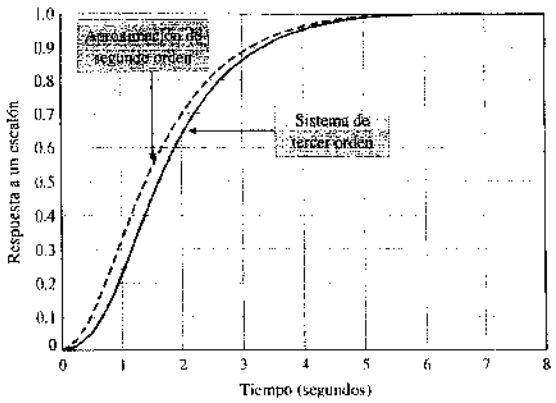
$$L(s) \approx \frac{1.60}{s^2 + 2.584s + 1.60}.$$

La Figura 5.41 muestra una comparación de sus respectivas respuestas a un escalón. ■

EJEMPLO 5.12. Control del balanceo de un avión utilizando Simulink

Cada vez que uno vuela en una aerolínea comercial, se experimenta de primera mano los beneficios de los sistemas de control automático que ayudan a los pilotos durante los vuelos. Un modelo matemático exacto que describe el movimiento de un avión es un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, no lineales y variantes en el tiempo (*véase* la web de MCS para un mayor detalle sobre cuestiones de modelado). A efectos de este análisis, para el proceso de diseño del piloto automático se requiere un modelo de dinámicas simplificado. Un modelo simplificado consiste de una función de transferencia que describa la relación entrada-salida entre la desviación del alerón y el ángulo de balanceo del avión, un modelo del alerón y el controlador [25]. La Figura 5.42(a) ilustra los alerones y el ángulo de balanceo. La Figura 5.42(b) muestra un modelo del sistema de control realimentado para un avión volando a baja velocidad con una posición del nivel de las alas estabilizadas. El sistema de control debería mantener el ángulo de balanceo del avión cerca de cero grados [$\varphi_r(s) = 0$] y mantener la orientación del nivel de las alas en presencia de perturbaciones externas no predecibles.

La simulación con Simulink que se muestra en la Figura 5.43 puede utilizarse para estudiar el sistema de control realimentado. Se pueden seleccionar muchos de los parámetros del sistema abriendo (es decir, pulsando dos veces con el botón del ratón) las cajas de la **Ganancia, Actuador del alerón, Dinámica del avión** y **Ganancia de giro** e introducir nuevos parámetros en la ventana emergente asociada. Por ejemplo, al abrir la caja de Ganancia se visualiza la ventana que se muestra en la Figura 5.44. Utilice la ventana emergente para especificar el valor de la ganancia de control. Para mover la ventana y evitar tapar el diagrama de bloques, seleccione un punto cualquiera de la barra del título de la ventana de control de la simulación y pulse y arrastre la ventana a la situación que desee de su escritorio.



(a)

stepcomp.m

```
% Comparación de una respuesta a un escalón para una aproximación de segundo orden
%
num1=[6]; den1=[1 6 11 6]; sys1=tf(num1,den1);
num2=[1.6]; den2=[1 2.584 1.6]; sys2=tf(num2,den2);
t=[0:0.1:8];
[y1,T1]=step(sys1,t);
[y2,T2]=step(sys2,t);
plot(T1,y1,T2,y2,'--'), grid
xlabel('Tiempo (segundos)'), ylabel('Respuesta a un escalón')
```

(b)

FIGURA 5.41
(a) Comparación de la respuesta a un escalón de la función de transferencia aproximada frente a la función de transferencia real. (b) Programa de MATLAB.

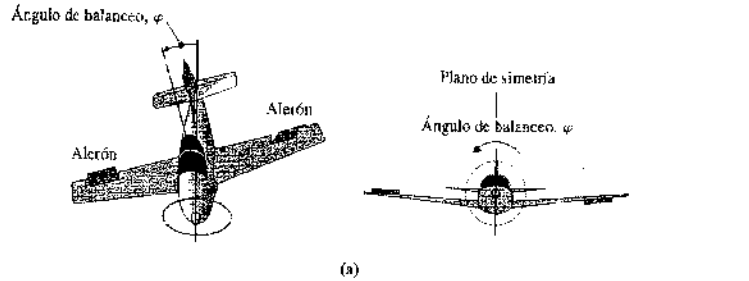


FIGURA 5.42
(a) Control del ángulo de balanceo de un avión utilizando las desviaciones diferenciales de los alerones. (b) Piloto automático del control del ángulo de balanceo.

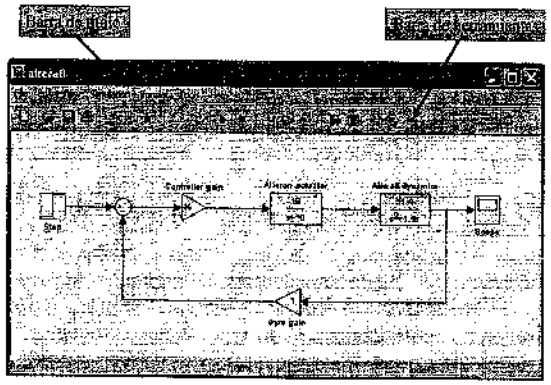


FIGURA 5.43
Ventana de simulación de Simulink con avión, controlador y dinámica del actuador.

Cuando se cambian los parámetros del sistema en las ventanas emergentes, los parámetros son inmediatamente actualizados en el diagrama. Las Figuras 5.45 y 5.46 muestran la visualización de las ventanas abiertas para el actuador del alerón y la dinámica del avión. Los principales componentes del modelo del avión son la ganancia del controlador $G_c(s) = K$, el modelo del actuador

$$G_a(s) = \frac{10}{s + 10}$$

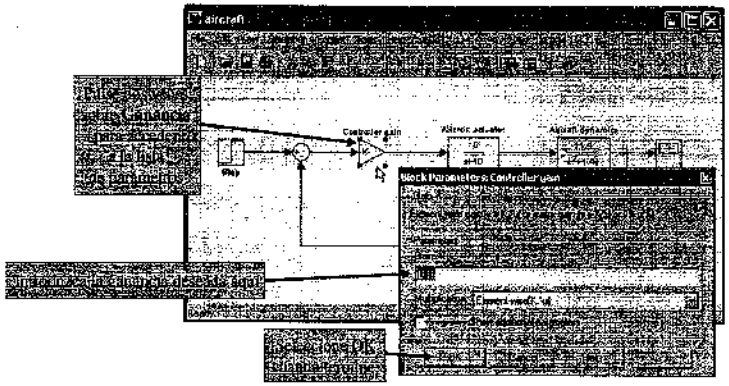


FIGURA 5.44
Ventana emergente utilizada para cambiar la ganancia del controlador.

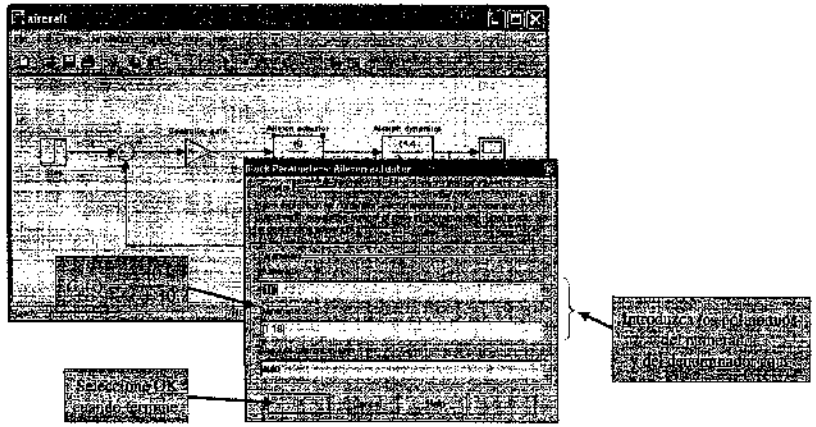


FIGURA 5.45
Ventana emergente utilizada para cambiar la función de transferencia del actuador del alerón.

y el modelo de movimiento de balanceo del avión

$$G(s) = \frac{11.4}{s^2 + 1.4s}$$

Antes de ejecutar la simulación, se necesita fijar el tiempo final de simulación. Desde el menú **Simulation**, seleccione **Parameters** como se muestra en la Figura 5.47. La ventana emergente de **Simulation Parameters** proporciona acceso a varias rutinas de integración numérica así como a los tiempos de inicio y finalización de la simulación.

Después de realizar los cambios deseados, seleccione el botón de **OK**. Para comenzar la simulación, seleccione la opción **Start** desde el menú **Simulation**, tal como muestra la Figura 5.48. La simulación se ejecuta hasta que se alcance el tiempo de finali-

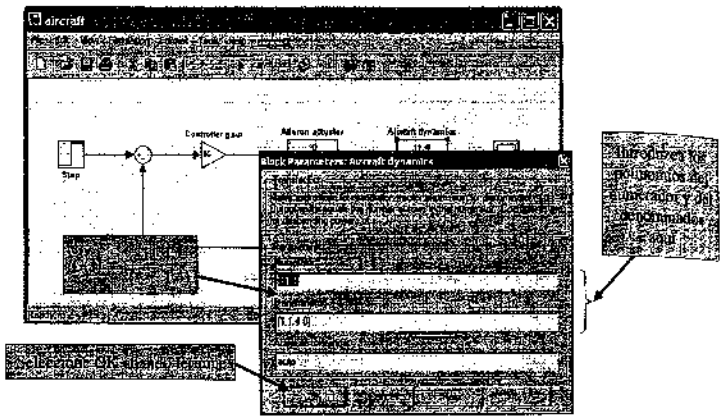


FIGURA 5.46. Ventana emergente utilizada para cambiar la función de transferencia de la dinámica del avión.

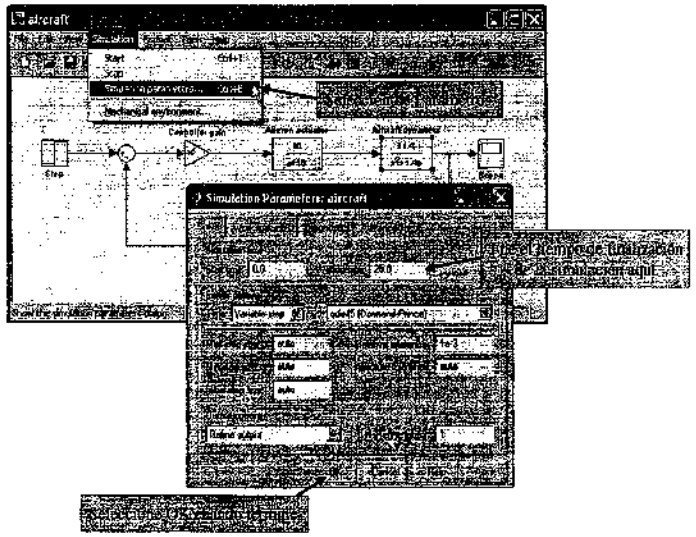


FIGURA 5.47. Selecciónese **Parámetros** desde el menú de **Simulación**.

zación deseado. La Figura 5.48 muestra cómo se puede también iniciar y parar la simulación utilizando los botones de la barra de herramientas.

Durante la ejecución de la simulación, la gráfica de respuesta temporal (generada por el Scope) se actualiza dinámicamente. La Figura 5.49 muestra la ejecución de una simulación con una ganancia del controlador $K = 0.16$. Para un ajuste fino de la simulación, se pueden cambiar algunas o todas las funciones de transferencia o ganancias. ■

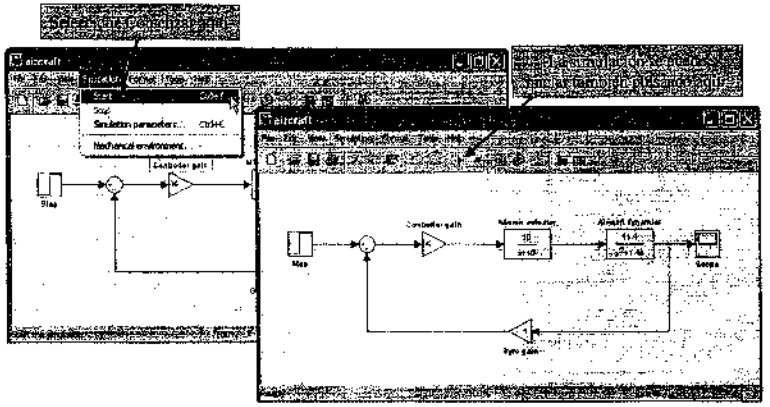


FIGURA 5.48. Comienzo de la simulación.

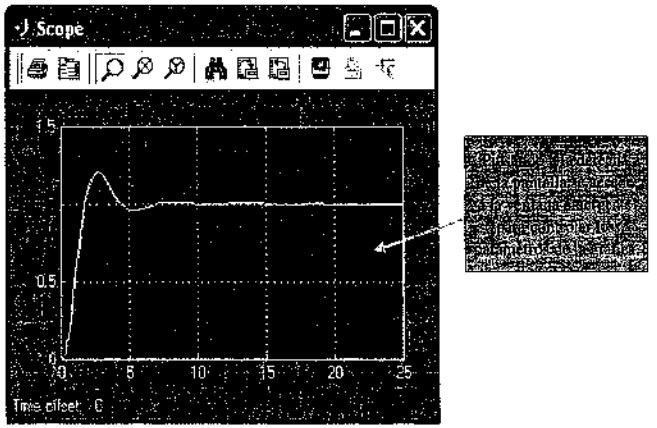


FIGURA 5.49. La simulación de Simulink con el gráfico escalado muestra la respuesta del ángulo de balanceo a una entrada de escalón.

5.13. EJEMPLO DE DISEÑO SECUENCIAL: SISTEMA DE LECTURA DE UNA UNIDAD DE DISCO

En la Sección 4.10, se consideró la respuesta del sistema de control de una cabeza de lectura en lazo cerrado. Se considera nuevamente el sistema que se muestra en la Figura 4.33. En esta sección, se considera de nuevo el proceso de diseño repetido como Figura 5.50. Se especificará el comportamiento deseado para el sistema tal como se requirió en el paso 3. A continuación se intentará ajustar la ganancia del amplificador, K_a, para obtener el mejor comportamiento posible.

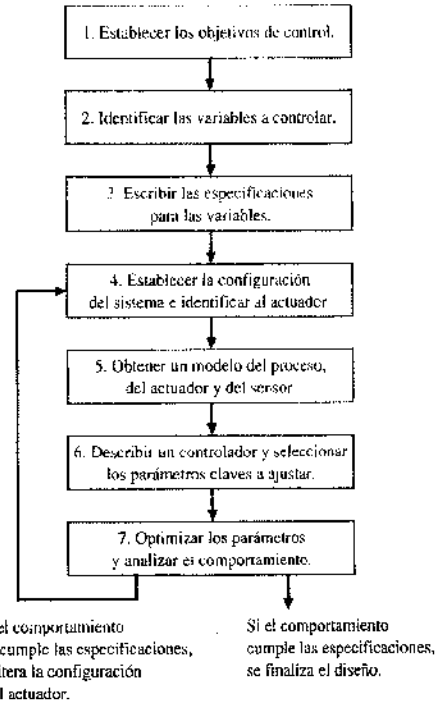

1. Establecer los objetivos de control.
2. Identificar las variables a controlar.
3. Escribir las especificaciones para las variables.
4. Establecer la configuración del sistema e identificar al actuador
5. Obtener un modelo del proceso, del actuador y del sensor
6. Describir un controlador y seleccionar los parámetros claves a ajustar.
7. Optimizar los parámetros y analizar el comportamiento.
Si el comportamiento no cumple las especificaciones, se itera la configuración y el actuador.
Si el comportamiento cumple las especificaciones, se finaliza el diseño.

FIGURA 5.50. Proceso de diseño de un sistema de control.

Tabla 5.8 Especificaciones para la respuesta transitoria

Medida de comportamiento	Valor deseado
Sobreelongación porcentual	Menor que 5%
Tiempo de asentamiento	Menor que 250 ms
Máximo valor de la respuesta a una perturbación de escalón unitario	Menor que 5×10^{-3}

El objetivo es alcanzar la respuesta más rápida a una entrada en escalón $r(t)$ mientras (1) se limite la sobreelongación y la oscilación natural de la respuesta y (2) se reduzca el efecto de una perturbación en la posición de salida de la cabeza de lectura. La Tabla 5.8 resume las especificaciones.

Se considera el modelo de segundo orden del motor y del brazo, que no tiene en cuenta el efecto de la bobina de la inductancia. La Figura 5.51 muestra el sistema en lazo cerrado que se tiene. Por tanto, la salida (*véase* la Sección 5.3) cuando $D(s) = 0$ es

$$Y(s) = \frac{5K_a}{s(s + 20) + 5K_a} R(s)$$

$$= \frac{5K_a}{s^2 + 20s + 5K_a} R(s)$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s). \tag{5.74}$$

Por tanto, $\omega_n^2 = 5K_a$ y $2\zeta\omega_n = 20$. La Figura 5.52 muestra cómo se obtiene la respuesta del sistema utilizando MATLAB. La Tabla 5.9 muestra las medidas del comportamiento para los valores seleccionados de K_a.

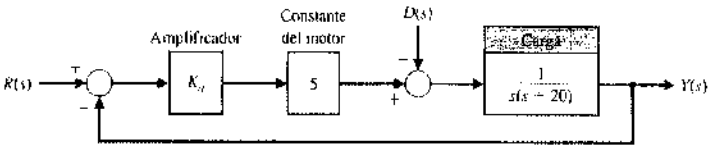
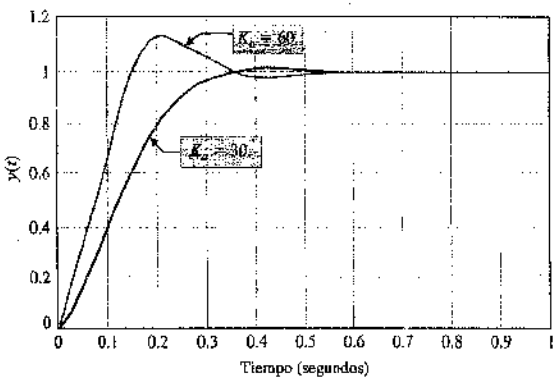


FIGURA 5.51
Modelo de un sistema de control con un modelo de segundo orden del motor y carga.

```
Ka=30;                                  ← Selección de Ka
t=[0:0.01:1];
nc=[Ka*5];dc=[1]; sysc=tf(nc,dc);
ng=[1];dg=[1 20 0]; sysg=tf(ng,dg);
sys1=series(sysc,sysg);                 ← Cálculo de la
sys=feedback(sys1, [1]);                  función de transferencia
y=step(sys,t);                            en lazo cerrado
plot(t,y), grid
xlabel('Tiempo (segundos)')
ylabel('y(t)')
```

(a)



(b)

FIGURA 5.52
Respuesta del sistema a una entrada de escalón unitario, $r(t) = 1$, $t > 0$. (a) Programa de MATLAB. (b) Respuesta para $K_a = 30$ y 60.

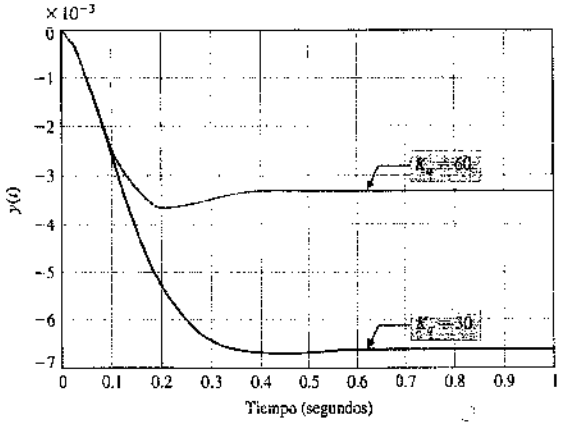
Tabla 5.9. Respuesta para el modelo de segundo orden a una entrada en escalón

K_a	20	30	40	60	80
Sobreelongación porcentual	0	1.2%	4.3%	10.8%	16.3%
Tiempo de asentamiento (s)	0.55	0.40	0.40	0.40	0.40
Razón de amortiguamiento	1	0.82	0.707	0.58	0.50
Máximo valor de la respuesta $y(t)$ a una perturbación de escalón unitario	-10×10^{-3}	-6.6×10^{-3}	-5.2×10^{-3}	-3.7×10^{-3}	-2.9×10^{-3}

Cuando se aumenta K_a a 60, el efecto de una perturbación se reduce un factor de 2. Esto se puede demostrar dibujando la salida, $y(t)$, como resultado de una entrada de perturbación de escalón unitario, tal como muestra la Figura 5.53. Claramente, si se desea cumplir todos los objetivos con este sistema, es necesario seleccionar una ganancia de compromiso. En este caso, $K_a = 40$ es el mejor compromiso. Sin embargo, este compromiso no cumple todas las especificaciones. En el capítulo siguiente se considera otra vez el proceso de diseño de la Figura 5.50 y el cambio de configuración del sistema de control volviendo al paso 4 del proceso de diseño.

```
Ka=30;                                  <- Selección de Ka
t=[0:0.01:1];
nc=[Ka*5];dc=[1]; sysc=tf(nc,dc);
ng=[1];dg=[1 20 0]; sysg=tf(ng,dg);
sys=feedback(sysg,sysc);
sys=-sys;                               <- La perturbación entra como
y=step(sys,t); plot(t,y)                   entrada con signo negativo
xlabel('Tiempo (segundos)'), ylabel('y(t)'), grid
```

(a)



(b)

FIGURA 5.53
Respuesta del sistema a una perturbación de escalón unitario, $D(s) = 1/s$.
(a) Programa de MATLAB.
(b) Respuesta para $K_a = 30$ y 60

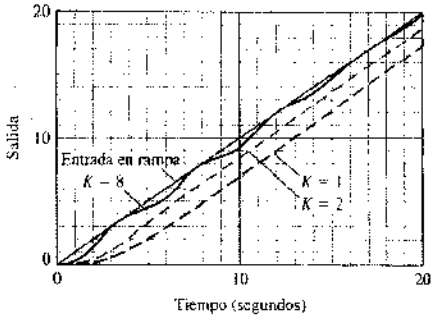


FIGURA 5.54
Respuesta de un sistema realimentado a una entrada de rampa con $K = 1$, 2 y 8 cuando $G(s) = [s(s + 1)(s + 3)]$. El error en estado estacionario se reduce cuando se aumenta K, pero la respuesta llega a ser oscilatoria para $K = 8$

5.14. RESUMEN

En este capítulo se ha considerado la definición y medición del comportamiento de un sistema de control con realimentación. Se analizó el concepto de una medida o índice de comportamiento, mostrando la utilidad de las señales estándar de prueba. Después se mostraron varias medidas de comportamiento para una señal estándar de prueba de entrada de escalón. Por ejemplo, se consideraron la sobreelongación, el tiempo de pico y el tiempo de asentamiento de la respuesta del sistema en prueba, para una señal de entrada de escalón. Se observó el hecho de que las especificaciones en la respuesta deseada suelen ser contradictorias y se propuso el concepto de un compromiso de diseño. Se analizó la relación entre la localización en el plano s de las raíces de la función de transferencia del sistema y la respuesta correspondiente. Una de las medidas más importantes del comportamiento de un sistema es el error en estado estacionario para señales específicas de entrada de prueba. Por esto, utilizando el teorema del valor final, se desarrolló la relación del error de un sistema en estado estacionario en función de los parámetros del sistema. La Figura 5.54 demuestra la capacidad de un sistema de control realimentado. Finalmente, se mostró la utilidad de un índice de comportamiento integral y se presentaron varios ejemplos de diseño en los cuales se minimizó el índice de comportamiento del sistema. Por tanto, este capítulo se centró en la definición y utilidad de las medidas cuantitativas para el comportamiento de sistemas de control con realimentación.

EJERCICIOS

E5.1. Un sistema de control para el mecanismo de discos de un computador debe reducir el efecto de las perturbaciones y las variaciones de los parámetros, así como disminuir el error en estado estacionario. Para el sistema de control de posicionamiento de cabeza, el cual es del tipo que se muestra en la Figura 5.18, donde $H(s) = 1$, no se desea tener error en el estado estacionario. (a) ¿Qué número de tipo se requiere? (¿Cuántas integraciones?) (b) Si la entrada fuera una señal de rampa, entonces, para alcanzar un error en estado estacionario de cero, ¿qué número de tipo se requeriría?

E5.2. La aceleración y la velocidad que puede alcanzar un vehículo de carreras están afectadas por el motor, la carrocería y las llantas [11]. El control de la velocidad del automóvil está representado por el modelo que se muestra en la Figura E5.2. (a) Calcúlese el error en estado estacionario del automóvil correspondiente a una orden de escalón en la velocidad. (b) Calcúlese la sobreelongación de la velocidad correspondiente a una orden de escalón.

Respuesta: (a) $e_{ss} = A/11$; (b) $P.O. = 33\%$

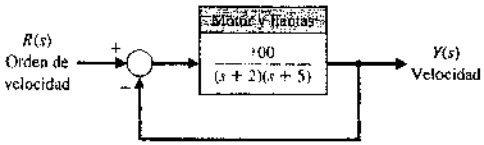


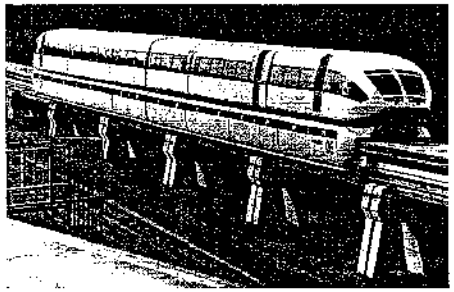
FIGURA E5.2 Control de velocidad de un automóvil de carreras.

E5.3. Durante años, el Amtrak ha batallado para atraer pasajeros a sus rutas en el medio oeste, empleando tecnología desarrollada hace décadas. Durante el mismo tiempo, algunas empresas extranjeras desarrollaron nuevos sistemas de ferrocarriles de pasajeros que pudieran competir ventajosamente con las líneas aéreas. Dos de estos sistemas, el TGV francés y el Shinkansen japonés, alcanzan velocidades de 160 mph [20]. En la Figura E5.3(a) se muestra el Transrapid-06, un tren de levitación magnética experimental de Estados Unidos.

El empleo de la levitación magnética y la propulsión electromagnética para proporcionar a un vehículo movimiento sin contacto, hace que la tecnología del Transrapid-06 sea totalmente diferente de la del Metroliner existente. La parte inferior de un transportador TR-06 (donde estarían las ruedas metálicas de un vagón convencional) se acopla a un riel guía. Los imanes de la parte inferior del riel guía atraen a los electroimanes de la estructura envolvente del vagón tirando hacia el riel guía. Esto suspende al vehículo aproximadamente a un centímetro del riel guía (*véase* el Problema 2.27).

El control de levitación se representa en la Figura E5.3(b). (a) Empleando la Tabla 5.3 para una entrada de escalón, selecciónese la K para que el sistema proporcione una respuesta ITAE óptima. (b) Empleando la Figura 5.8, determínese la sobreelongación esperada correspondiente a una entrada de escalón de $I(s)$.

Respuesta: $K = 100$; 4.6%



(a)

(b)

FIGURA E5.3. Control de un tren en levitación.

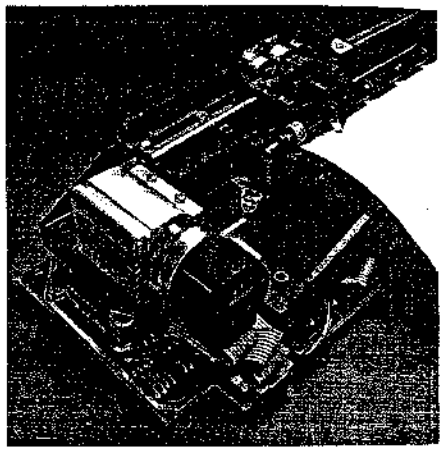
E5.4. Un sistema de realimentación con una realimentación unitaria negativa tiene una planta con función de transferencia

$$G(s) = \frac{2(s + 8)}{s(s + 4)}.$$

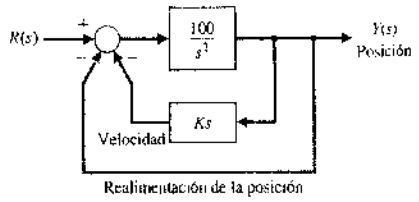
(a) Determínese la función de transferencia de lazo cerrado $T(s) = Y(s)/R(s)$. (b) Hállese la respuesta temporal $y(t)$ para una entrada de escalón $r(t) = 4$ para $t > 0$. (c) Empleando la Figura 5.13(a), determínese la sobreelongación de la respuesta. (d) Mediante el teorema del valor final, determínese el valor de $y(t)$ en estado estacionario.

Respuesta: (b) $y(t) = 1 - 1.07e^{-2t}\operatorname{sen}(\sqrt{7}t + 1.2)$

E5.5. En la Figura E5.5(a) se muestra un plotter de baja inercia. Este sistema se puede representar por el diagrama de bloques que se muestra en la Figura E5.5(b) [18]. (a) Determínese el error en estado estacionario para una entrada de



(a)



(b)

FIGURA E5.5. (a) Plotter x y de Hewlett-Packard. (Cortesía de Hewlett-Packard Co.) (b) Diagrama de bloques del trazador gráfico.

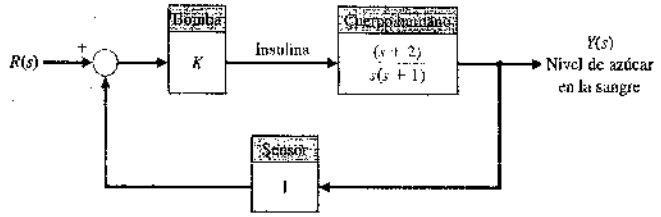


FIGURA E5.6 Control del nivel de azúcar en la sangre.

rampa. (b) Selecciónese un valor de K que produzca una sobreelongación cero correspondiente a una entrada de escalón, pero con la respuesta más rápida posible.

Dibújense los polos y ceros de este sistema y analícese el dominio de los polos complejos. Para una entrada de escalón, ¿qué sobreelongación se esperaría?

E5.6. El control efectivo de las inyecciones de insulina puede conducir a que los diabéticos vivan más tiempo. El control automático de la inyección de insulina por medio de una bomba y un sensor que mide el contenido de azúcar en la sangre puede ser muy efectivo. Como se muestra en la Figura E5.6, el sistema de inyección y bomba tiene un control con realimentación. Calcúlese la ganancia adecuada K para que la sobreelongación de la respuesta de escalón debido a la inyección de la droga sea aproximadamente del 7%. $R(s)$ es el nivel deseado de azúcar en la sangre e $Y(s)$ es el nivel real. (*Sugerencia:* úsese la Figura 5.13a.)

Respuesta: $K = 1.67$

E5.7. Un sistema de control para el posicionamiento de la cabeza de un mecanismo de discos tiene una función de transferencia de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{0.313(s + 0.8)}{(s + 0.6)(s^2 + 4s + 5)}.$$

Dibújense los polos y ceros de este sistema y analícese el dominio de los polos complejos. Para una entrada de escalón, ¿qué sobreelongación se esperaría?

E5.8. Un sistema de control con realimentación negativa unitaria tiene como planta la función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{s(s + \sqrt{2K})}.$$

(a) Determínense el porcentaje de sobreelongación y el tiempo de asentamiento (utilizando un criterio de asentamiento del 2%) debido a una entrada de escalón unitario.

(b) ¿Para qué intervalo de K el tiempo de asentamiento es menor que 1 segundo?

E5.9. Un sistema de control de segundo orden tiene la función de transferencia en lazo cerrado $T(s) = Y(s)/R(s)$. Las especificaciones del sistema para una entrada de escalón son:

(1) Porcentaje de sobreelongación P.O. $\leq 5\%$.
(2) Tiempo de asentamiento $T_s < 4$ segundos.
(3) Tiempo de pico $T_p < 1$ segundo.

Muéstrese el área permisible para los polos de $T(s)$ para alcanzar la respuesta deseada. Utilícese el criterio de asentamiento del 2% para determinar el tiempo de asentamiento.

E5.10. La Figura E5.10 muestra un sistema con realimentación unitaria. Determínense los errores en estado estacionario para una entrada en escalón y una entrada en rampa cuando

$$G(s) = \frac{6(s + 5)}{s(s + 1)(s + 3)(s + 10)}.$$

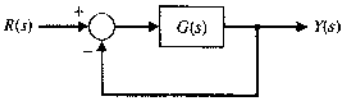


FIGURA E5.10. Sistema con realimentación unitaria.

E5.11. Todo el mundo conoce las ruedas Ferris que se anuncian de forma llamativa en las ferias y carnavales. George Ferris nació en Galesburg en 1859; años después se trasladó a Nevada y se graduó en el Instituto Politécnico de Rensselaer en 1881. En 1891, Ferris tenía suficiente experiencia con el trabajo con hierro y acero y en la construcción de puentes. Creó y construyó su famosa rueda para la Exposición Columbian en Chicago en 1893 [9]. Para evitar el malestar de los pasajeros, fijó como requisito que la velocidad en estado estacionario debía controlarse dentro del 5% de la velocidad deseada para el sistema que se muestra en la Figura E5.11.

(a) Determínese la ganancia K que se necesita para alcanzar el requisito de estado estacionario.

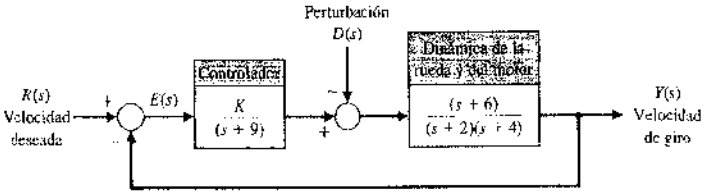


FIGURA E5.11
Control de velocidad de una rueda de Ferris.

(b) Para la ganancia del apartado (a), determínese y dibújese el error $e(t)$ para una perturbación $D(s) = 1/s$. ¿Es el cambio de velocidad mayor que el 5%? (Tómese $R(s) = 0$ para facilitar los cálculos.)

E5.12. Para el sistema con realimentación unitaria de la Figura E5.10 determínense los errores en estado estacionario para una entrada de escalón y una entrada de rampa cuando

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 14s + 50}.$$

Respuesta: $e_{ss} = 0.83$ para un escalón, y $e_{ss} = \infty$ para una rampa.

E5.13. La Figura E5.13 muestra un sistema realimentado.

(a) Determínese el error en estado estacionario para un escalón unitario cuando $K = 0.4$ y $G_p(s) = 1$.
(b) Selecciónese un valor adecuado para $G_p(s)$ tal que el error en estado estacionario sea igual a cero para una entrada de escalón unitario.

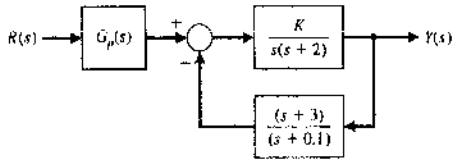


FIGURA E5.13. Sistema realimentado.

E5.14. Un sistema de control en lazo cerrado tiene la función de transferencia $T(s)$ siguiente:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{500}{(s + 10)(s^2 + 10s + 50)}.$$

Dibújese $y(t)$ para una entrada de escalón $R(s)$ cuando (a) se utiliza la $T(s)$ real y (b) se utilizan los polos complejos relativamente dominantes. Compárense los resultados.

E5.15. Un sistema de segundo orden es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{(10/z)(s + z)}{(s + 1)(s + 8)}.$$

Considérese el caso en que $1 < z < 8$. Obténgase la expresión en fracciones parciales, y dibújese $y(t)$ para una entrada de escalón $r(t)$ para $z = 2$, 4 y 6.

E5.16. La función de transferencia $T(s)$ del sistema de control en lazo cerrado tiene dos polos complejos conjugados dominantes. Dibújese la región en el lado izquierdo del plano s donde se deberían localizar los polos para conseguir las siguientes especificaciones:

(a) $0.6 \leqslant \zeta \leqslant 0.8$, $\omega_n \leqslant 10$
(b) $0.5 \leqslant \zeta \leqslant 0.707$, $\omega_n \geqslant 10$
(c) $\zeta \geqslant 0.5$, $5 \leqslant \omega_n \leqslant 10$
(d) $\zeta \leqslant 0.707$, $5 \leqslant \omega_n \leqslant 10$
(e) $\zeta \geqslant 0.6$, $\omega_n \leqslant 6$

E5.17. La Figura E5.17(a) muestra un sistema. La Figura E5.17(b) muestra la respuesta a un escalón unitario cuando $K = 1$. Determínese el valor de K para que el error en estado estacionario sea igual a cero.

Respuesta: $K = 1.25$.

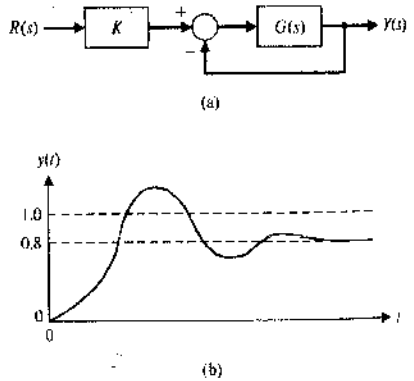


FIGURA E5.17

PROBLEMAS

P5.1. Un problema importante para los sistemas de cámaras de televisión es el salto o el balanceo de la imagen debido al movimiento de la cámara. Este defecto ocurre cuando la cámara se monta en un camión o aeroplano. Se ha diseñado un sistema conocido como Dynalens con el objeto de reducir el efecto del movimiento rápido de exploración; tal sistema se muestra en la Figura P5.1. Se espera un movimiento máximo de exploración de 25°/s. Supóngase que $K_g = K_c = 1$ y que τ_g es despreciable. (a) Determínese el error del sistema $E(s)$. (b) Determínese la ganancia de lazo $K_a K_m K_t$, necesaria cuando se permite un error en estado estacionario de 1°/s. (c) La constante de tiempo del motor es de 0.40 s. Determínese la ganancia de lazo de forma que el tiempo de asentamiento (dentro del 2% del valor final de v_b) sea menor o igual que 0.03 s.

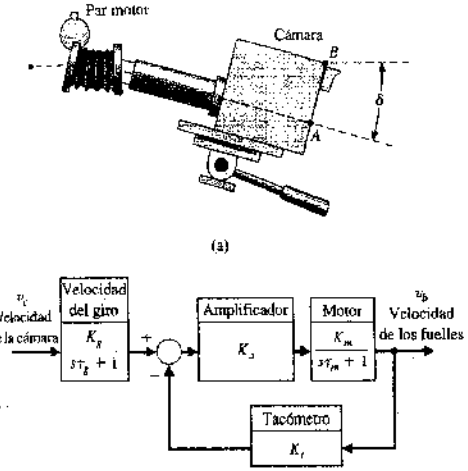


FIGURA P5.1. Control del balanceo de una cámara.

P5.2. Se debe diseñar un sistema de control específico de lazo cerrado para una respuesta amortiguada periódica a una entrada de escalón. Las especificaciones para el sistema son:

10% < porcentaje de sobreelongación < 20%,
Tiempo de asentamiento < 0.6 s.

(a) Identifíquese el área deseada para las raíces dominantes del sistema. (b) Determínese el valor más pequeño de una tercera raíz, r_3, si las raíces conjugadas complejas deben representar la respuesta dominante. (c) La función de transferencia del sistema de lazo cerrado $T(s)$ es de tercer orden y la realimentación tiene una ganancia unitaria. Determínese la función de transferencia directa $G(s) = Y(s)/E(s)$ cuando el tiempo de asentamiento dentro del 2% del valor final es de 0.6 s y el porcentaje de sobreelongación es del 20%.

P5.3. Como se muestra en la Figura P5.3(a), un rayo láser se puede usar para soldar, perforar, grabar, cortar y marcar metales [16]. Se supone que se tiene que realizar un trabajo que requiere un láser muy preciso para marcar una trayectoria parabólica con un sistema de control de lazo cerrado, como se muestra en la Figura P5.3(b). Calcúlese la ganancia necesaria para que se tenga un error en estado estacionario de 5 mm para $r(t) = t^2$ cm.

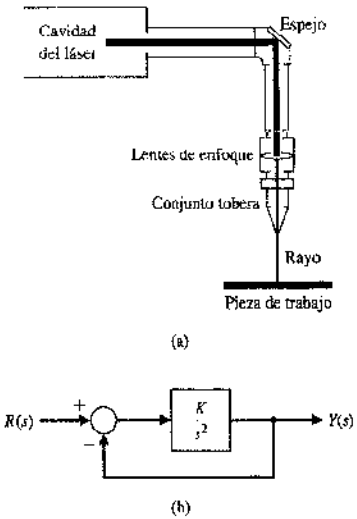


FIGURA P5.3. Control de rayo láser.

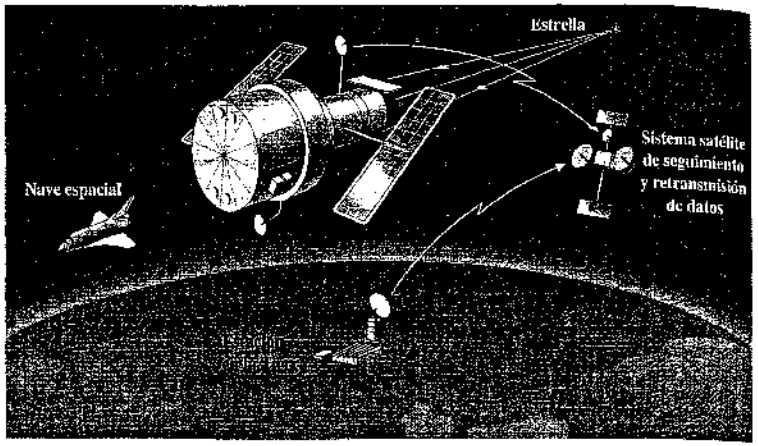
P5.4. La función de transferencia de lazo abierto para un sistema de realimentación negativa unitaria es

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 2)}.$$

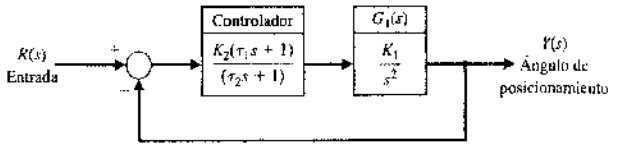
Una respuesta del sistema a una entrada de escalón se especifica como sigue:

tiempo de pico $T_p = 1.1$ s,
porcentaje de sobreelongación P.O. = 5%.

(a) Determínese si ambas especificaciones pueden cumplirse simultáneamente. (b) Si las especificaciones no pueden cumplirse simultáneamente, determínese un valor de compromiso para K de forma que las especificaciones del tiempo de pico y del porcentaje de sobreelongación tengan el mismo porcentaje.



(a)



(b)

FIGURA P5.5
(a) Telescopio espacial. (b) Sistema de control del posicionamiento del telescopio espacial.

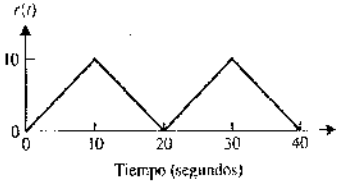
P.5.5. Un telescopio espacial se lanza al espacio para llevar a cabo experimentos astronómicos [9]. El sistema de control de posición se desea que alcance 0.01 minutos de arco y realice un seguimiento de objetos solares con un movimiento aparente hasta los 0.2! minutos por segundo. La Figura P5.5(a) ilustra el sistema. La Figura P5.5(b) muestra el sistema de control. Supóngase que $\tau_1 = 1$ segundo y $\tau_2 = 0$ (una aproximación). (a) Determínese la ganancia $K = K_1K_2$ que se necesita para que la respuesta a una orden escalón sea tan rápida como razonable con una sobreelongación inferior al 5%. (b) Determínense los errores en estado estacionario del sistema para una entrada de escalón y para una entrada de rampa. (c) Determínese el valor de K_1K_2 para un sistema óptimo ITAE para (1) una entrada de escalón y (2) una entrada de rampa.

P5.6. Se programó un robot para que, con una herramienta o soplete de soldar, siguiera una trayectoria prescrita [8, 13]. Considérese que la herramienta debe seguir la trayectoria dentada que se muestra en la Figura P5.6(a). La función de transferencia de la planta es

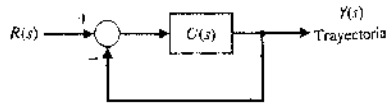
$$G(s) = \frac{75(s + 1)}{s(s + 5)(s + 20)}$$

para el sistema de lazo cerrado que se muestra en la Figura P5.6(b). Calcúlese el error en estado estacionario.

P5.7. Empleando un dispositivo de propulsión con chorro de gas [*véase* la Figura P5.7(a)], el astronauta Bruce McCandless II realizó, el 7 de febrero de 1984, el primer paseo espacial sin ataduras. Como se muestra en la Figura P5.7(b), el controlador se puede representar por una ganancia K_2. La inercia del hombre y su equipo con los brazos a los lados es de 25 kg-m^2. (a) Determínese la ganancia necesaria K_3 para mantener un error en estado estacionario igual a 1 cm cuando la entrada es una rampa $r(t) = t$ (metros). (b) Con esta ganancia K_3, determínese la ganancia necesaria K_1K_2 para restringir el porcentaje de sobreelongación al 10%. (c) Determínese analíticamente la ganancia K_1K_2 para minimizar el índice de comportamiento ISE para una entrada de escalón.

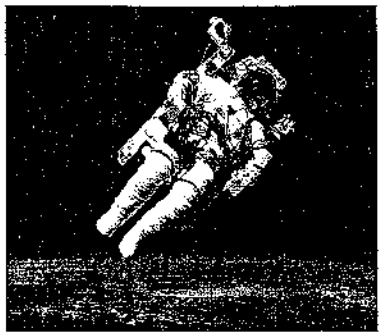


(a)

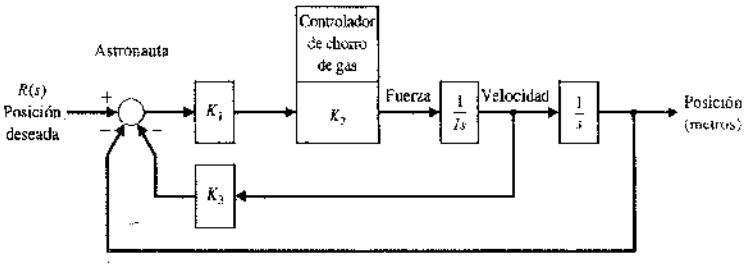


(b)

FIGURA P5.6. Control de trayectoria de un robot.



(a)



(b)

FIGURA P5.7
(a) Se observa al astronauta Bruce McCandless II a unos cuantos metros del transbordador espacial *Challenger* en su órbita terrestre. El astronauta empleó un dispositivo impulsado con nitrógeno y controlado manualmente, denominado unidad de maniobra tripulada. (Por cortesía de National Aeronautics and Space Administration.) (b) Diagrama de bloques del controlador.

P5.8. Las estructuras fotovoltaicas (o celdas solares) generan un voltaje de cc que se puede emplear para impulsar motores de cc, o que se pueden convertir a potencia de ca y agregarse a la red de distribución. Resulta deseable mantener la potencia de salida de la estructura en su máximo disponible cuando la incidencia solar cambia durante el día. En la Figura P5.8 se muestra tal sistema de lazo cerrado. La función de transferencia del proceso es

$$G(s) = \frac{K}{s + 10},$$

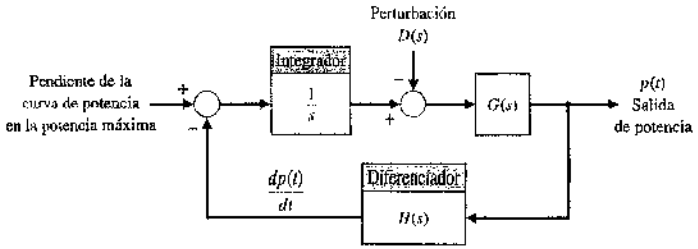


FIGURA P5.8
Control de celda solar.

donde $K = 20$. Hállese: (a) la constante de tiempo para el sistema de lazo cerrado y (b) el tiempo de asentamiento, dentro del 2% del valor final, del sistema cuando hay perturbaciones como la presencia de nubes.

P5.9. La antena que recibe y transmite señales al satélite de comunicación *Telstar* es la más grande que se ha construido. La antena de microondas tiene 177 pies de longitud, pesa 340 toneladas y gira sobre una trayectoria circular. En la Figura P5.9 se muestra una fotografía de esta antena. El satélite *Telstar* tiene 34 pulgadas de diámetro y se desplaza aproximadamente a 16 000 mph, a una altura de 2500 millas. La posición de la antena debe ser ajustada exactamente a 1/10 de grado, puesto que el haz de microondas tiene 0.2° de espesor y está muy atenuado por la gran distancia. Si la antena está siguiendo el movimiento del satélite, determínese la K_v necesaria para el sistema.

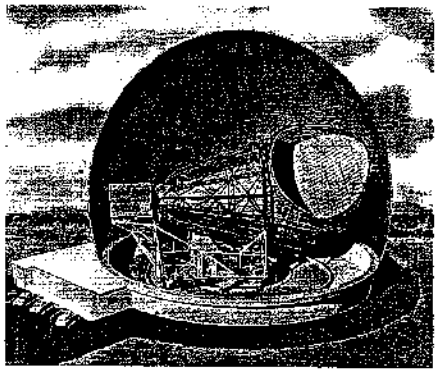


FIGURA P5.9. Modelo de la antena para el sistema del Telstar en Andover, Maine. (Fotografía por cortesía de Bell Telephone Laboratories, Inc.)

P5.10. Un sistema de control de velocidad de un motor de cc controlado por inducido emplea como señal de realimentación el voltaje de la fuerza contraelectromotriz del motor. (a) Dibújese el diagrama de bloques de este sistema (*véase* la Ecuación 2.66). (b) Calcúlese el error en estado estacionario de este sistema correspondiente a una orden de entrada de escalón que ajuste la velocidad a un nivel nuevo. Supóngase que $R_a = L_a = J = b = 1$, que la constante del motor es $K_m = 1$ y que $K_b = 1$. (c) Selecciónese una ganancia de realimentación para la señal de la fem de regreso, a fin de obtener una respuesta de escalón con una sobreelongación del 15%.

P5.11. Un sencillo sistema de control con realimentación unitaria tiene una función de transferencia de proceso

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = G(s) = \frac{K}{s}.$$

La entrada del sistema es una función de escalón con una amplitud A. La condición inicial del sistema en el tiempo t_0 es $y(t_0) = Q$, donde $y(t)$ es la salida del sistema. El índice de comportamiento se define como

$$I = \int_0^\infty e^2(t)\,dt.$$

(a) Muéstrese que $I = (A - Q)^2/2K$. (b) Determínese la ganancia K que minimiza al índice de comportamiento I. ¿Tiene esta ganancia un valor práctico? (c) Selecciónese un valor práctico de ganancia y determínese el valor resultante para el índice de comportamiento.

P5.12. Los viajes interurbanos en tren se incrementarán a medida que se desarrollen trenes de altas velocidades, haciendo que el tiempo de viaje en tren desde el centro de una ciudad hasta el centro de otra sea equivalente al tiempo de viaje en avión. La red ferroviaria de Japón posee un tren llamado Bullet Express que viaja entre Tokio y Osaka en la línea Tokaido. Este tren recorre las 320 millas en tres horas y diez minutos, con un promedio de velocidad de 101 mph [20]. Esta velocidad aumentará a medida que se usen nuevos sistemas, como los de levitación magnética para hacer flotar vehículos sobre una vía de aluminio. Con el objeto de mantener una velocidad deseada, se propone un sistema de control de ésta, que tiene un error en estado estacionario igual a cero para una entrada de rampa. Es suficiente un sistema de tercer orden. Determínese la función de transferencia, $T(s)$, del sistema óptimo para un criterio ITAE de comportamiento. Estímese el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) y la sobreelongación para una entrada de escalón cuando $\omega_n = 10$.

P5.13. Se desea aproximar un sistema de cuarto orden mediante un modelo de orden reducido. La función de transferencia del sistema original es

$$H(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24} = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}.$$

Demuéstrese que si se obtiene un modelo de segundo orden por el método de la Sección 5.10 y no se especifican los polos ni el cero de $L(s)$, se tiene

$$L(s) = \frac{0.2917s + 1}{0.399s^2 + 1.375s + 1} = \frac{0.731(s + 3.428)}{(s + 1.043)(s + 2.4)}.$$

P5.14. Para el sistema original del Problema 5.13, se desea encontrar el modelo de orden reducido cuando los polos del modelo de segundo orden se especifican como -1 y -2 y el modelo tiene un cero no especificado. Demuéstrese que este modelo de orden reducido es

$$L(s) = \frac{0.986s + 2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{0.986(s + 2.028)}{(s+1)(s+2)}.$$

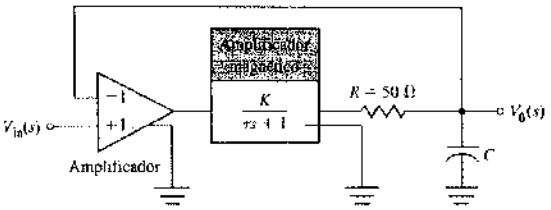


FIGURA P5.15 Amplificador realimentado.

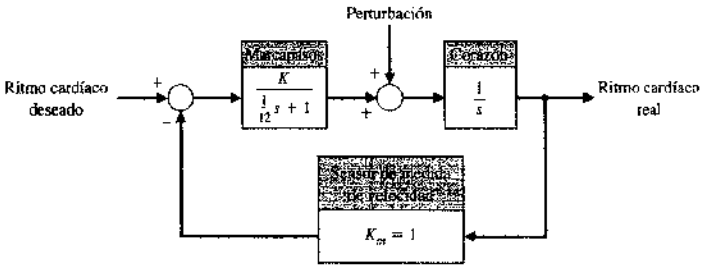


FIGURA P5.16 Marcapasos para el corazón.

P5.15. En la Figura P5.15 se muestra un amplificador magnético con una baja impedancia de salida, en cascada con un filtro de paso baja y un preamplificador. El amplificador tiene una alta impedancia de entrada y una ganancia unitaria, y se usa para sumar las señales como se muestra. Selecciónese un valor para la capacitancia C de forma que la función de transferencia $V_0(s)/V_{in}(s)$ tenga una razón de amortiguamiento de $1/\sqrt{2}$. La constante de tiempo del amplificador magnético es igual a un segundo y la ganancia es $K = 10$. Calcúlese el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) del sistema resultante.

P5.16. Los marcapasos electrónicos para el corazón humano regulan la velocidad de bombeo cardíaco. Se propone un sistema de lazo cerrado que incluye un marcapasos y la medición del ritmo cardíaco, como se muestra en la Figura P5.16 [2, 3]. La función de transferencia del bombeo cardíaco y del marcapasos es

$$G(s) = \frac{K}{s(s/12 + 1)}.$$

Se desea diseñar la ganancia del amplificador para obtener un sistema con un tiempo de asentamiento menor que un segundo para una perturbación de escalón. La sobreelongación para un escalón en el ritmo cardíaco deseado deberá ser menor que el 10%. (a) Determínese un intervalo adecuado para K. (b) Si el valor nominal de K es $K = 10$, determínese la sensibilidad del sistema para pequeños cambios en K. (c) Calcúlese la sensibilidad del apartado (b) en cc (hágase $s = 0$). (d) Calcúlese la magnitud de la sensibilidad al ritmo cardíaco normal de 60 pulsaciones/minuto.

P5.17. Considérese el sistema original de tercer orden del Ejemplo 5.9. Determínese un modelo de primer orden con un polo no especificado y sin ningún cero, de manera que represente al sistema de tercer orden.

P5.18. Un sistema de control en lazo cerrado con realimentación negativa unitaria tiene una planta cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{8}{s(s^2 + 6s + 12)}.$$

(a) Determínese la función de transferencia en lazo cerrado $T(s)$. (b) Determínese una aproximación de segundo orden para $T(s)$ utilizando el método de la Sección 5.10. (c) Utilizando MATLAB o un programa de computador adecuado, dibújese la respuesta de $T(s)$ y de la aproximación de segundo orden a una entrada de escalón unitario y compárense los resultados.

P5.19. La Figura P5.19 muestra un sistema.

(a) Determínese el error en estado estacionario para una entrada de escalón unitario en términos de K y K_1, donde $E(s) = R(s) - Y(s)$.

(b) Selecciónese K_1 para que el error en estado estacionario sea igual a cero.

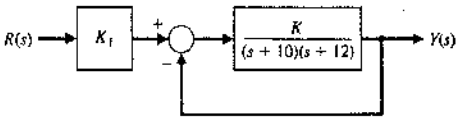


FIGURA P5.19. Sistema con preganancia K_1.

P5.20. Considérese el sistema en lazo cerrado de la Figura P5.20. Determínense los valores de los parámetros k y a para que se satisfagan las siguientes especificaciones:

(a) El error en estado estacionario a una entrada de escalón unitario es cero.
(b) El sistema en lazo cerrado tiene un porcentaje de sobreelongación menor del 5%.

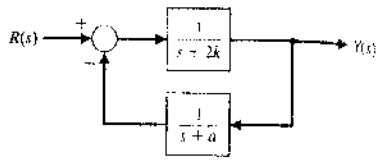


FIGURA P5.20. Sistema en lazo cerrado con parámetros k y a.

PROBLEMAS AVANZADOS

PA5.1. Se tiene la función de transferencia en lazo cerrado

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{96(s + 3)}{(s + 8)(s^2 + 8s + 36)}.$$

(a) Determínese el error en estado estacionario para una entrada de escalón unitario $R(s) = 1/s$.
(b) Supóngase que los polos complejos son dominantes y determínese la sobreelongación y el tiempo de asentamiento dentro del 2% del valor final.
(c) Dibújese la respuesta del sistema real y compárese con la estimada en el apartado (b).

PA5.2. La Figura PA5.2 muestra un sistema en lazo cerrado. Dibújese la respuesta a una entrada de escalón unitario para el sistema para $\tau_z = 0$, 0.05, 0.1 y 0.5. Regístrese el porcentaje de sobreelongación, el tiempo de subida y el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) cuando τ_z varía. Descríbase el efecto de la variación de τ_z. Compárese la localización del cero, $1/\tau_z$, con la localización de las raíces en lazo cerrado.

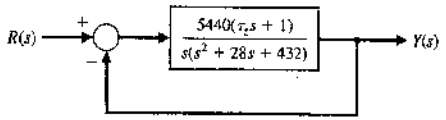


FIGURA PA5.2. Sistema con un cero variable.

PA5.3. La Figura PA5.3 muestra un sistema en lazo cerrado. Dibújese la respuesta a una entrada de escalón unitario para el sistema con $\tau_p = 0$, 0.5, 2 y 5. Regístrese el porcentaje de sobreelongación, el tiempo de subida y el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) cuando τ_p varía. Descríbase el efecto de la variación de τ_p. Compárese la localización del polo en lazo abierto, $1/\tau_p$, con la localización de las raíces en lazo cerrado.

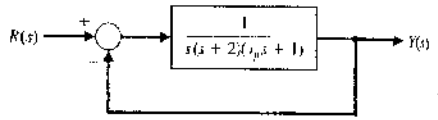


FIGURA PA5.3. Sistema con un polo variable en la planta.

PA5.4. La Figura PA5.4 muestra el sistema de control de velocidad de un tren de alta velocidad [20]. Determínese la ecuación del error en estado estacionario para K frente a una entrada de escalón unitario $r(t)$. Considérense los tres valores de K siguientes: $K = 1$, 10 y 100.

(a) Determínese el error en estado estacionario.
(b) Determínese y dibújese la respuesta $y(t)$ para: (i) Una entrada de escalón unitario $r(t)$ y (ii) una entrada de perturbación de escalón unitario $d(t)$.
(c) Realícese una tabla para mostrar la sobreelongación, el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%), el e_{ss} para $r(t)$ y $|y/d|_{max}$ para los tres valores de K. Selecciónese el mejor valor de compromiso.

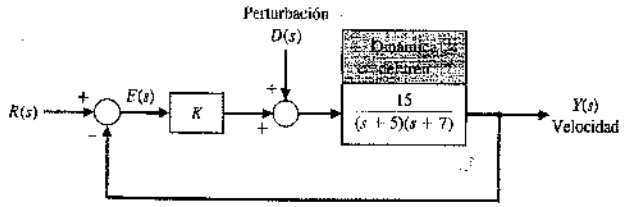


FIGURA PA5.4
Control de velocidad.

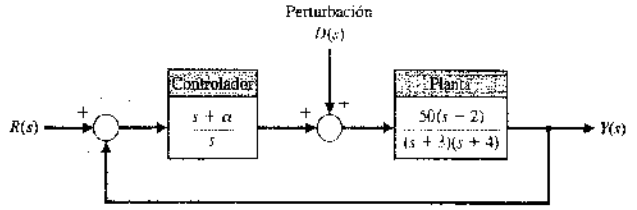


FIGURA PA5.5. Sistema con parámetro de control α.

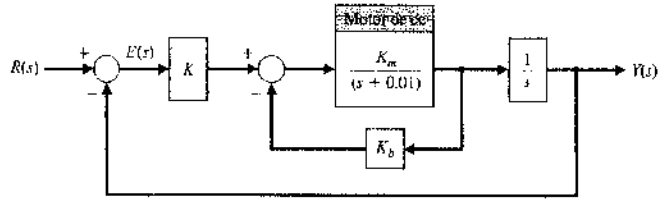


FIGURA PA5.6. Control de motor cc.

PA5.5. La Figura PA5.5 muestra un sistema con un controlador. El cero del controlador es variable. Sea $\alpha = 0$, 10, 100.

(a) Determínese el error en estado estacionario para una entrada de escalón $r(t)$ para $\alpha = 0$ y $\alpha \neq 0$.
(b) Dibújese la respuesta del sistema a una entrada de perturbación en escalón para los tres valores de α. Compárense los resultados y selecciónese el mejor valor de los tres valores de α.

PA5.6. La Figura PA5.6 muestra el modelo del diagrama de bloques de un motor de cc controlado por corriente de inducido.

(a) Determínese el error en estado estacionario para una entrada de rampa, $r(t) = t$, $t \geq 0$, en términos de K, K_b y K_m.
(b) Supóngase que $K_m = 10$ y $K_b = 0.05$, y selecciónese K para que el error en estado estacionario sea igual a 1.
(c) Dibújense las respuestas a una entrada de escalón unitario y a una de rampa unitaria. ¿Son aceptables las respuestas?

PA5.7. Considérese el sistema en lazo cerrado de la Figura PA5.7 con funciones de transferencia

$$G_c(s) = \frac{100}{s + 100} \quad \text{y} \quad G(s) = \frac{K}{s(s + 50)},$$

donde

$$1000 \leq K \leq 5000.$$

(a) Supóngase que los polos complejos son dominantes y estímese el tiempo de asentamiento y el porcentaje de sobreelongación para una entrada de escalón unitario para $K = 1000$, 2000, 3000, 4000 y 5000.
(b) Determínense el tiempo de asentamiento y el porcentaje de sobreelongación reales a un escalón unitario para los valores de K del apartado (a).
(c) Dibújense en una misma gráfica los resultados de (a) y (b) y coméntense.

PA5.8. Un sistema de realimentación negativa unitaria (como el que se muestra en la Figura E5.10) tiene la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 120s + 110)}{s^2 + 5s + 6}.$$

Determínese la ganancia K que minimiza la razón de amortiguamiento, ζ, de los polos del sistema en lazo cerrado. ¿Cuál es la razón de amortiguamiento mínima?

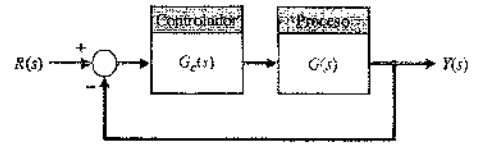


FIGURA PA5.7. Sistema en lazo cerrado con realimentación unitaria.

PROBLEMAS DE DISEÑO

PDC5.1. El sistema del motor del cabrestante de los problemas anteriores (*véase* PDC1.1-PDC4.1) tiene una perturbación debida a los cambios producidos en la parte que se mecaniza cuando se elimina material. El controlador es un amplificador $G_c(s) = K_a$. Evalúese el efecto de una perturbación de escalón unitario y determínese el mejor valor para la ganancia del amplificador a fin de que la sobreelongación a una orden de escalón $r(t) = A$, $t > 0$ sea menor que el 5%, al mismo tiempo que se reduce el efecto de la perturbación tanto como sea posible.

PD5.1. La Figura PD5.1 muestra el piloto automático del control de balanceo de un avión de guerra. El objetivo es seleccionar una K adecuada tal que la respuesta a una orden de escalón unitario $\phi_d(t) = A$, $t \geq 0$, proporcione una respuesta $\phi(t)$ que sea rápida y tenga una sobreelongación menor del 20%. (a) Determínese la función de transferencia en lazo cerrado $\phi(s)/\phi_d(s)$. (b) Determínense las raíces de la ecuación característica para $K = 0.7$, 3 y 6. (c) Utilizando el concepto de raíces dominantes, hállese la sobreelongación y el tiempo de pico esperado para la aproximación del sistema de segundo orden. (d) Dibújese la respuesta real y compárese la con los resultados aproximados del apartado (c). (e) Selecciónese la ganancia K para que el porcentaje de sobreelongación sea igual al 16%. ¿Cuál es el tiempo de pico resultante?

PD5.2. El diseño de control para un brazo de soldadura de gran alcance necesita una selección cuidadosa de los parámetros [13]. La Figura PD5.2 muestra el sistema, donde $\zeta = 0.2$, y la ganancia K y la frecuencia ω_n pueden seleccionarse. (a) Determínense K y ω_n para que la respuesta a una entrada de escalón unitario alcance un tiempo de pico para la primera sobreelongación (por encima del nivel deseado de 1) menor o igual que 1 segundo y la sobreelongación sea menor del 5%. (*Sugerencia:* pruebe $0.1 < K/\omega_n < 0.3$.) (b) Dibújese la respuesta del sistema diseñado en el apartado (a) para una entrada de escalón.

PD5.3. Los sistemas de suspensión activos para los automóviles modernos proporcionan una conducción firme y confortable. El diseño de un sistema de suspensión activo ajusta las válvulas del amortiguador para que la conducción se adapte a las condiciones. Un motor eléctrico pequeño, como se muestra en la Figura PD5.3, cambia los ajustes de la válvula [15]. Selecciónese un valor de diseño para K y el parámetro q a fin de satisfacer el criterio ITAE para una orden en escalón, $R(s)$, y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) para la respuesta al escalón menor o igual que 0.5 segundos. A la finalización del diseño, prediga la sobreelongación resultante para una entrada en escalón.

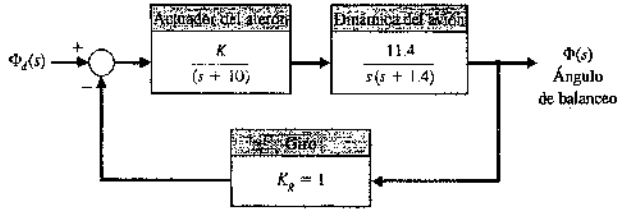


FIGURA PD5.1
Control del ángulo de balanceo.

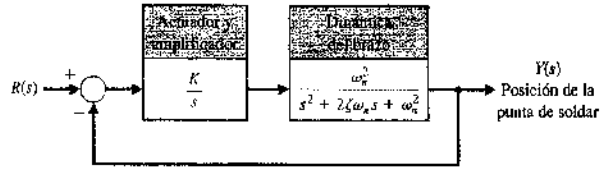


FIGURA PD5.2
Control de posición de la punta de soldar.

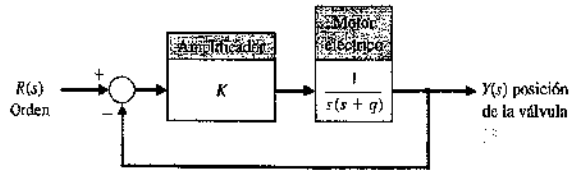


FIGURA PD5.3
Sistema de suspensión activo.

PD5.4. El satélite espacial que se muestra en la Figura PD5.4(a) utiliza un sistema para reajustar su orientación, tal como se observa en la Figura PD5.4(b).

(a) Determínese un modelo de segundo orden para el sistema en lazo cerrado.

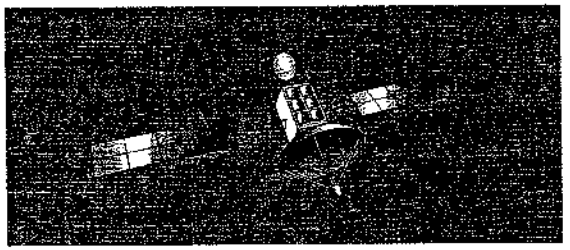
(b) Utilizando el modelo de segundo orden, selecciónese una ganancia K para que el porcentaje de sobreelongación sea menor del 15% y el error en estado estacionario a un escalón sea menor del 12%.

(c) Verifíquese el diseño determinando el comportamiento real del sistema de tercer orden.

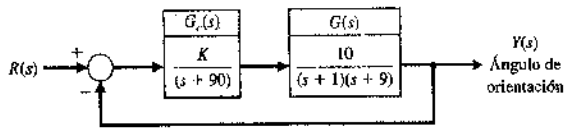
PD5.5. Un robot de desbastado puede utilizarse para suavizar piezas mecanizadas siguiendo una trayectoria preplanificada (señal de orden de entrada). En la práctica, los errores se deben a la inexactitud del robot, a defectos en la maquinaria, tolerancias grandes y desgaste en las herramientas. Estos errores pueden eliminarse utilizando la realimentación de la fuerza para modificar la trayectoria en vivo [9, 13].

Mientras el control de fuerza ha sido capaz de tratar el problema de la precisión, ha sido más difícil resolver el problema de estabilidad del contacto. De hecho, al cerrar el lazo de fuerza e introducir un sensor de fuerza de acomodo en la muñeca (el tipo más común de control de fuerza), se puede añadir al problema de estabilidad.

La Figura PD5.5 muestra un modelo de un sistema de robot de desbastado. Determínese la región de estabilidad para el sistema para K_1 y K_2. Supóngase que ambas ganancias ajustables son mayores que cero.



(a)



(b)

FIGURA PD5.4
Control de un satélite espacial.

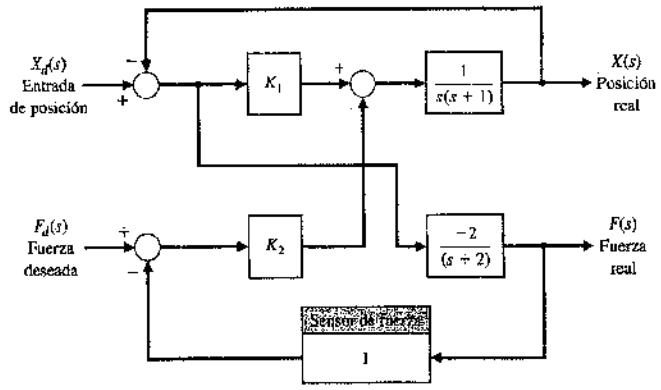


FIGURA PD5.5
Robot de debastado.

PD5.6. La Figura PD5.6 muestra el modelo para el sistema de control de posición utilizando un motor de cc. El objetivo es seleccionar K_1 y K_2 para que el tiempo de pico sea 0.2 segundos y la sobreelongación (P.O.) para una entrada se escalón sea despreciable ($1\% < \text{P.O.} < 4\%$).

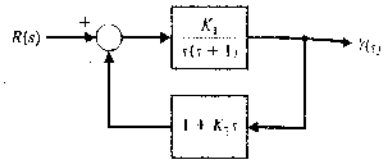


FIGURA PD5.4. Robot de control de posición

PROBLEMAS CON MATLAB

PM5.1. Considérese la función de transferencia en lazo cerrado

$$T(s) = \frac{6}{s^2 + 5s + 6}$$

Obténgase la respuesta impulsional analíticamente y compárese el resultado con el que se obtiene utilizando la función impulse de MATLAB.

PM5.2. Un sistema de realimentación negativa unitaria tiene la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{s + 7}{s^2(s + 10)}$$

Utilizando lsim, obténgase la respuesta del sistema en lazo cerrado a una entrada de rampa unitaria,

$$R(s) = 1/s^2.$$

Considérese el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 25$. ¿Cuál es el error en estado estacionario?

PM5.3. En el diseño de control, es importante tener un conocimiento básico de la relación entre las localizaciones de los polos del sistema de segundo grado (mostrado en la Figura PM5.3) y la respuesta transitoria. Con esto en mente, considérense los cuatro casos siguientes:

1. $\omega_n = 2, \zeta = 0,$
2. $\omega_n = 2, \zeta = 0.1,$
3. $\omega_n = 1, \zeta = 0,$
4. $\omega_n = 1, \zeta = 0.2.$

Utilizando las funciones impulse y subplot, realícese una gráfica que contenga cuatro gráficos, donde cada uno de ellos muestre la respuesta impulsional de cada uno de los cuatro casos expuestos. Compárese la gráfica con la Figura 5.17 de la Sección 5.3 y coméntense los resultados.

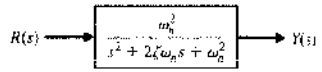


FIGURA PM5.3. Sistema simple de segundo orden.

PM5.4. Considérese el sistema de control que se muestra en la Figura PM5.4.

(a) Demuéstrese analíticamente que el porcentaje de sobreelongación esperado de la respuesta del sistema en lazo cerrado a una entrada de escalón unitario es aproximadamente el 50%.
(b) Utilizando MATLAB, dibújese la respuesta a un escalón unitario del sistema en lazo cerrado y estímese de la gráfica el porcentaje de sobreelongación. Compárese el resultado con el del apartado (a).

PM5.5. La función de transferencia en lazo abierto de un sistema con realimentación negativa unitaria es

$$G(s) = \frac{50}{s(s + 10)}.$$

Dibújese la respuesta a un escalón unitario con MATLAB y determínense los valores de la sobreelongación de pico, M_p, el tiempo de pico, T_p, y el tiempo de asentamiento, T_s (con un criterio del 2%), a partir de la gráfica obtenida.

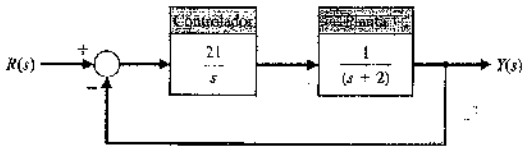


FIGURA PM5.4
Sistema de control con realimentación negativa.

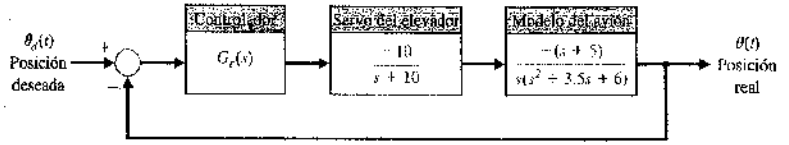


FIGURA PM5.6. Diagrama de bloques del piloto automático de un avión.

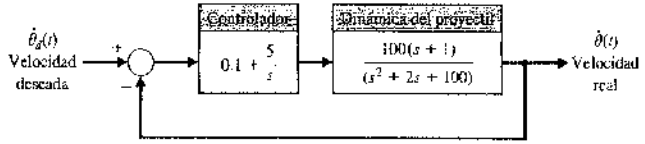


FIGURA PM5.7. Piloto automático del lazo de velocidad del proyectil.

PM5.6. La Figura PM5.6 muestra el diseño del piloto automático para mantener un avión en vuelo recto y horizontal.

(a) Supóngase que el controlador es un controlador de ganancia constante dado por $G_c(s) = 2$. Utilizando la función lsim, calcúlese y dibújese la respuesta a una rampa para $\theta_d(t) = at$, donde $a = 0.5°/\text{s}$. Determínese el error de posición después de 10 segundos.
(b) Si se aumenta la complejidad del controlador, se puede reducir el error de seguimiento en estado estacionario. Con este objetivo en mente, supóngase que se sustituye el controlador de ganancia constante por un controlador más sofisticado:

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = 2 + \frac{1}{s}.$$

Este tipo de controlador se conoce como controlador proporcional integral (PI). Repítase la simulación del apartado (a) con el controlador PI, y compárense los errores de seguimiento en estado estacionario del controlador de ganancia constante con los del controlador PI.

PM5.7. La Figura PM5.7 muestra el diagrama de bloques de un lazo de velocidad para el piloto automático de un proyectil. Utilizando las fórmulas analíticas de los sistemas de segundo orden, prediga M_p, T_p y T_s para el sistema en lazo cerrado debido a una entrada de escalón unitario. Compárense los resultados predichos con la respuesta real a un escalón unitario obtenida con MATLAB. Explíquese cualquier diferencia.

PM5.8. Realícese una simulación en Simulink que se pueda utilizar para analizar el sistema en lazo cerrado de la Figura PM5.8. Excítese al sistema con una entrada de escalón y visualice la salida en una gráfica. ¿Cuáles son los valores del tiempo de asentamiento y del porcentaje de sobreelongación?

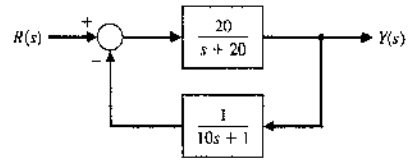


FIGURA PM5.8. Sistema de realimentación no unitaria para la simulación con Simulink.

PM5.9. Utilícese Simulink para simular la respuesta del sistema de la Figura PM5.9 a una entrada en rampa, $R(s) = 1/s^2$. ¿Cuál es el error en estado estacionario? Visualícese la salida en una gráfica-*xy*.

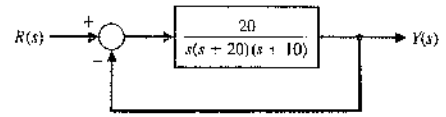


FIGURA MP5.9. Sistema de lazo cerrado para la simulación con Simulink.

TÉRMINOS Y CONCEPTOS

Constante de error de aceleración, K_a. Constante evaluada como $\lim_{s \to 0} [s^2 G(s)]$. El error en estado estacionario para una entrada parabólica, $r(t) = At^2/2$, es igual a A/K_a.

Constante de error de posición, K_p. Constante evaluada como $\lim_{s \to 0} G(s)$. El error en estado estacionario para una entrada en escalón (de magnitud A) es igual a $A/(1 + K_p)$.

Constante de error de velocidad, K_v. Constante evaluada como $\lim_{s \to 0} [sG(s)]$. El error en estado estacionario para una entrada de rampa (de pendiente A) para un sistema es igual a A/K_v.

Especificaciones de diseño. Conjunto de criterios de comportamiento preestablecidos.

Impulso unitario. Entrada de prueba que consiste en un impulso de amplitud infinita y anchura cero, y tiene un área igual a la unidad. El impulso unitario se utiliza para determinar la respuesta impulsional.

Índice de comportamiento. Medida cuantitativa del comportamiento del sistema.

Número de tipo. Número N de polos de la función de transferencia, $G(s)$, en el origen. $G(s)$ es la función de transferencia de trayectoria directa.

Porcentaje de sobreelongación. Cantidad en que la respuesta de salida del sistema sobrepasa a la respuesta deseada.

Raíces dominantes. Raíces de la ecuación característica que son las causantes de la respuesta transitoria dominante del sistema.

Respuesta en estado estacionario. Componente de la respuesta del sistema que permanece a lo largo del tiempo siguiendo cualquier señal de inicio.

Respuesta transitoria. Componente de la respuesta del sistema que desaparece con el tiempo.

Señal de entrada de prueba. Señal de entrada utilizada como prueba estándar de la capacidad de un sistema de responder adecuadamente.

Sistema de control óptimo. Sistema cuyos parámetros se ajustan de tal forma que el índice de comportamiento alcanza un valor extremo.

Tiempo de asentamiento. Tiempo que se necesita para que la salida del sistema se establezca dentro de un porcentaje determinado de la amplitud de entrada.

Tiempo de pico. Tiempo que le lleva a un sistema responder a una entrada en escalón y alcanzar un pico en la respuesta.

Tiempo de subida. Tiempo que le lleva a un sistema responder a una entrada en escalón y alcanzar una respuesta igual a un porcentaje de la magnitud de la entrada. El tiempo de subida 0-100%, T_r, mide el tiempo al 100% de la magnitud de la entrada. Por su parte, T_r, mide el tiempo desde el 10% al 90% de la respuesta a la entrada en escalón.

Estabilidad de los sistemas lineales con realimentación

CAPÍTULO 6

6.1. El concepto de estabilidad 312
6.2. El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz 316
6.3. Estabilidad relativa de los sistemas de control con realimentación 324
6.4. Estabilidad de los sistemas con variables de estado 325
6.5. Ejemplo de diseño: Control de giro de un vehículo con bandas de rodamiento 329
6.6. Estabilidad de sistemas utilizando MATLAB 331
6.7. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 339
6.8. Resumen 342

SINOPSIS

La cuestión de asegurar la estabilidad de un sistema realimentado en lazo cerrado es vital en el diseño de sistemas de control. Generalmente, un sistema en lazo cerrado inestable no tiene valor práctico. Por lo tanto, se buscan métodos que ayuden a analizar y diseñar sistemas estables. Un sistema estable debería mostrar una salida acotada si la entrada correspondiente está acotada. Esto se conoce como estabilidad de entrada-acotada/salida-acotada y es uno de los principales temas de este capítulo.

La estabilidad de un sistema realimentado está directamente relacionada con la situación de las raíces de la ecuación característica de la función de transferencia del sistema. El método de Routh-Hurwitz se introduce como una herramienta útil para calcular la estabilidad del sistema. La técnica permite calcular el número de raíces de la ecuación característica en la mitad derecha del plano sin calcular realmente los valores de dichas raíces. De esta forma, se puede determinar la estabilidad sin la carga computacional añadida de determinar las situaciones de las raíces características. Esto proporciona un método de diseño para determinar valores de algunos parámetros del sistema que llevarán a la estabilidad en lazo cerrado. Para sistemas estables, se introducirá el concepto de estabilidad relativa, que permitirá caracterizar el grado de estabilidad. El capítulo finaliza con el diseño de un controlador estable basado en el método de Routh-Hurwitz para el Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco.

6.1. EL CONCEPTO DE ESTABILIDAD

Cuando se considera el diseño y análisis de sistemas de control realimentados, la **estabilidad** es de vital importancia. Desde un punto de vista práctico, un sistema realimentado en lazo cerrado que es inestable tiene muy poco valor. Como sucede con todas las formulaciones generales, hay excepciones; pero, como propósito, aquí se declarará que todos los diseños de control deben concluir en un sistema estable en lazo cerrado. Muchos sistemas físicos son intrínsecamente inestables en lazo abierto, e incluso algunos sistemas se diseñan para que sean inestables en lazo abierto. La mayoría de los aviones de combate modernos son *inestables por diseño* en lazo abierto, y sin un control realimentado activo que ayude al piloto no pueden volar. El control activo lo introducen los ingenieros a fin de estabilizar la planta inestable —es decir, el avión— para poder aplicarse a otras consideraciones, como el comportamiento transitorio. Utilizando realimentación, se pueden estabilizar plantas inestables y con una juiciosa selección de los parámetros del controlador se puede ajustar el comportamiento transitorio. Para plantas estables en lazo abierto, aún se utiliza realimentación para ajustar el comportamiento en lazo cerrado y conseguir las especificaciones de diseño. Estas especificaciones toman la forma de errores de seguimiento en estado estacionario, porcentaje de sobreelongación, tiempo de asentamiento, tiempo de pico y otros índices analizados en los Capítulos 4 y 5.

Se puede decir que un sistema realimentado en lazo cerrado es estable o inestable. Este tipo de caracterización estable/inestable está relacionado con la **estabilidad absoluta**. Un sistema que tenga estabilidad absoluta se denomina sistema estable —la calificación de absoluto se suprime—. Dado que un sistema en lazo cerrado es estable, se puede además caracterizar el grado de estabilidad. Esto está relacionado con la **estabilidad relativa**. Los pioneros en el diseño de aviones se familiarizaron con el concepto de estabilidad relativa: cuanto más estable era un avión, más difícil era maniobrarlo (es decir, girar). Un resultado de la inestabilidad relativa de los aviones de combate modernos es la alta maniobrabilidad. Un avión de combate es menos estable que uno de transporte comercial, por lo que puede maniobrar más rápido. De hecho, los movimientos de un avión de combate pueden ser bastante violentos para los «pasajeros». Como se analizará más adelante en esta sección, se puede determinar que un sistema es estable (en sentido absoluto) determinando que todos los polos de la función de transferencia se encuentran en el semiplano s izquierdo, o en otras palabras, que todos los autovalores de la matriz A del sistema se encuentran en el semiplano s izquierdo. Dado que todos los polos (o autovalores) están en el semiplano s izquierdo, la estabilidad relativa se analiza examinando las situaciones relativas de los polos (o autovalores).

Un **sistema estable** se define como aquel que tiene una respuesta limitada. Esto es, se dice que el sistema es estable si, estando sujeto a una entrada o perturbación limitada, su respuesta es de magnitud limitada.

Un sistema estable es un sistema dinámico con una respuesta acotada para una entrada acotada.

El concepto de estabilidad puede ilustrarse considerando un cono circular recto colocado en una superficie horizontal plana. Si el cono descansa sobre su base y es ladeado ligeramente, regresará a su posición original de equilibrio. Se dice que esta posición y su respuesta son estables. Si el cono descansa sobre su costado y se desplaza ligeramente, rodará sin ninguna tendencia a cambiar su posición de costado. Esta posición se denomina estabilidad neutral. Por otra parte, si el cono se coloca sobre su pico y se suelta, caerá

(a) Estable (b) Neutral (c) Inestable

FIGURA 6.1
Estabilidad de un cono.

sobre su costado. Se dice que esta posición es inestable. En la Figura 6.1 se ilustran estas tres posiciones.

La estabilidad de un sistema dinámico se define de forma semejante. La respuesta a un desplazamiento, o condición inicial, dará como resultado una respuesta decreciente, neutral o creciente. Específicamente, por la definición de estabilidad se deduce que un sistema lineal es estable si, y solamente si, el valor absoluto de su respuesta a un impulso, $g(t)$, integrada sobre un intervalo finito, es finito. Es decir, según la integral de convolución [Ecuación (5.2)] para una entrada limitada, se requiere que $\int_0^\infty |g(t)|\,dt$ sea finita.

La localización de los polos de un sistema en el plano s indica la respuesta transitoria resultante. Los polos en la parte izquierda del plano s dan como resultado una respuesta decreciente para entradas de perturbación. Análogamente, los polos en el eje $j\omega$ y en el plano de la derecha dan como resultado una respuesta neutral y una creciente, respectivamente, para una entrada de perturbación. En la Figura 6.2 se muestra esta división del plano s. Evidentemente, los polos de los sistemas dinámicos deseables deben caer en la parte izquierda del plano s [1-3].

Un ejemplo común del efecto desestabilizador potencial de la realimentación es la realimentación en los sistemas amplificadores de audio y de altavoces, empleados para dirigirse al público en auditorios. En este caso, un altavoz produce una señal de audio, la cual es una versión amplificada de los sonidos registrados por un micrófono. Además de otras entradas de audio, el micrófono puede registrar el sonido que proviene, a su vez, del propio altavoz. La fuerza de esta señal particular depende de la distancia entre el altavoz y el micrófono. Debido a las propiedades de atenuación del aire, cuanto mayor sea la distancia, más débil será la señal percibida por el micrófono. Además, debido a la velocidad de propagación finita de las ondas sonoras, habrá un retraso entre la señal que produce el altavoz y aquella que registra el micrófono. En este caso, la salida de la trayectoria de la realimentación se agrega a la entrada externa. Éste es un ejemplo de realimentación positiva.

A medida que la distancia entre el altavoz y el micrófono disminuye, se observa que si el micrófono se coloca cerca del altavoz, el sistema será inestable. El resultado de esta inestabilidad es una amplificación excesiva y una distorsión de las señales de audio, y un chillido oscilatorio.

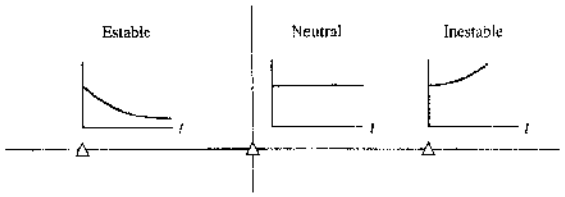
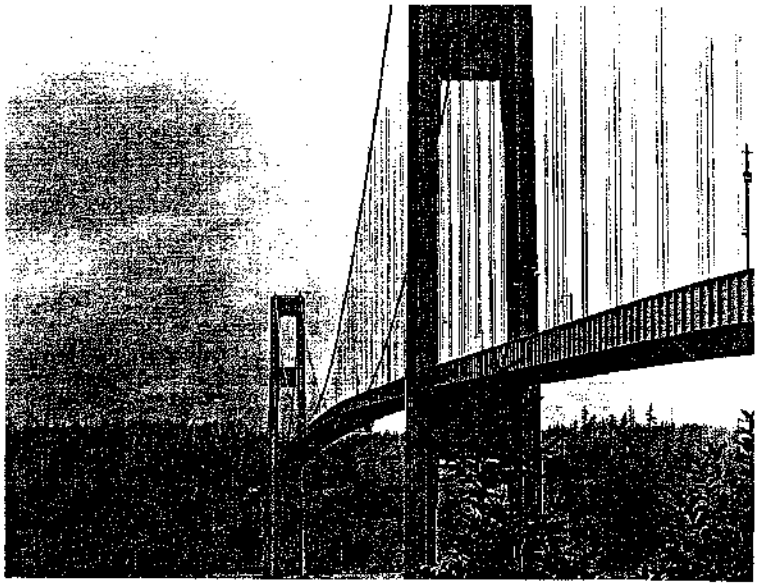
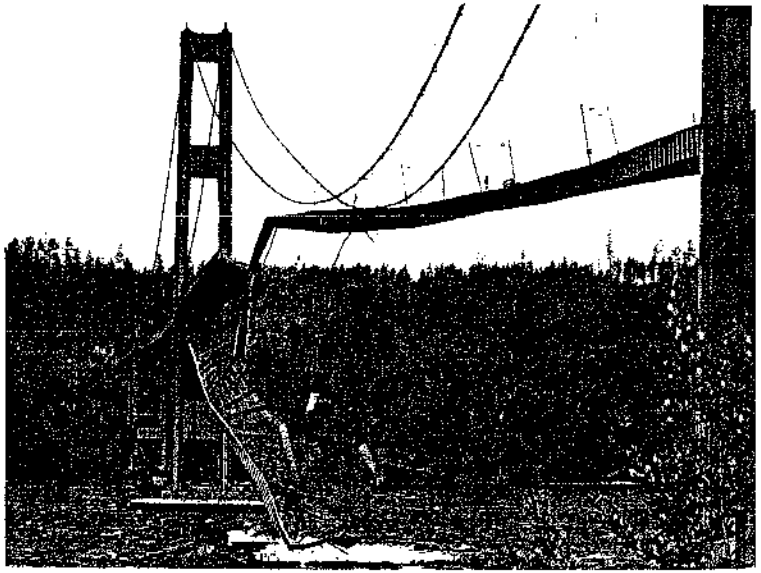


FIGURA 6.2
Estabilidad en el plano s.



(a)



(b)

FIGURA 6.3
Puente del estrecho de Tacoma (a) cuando comienza la oscilación y (b) el fallo catastrófico.

En la Figura 6.3 se muestra otro ejemplo de un sistema inestable. El primer puente sobre el Tacoma Narrows en Puget Sound, Washington, fue abierto al tránsito el 1 de julio de 1940. Se descubrió que el puente oscilaba siempre que soplaba el viento. Después de cuatro meses, el 7 de noviembre de 1940, el viento produjo una oscilación de amplitud creciente hasta que el puente se partió. La Figura 6.3(a) muestra la situación al comienzo de la oscilación; la Figura 6.3(b) muestra el catastrófico fallo [5].

En lo que se refiere a los sistemas lineales, se reconoce que el requisito de estabilidad puede definirse en función de la localización de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado. Esta función se escribe como

$$T(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^{M} (s + z_i)}{s^N \prod_{k=1}^{Q} (s + \sigma_k) \prod_{m=1}^{R} [s^2 + 2\alpha_m s + (\alpha_m^2 + \omega_m^2)]}, \tag{6.1}$$

donde $q(s) = \Delta(s) = 0$ es la ecuación característica cuyas raíces son los polos del sistema de lazo cerrado. La respuesta de salida para una entrada de función de impulso (cuando $N = 0$) es entonces

$$y(t) = \sum_{k=1}^{Q} A_k e^{-\sigma_k t} + \sum_{m=1}^{R} B_m \left(\frac{1}{\omega_m}\right) e^{-\alpha_m t} \operatorname{sen}(\omega_m t + \theta_m). \tag{6.2}$$

donde A_k y B_m son constantes que dependen de σ_k, z_i, α_m, K y ω_m. Evidentemente, con el objeto de obtener una respuesta limitada, los polos del sistema de lazo cerrado deben estar en la parte izquierda del plano s. Por esto, **una condición necesaria y suficiente para que un sistema de realimentación sea estable es que todos los polos de la función de transferencia del sistema tengan partes reales negativas.** Un sistema es estable si todos los polos de la función de transferencia están en el lado izquierdo del plano s. Un sistema no es estable si no todas las raíces están en el lado izquierdo del plano. Si la ecuación característica tiene raíces simples sobre el eje imaginario (eje $j\omega$) con el resto de las raíces en el lado izquierdo del plano, la salida en estado estacionario tendrá oscilaciones mantenidas para una entrada limitada, a menos que la entrada sea una sinusoide (la cual está limitada) cuya frecuencia sea igual a la magnitud de las raíces del eje $j\omega$. Para este caso, la salida está sin acotar. A tal sistema se lo denomina **marginalmente estable**, debido a que únicamente algunas entradas limitadas (sinusoides de la frecuencia de los polos) harán que la salida no esté acotada. Para un sistema inestable, la ecuación característica tiene al menos una raíz en el lado derecho del plano s o raíces $j\omega$ repetidas; para este caso la salida estará sin acotar para cualquier entrada.

Por ejemplo, si la ecuación característica de un sistema en lazo cerrado es

$$(s + 10)(s^2 + 16) = 0,$$

se dice que el sistema es marginalmente estable. Si el sistema se excita con una sinusoide de frecuencia, $\omega = 4$, la salida está sin acotar.

Para determinar la estabilidad de un sistema de control realimentado, se podrían determinar las raíces de la ecuación característica $q(s)$. Sin embargo, interesa hallar primero la respuesta a la siguiente pregunta: ¿Es estable el sistema? Si se calculan las raíces de la ecuación característica para contestar a esta pregunta, se habrá determinado bastante más información de la necesaria. Por esta razón, se han desarrollado varios métodos que proporcionan la respuesta «sí» o «no» para la pregunta de la estabilidad. Los tres

métodos para el problema de la estabilidad son: (1) el del plano s; (2) el del plano de frecuencia ($j\omega$), y (3) el del dominio en el tiempo. El método de la frecuencia real ($j\omega$) se verá en el Capítulo 9 y el análisis del método en el dominio del tiempo se considerará en la Sección 6.4.

6.2. EL CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH-HURWITZ

El análisis y la determinación de la estabilidad han ocupado el interés de muchos ingenieros. Maxwell y Vishnegradskii consideraron por primera vez el problema de la estabilidad de los sistemas dinámicos. A finales de la década de 1800, A. Hurwitz y E. J. Routh publicaron por separado un método para investigar la estabilidad de un sistema lineal [6, 7]. El método de la estabilidad de Routh-Hurwitz proporciona una respuesta al problema de la estabilidad considerando la ecuación característica del sistema, que en función de la variable de Laplace se escribe como

$$\Delta(s) = q(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{6.3}$$

Con el objeto de investigar la estabilidad del sistema, es necesario determinar si alguna de las raíces de $q(s)$ está en la parte derecha del plano s. Si la Ecuación (6.3) se escribe en forma factorizada, se tiene

$$a_n(s - r_1)(s - r_2)\cdots(s - r_n) = 0, \tag{6.4}$$

donde r_i = raíz i-ésima de la ecuación característica. Multiplicando los factores, se obtiene que

$$\begin{aligned} q(s) = {} & a_n s^n - a_n(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)s^{n-1} \\ & + a_n(r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 + \cdots)s^{n-2} \\ & - a_n(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4\cdots)s^{n-3} + \cdots \\ & + a_n(-1)^n r_1r_2r_3\cdots r_n = 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

En otras palabras, para una ecuación de enésimo grado, se obtiene

$$\begin{aligned} q(s) = {} & a_n s^n - a_n(\text{suma de todas las raíces})s^{n-1} \\ & + a_n(\text{suma de los productos de las raíces tomando 2 cada vez})s^{n-2} \\ & - a_n(\text{suma de los productos de las raíces tomando 3 cada vez})s^{n-3} \\ & + \cdots + a_n(-1)^n(\text{producto de las } n \text{ raíces}) = 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Examinando la Ecuación (6.5), se observa que todos los coeficientes del polinomio deben tener el mismo signo si todas las raíces están en la parte izquierda del plano. Así mismo, para un sistema estable, es necesario que todos los coeficientes sean diferentes de cero. Sin embargo, aunque estos requisitos son necesarios, no son suficientes. Es decir, si no se satisfacen, inmediatamente se sabe que el sistema es inestable; pero si se satisfacen, entonces debe procederse a determinar la estabilidad del sistema. Por ejemplo, cuando la ecuación característica es

$$q(s) = (s + 2)(s^2 - s + 4) = (s^3 + s^2 + 2s + 8), \tag{6.7}$$

el sistema es inestable, a pesar de que el polinomio tiene todos los coeficientes positivos.

El **criterio de Routh-Hurwitz** es necesario y suficiente para la estabilidad de los sistemas lineales. El método fue desarrollado originalmente por medio de determinantes, pero aquí se utilizará la formulación más conveniente de un array o tabla.

El criterio de Routh-Hurwitz se basa en el ordenamiento de los coeficientes de la ecuación característica

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{6.8}$$

en un array o lista como sigue [4]:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \end{array}$$

Entonces las filas subsecuentes de la lista se completan como sigue:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ s^0 & h_{n-1} & & & \end{array}$$

donde

$$b_{n-1} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n(a_{n-3})}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix},$$

$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix},$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix},$$

y así sucesivamente. El algoritmo para calcular los elementos del array puede deducirse tomando como base un determinante o usando la forma de la ecuación b_{n-1}.

El criterio de Routh-Hurwitz establece que el número de raíces de $q(s)$ con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de la primera columna del array. Para un sistema estable, este criterio requiere que no haya cambios de signo en la primera columna. Este requisito es tanto necesario como suficiente.

Existen cuatro casos o configuraciones diferentes de la primera columna del array que deben ser consideradas y tratarse independientemente, puesto que requieren modificaciones adecuadas del procedimiento de cálculo del array: (1) ningún elemento en la primera columna es cero; (2) hay un cero en la primera columna, pero otros elementos de la fila que contiene al cero de la primera columna no son iguales a cero; (3) hay un cero en la primera columna y los otros elementos de la fila que contiene al cero también son iguales a cero; y (4) como el tercer caso, pero con raíces repetidas sobre el eje $j\omega$.

Para ilustrar claramente este método, se presentarán varios ejemplos de cada caso.

Caso 1. Ningún elemento en la primera columna es cero.

EJEMPLO 6.1. Sistema de segundo orden

La ecuación característica de un sistema de segundo orden es

$$q(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0.$$

El array de Routh se escribe como

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & b_1 & 0 \end{array},$$

donde

$$b_1 = \frac{a_1 a_0 - (0)a_2}{a_1} = \frac{-1}{a_1}\begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0.$$

Por tanto, el requisito para un sistema estable de segundo orden es simplemente que todos los coeficientes sean positivos o que todos sean negativos. ■

EJEMPLO 6.2. Sistema de tercer orden

El polinomio característico de un sistema de tercer orden es

$$q(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0.$$

El array de Routh es

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array},$$

donde

$$b_1 = \frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_2} \quad \text{y} \quad c_1 = \frac{b_1 a_0}{b_1} = a_0.$$

Para que el sistema de tercer orden sea estable, es necesario y suficiente que los coeficientes sean positivos y $a_2 a_1 > a_0 a_3$. La condición cuando $a_2 a_1 = a_0 a_3$ da como resultado un caso de estabilidad marginal y dos raíces caen en el eje imaginario del plano s. Este caso marginal se reconoce como el Caso 3, puesto que existe un cero en la primera columna cuando $a_2 a_1 = a_0 a_3$. Será analizado en dicho caso.

Como ejemplo final de ecuaciones características que dan por resultado elementos diferentes de cero en la primera fila, se considera el polinomio

$$q(s) = (s - 1 + j\sqrt{7})(s - 1 - j\sqrt{7})(s + 3) = s^3 + s^2 + 2s + 24. \tag{6.9}$$

El polinomio satisface las condiciones necesarias, puesto que todos los coeficientes existen y son positivos. Por tanto, utilizando el array de Routh-Hurwitz, se tiene

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 24 \\ s^1 & -22 & 0 \\ s^0 & 24 & 0 \end{array}.$$

Como aparecen dos cambios de signo en la primera columna, se obtiene que dos raíces de $q(s)$ caen en la parte derecha del plano y se confirma el conocimiento que ya se tenía. ■

Caso 2. Hay un cero en la primera columna, con algunos elementos de la fila que contiene un cero en la primera columna diferentes de cero. Si únicamente un elemento del array es cero, éste puede reemplazarse por un número positivo pequeño, ε, que se permite que tienda a cero después de completar el array. Por ejemplo, considérese el siguiente polinomio característico:

$$q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10. \tag{6.10}$$

El array de Routh-Hurwitz es entonces

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\ s^2 & c_1 & 10 & 0 \\ s^1 & d_1 & 0 & 0 \\ s^0 & 10 & 0 & 0 \end{array},$$

donde

$$c_1 = \frac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} = \frac{-12}{\varepsilon} \quad \text{y} \quad d_1 = \frac{6c_1 - 10\varepsilon}{c_1} \to 6.$$

Hay dos cambios de signo debido al número negativo grande de la primera columna, $c_1 = -12/\varepsilon$. Por tanto, el sistema es inestable y dos raíces caen en la parte derecha del plano.

EJEMPLO 6.3. Sistema inestable

Como ejemplo final del tipo del Caso 2, considérese el polinomio característico

$$q(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + K, \tag{6.11}$$

donde se desea determinar la ganancia K que da como resultado una estabilidad marginal. El array de Routh-Hurwitz es entonces

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 1 & K \\ s^3 & 1 & 1 & 0 \\ s^2 & \varepsilon & K & 0 \\ s^1 & c_1 & 0 & 0 \\ s^0 & K & 0 & 0 \end{array},$$

donde

$$c_1 = \frac{\varepsilon - K}{\varepsilon} \to \frac{-K}{\varepsilon}.$$

Por tanto, para cualquier valor de K mayor que cero, el sistema es inestable. Así mismo, como el último término de la primera columna es igual a K, un valor negativo de K dará como resultado un sistema inestable. Por tanto, el sistema es inestable para todos los valores de ganancia K. ■

Caso 3. Hay un cero en la primera columna y los otros elementos de la fila que mantiene al cero también son cero. El Caso 3 ocurre cuando todos los elementos de una fila son cero o cuando la fila está constituida por un solo elemento que es cero. Esta condición se presenta cuando el polinomio contiene singularidades que se localizan simétricamente respecto al origen del plano s. Por tanto, el Caso 3 ocurre cuando se encuentran factores como $(s + \sigma)(s - \sigma)$ o $(s + j\omega)(s - j\omega)$. Este problema se evita utilizando el **polinomio auxiliar**, $U(s)$, que precede inmediatamente al elemento cero en el array de Routh. El orden del polinomio auxiliar siempre es par e indica el número de pares de raíces simétricas.

Para ilustrar este método, se considera un sistema de tercer orden con un polinomio característico:

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K, \tag{6.12}$$

donde K es una ganancia ajustable de lazo. El array de Routh es entonces

s^3	1	4
s^2	2	K
s^1	$\frac{8 - k}{2}$	0
s^0	K	0

Por tanto, para un sistema estable, se requiere que

$$0 < K < 8.$$

Cuando $K = 8$, se tienen dos raíces en el eje $j\omega$ y un caso de estabilidad marginal. Obsérvese que se obtiene una fila de ceros (Caso 3) cuando $K = 8$. El polinomio auxiliar, $U(s)$, es la ecuación de la fila que precede a la de ceros. En este caso la ecuación de la fila que precede a la de ceros es la que se obtiene de la fila s^2. Recuérdese que esta fila contiene los coeficientes de potencias pares de s, y, por tanto, en este caso se tiene

$$U(s) = 2s^2 + Ks^0 = 2s^2 + 8 = 2(s^2 + 4) = 2(s + j2)(s - j2). \tag{6.13}$$

Para demostrar que el polinomio auxiliar, $U(s)$, es realmente un factor del polinomio característico, se divide $q(s)$ entre $U(s)$ para obtener

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}s + 1 \\ 2s^2 + 8 \overline{)\, s^3 + 2s^2 + 4s + 8} \\ \underline{s^3 \qquad + 4s} \\ 2s^2 \qquad + 8 \\ \underline{2s^2 \qquad + 8} \\ 0 \end{array}.$$

Por tanto, cuando $K = 8$, los factores del polinomio característico son

$$q(s) = (s + 2)(s + j2)(s - j2). \tag{6.14}$$

La respuesta del caso marginal es una oscilación inaceptable.

Caso 4. Raíces repetidas de la ecuación característica en el eje $j\omega$. Si las raíces del eje $j\omega$ de la ecuación característica son sencillas, el sistema no es estable ni inestable; en este caso se denomina marginalmente estable, debido a que tiene un modo sinusoidal subamortiguado. Si las raíces del eje $j\omega$ están repetidas, la respuesta del sistema será inestable con una forma $t[\operatorname{sen}(\omega t + \phi)]$. El criterio de Routh-Hurwitz no revelará esta forma de inestabilidad [21].

Considérese un sistema con un polinomio característico

$$q(s) = (s + 1)(s + j)(s - j)(s + j)(s - j) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1.$$

La tabla de Routh es

s^5	1	2	1
s^4	1	2	1
s^3	ε	ε	0
s^2	1	1	
s^1	ε	0	
s^0	1		

donde $\varepsilon \to 0$. Obsérvese la ausencia de cambios de signo, condición que erróneamente indica que el sistema es marginalmente estable. La respuesta impulsional del sistema aumenta con el tiempo ya que $t \operatorname{sen}(t + \phi)$. El polinomio auxiliar en la línea de s^2 es $(s^2 + 1)$, y el polinomio auxiliar en la línea s^4 es $(s^4 + 2s^2 + 1) = (s^2 + 1)^2$, que indica raíces repetidas en el eje $j\omega$.

EJEMPLO 6.4. Control de un robot

Considérese el control de un brazo robótico como el de la Figura 6.4. Existen alrededor de un millón de robots en servicio en todo el mundo [10]. El robot que se muestra en la Figura 6.4 es un sistema microrobot de seis patas que utiliza patas muy flexibles con controladores de alta ganancia que pueden llegar a ser inestables y oscilatorios. Con esta condición, se tiene el polinomio característico

$$q(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63. \tag{6.15}$$

El array de Routh es

s^5	1	4	3
s^4	1	24	63
s^3	−20	−60	0
s^2	21	63	0
s^1	0	0	0

Por tanto, el polinomio auxiliar es

$$U(s) = 21s^2 + 63 = 21(s^2 + 3) = 21(s + j\sqrt{3})(s - j\sqrt{3}), \tag{6.16}$$

el cual indica que hay dos raíces sobre el eje imaginario. A fin de examinar las raíces restantes, se divide entre el polinomio auxiliar para obtener

$$\frac{q(s)}{s^2 + 3} = s^3 + s^2 + s + 21.$$

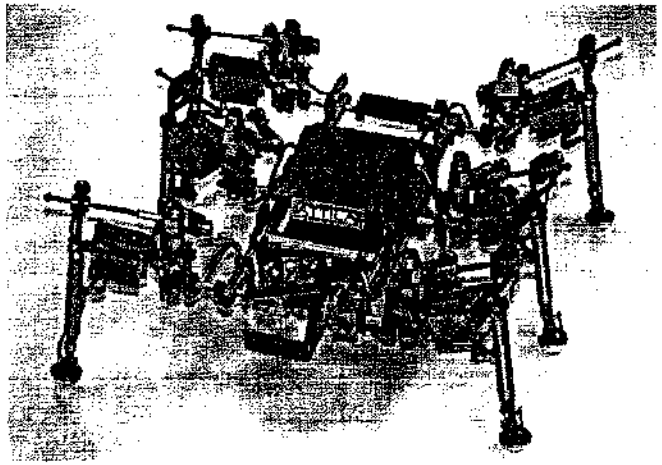


FIGURA 6.4. Un sistema microrobot completamente integrado de seis patas. El diseño de seis patas proporciona máxima destreza. Las patas también proporcionan un sistema sensorial único para la interacción con el medio. Está equipado con una red de sensores que comprende 150 sensores de 12 tipos diferentes. Las patas están instrumentadas para que el robot pueda determinar la estructura del terreno, la textura de la superficie, la dureza e incluso el color. La cámara giro-estabilizada y el telémetro se pueden utilizar para recoger datos que están más allá del alcance inmediato del robot. Este sistema de alto rendimiento es capaz de andar rápidamente, franquear obstáculos y realizar movimientos dinámicos. (Cortesía de la Corporación Robotics IS.)

Estableciendo un array de Routh para esta ecuación, se tiene

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & 21 \\ s^1 & -20 & 0 \\ s^0 & 21 & 0 \end{array}.$$

Los dos cambios de signo en la primera columna indican la presencia de dos raíces en la parte derecha del plano, y el sistema es inestable. Las raíces en la derecha del plano son $s = +1 \pm j\sqrt{6}$. ■

EJEMPLO 6.5. Control de soldadura

Los grandes robots de soldadura se utilizan hoy en día en plantas de automoción. La cabeza de soldadura se mueve a diferentes posiciones sobre el cuerpo que gira, y se requiere una respuesta rápida y precisa. En la Figura 6.5 se muestra un diagrama de bloques de un sistema posicionador de una cabeza de soldadura. Se desea determinar los intervalos de K y de a para los cuales el sistema sea estable. La ecuación característica es

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K(s + a)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = 0.$$

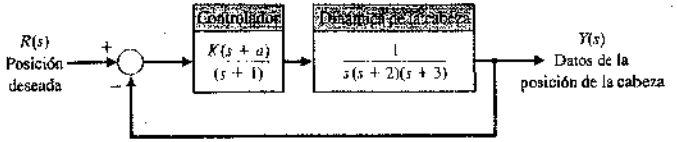


FIGURA 6.5 Control de posición de la cabeza de soldadura.

Por tanto, $q(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (K + 6)s + Ka = 0$. Estableciendo el array de Routh, se tiene que

$$\begin{array}{c|cc} s^4 & 1 & 11 \quad Ka \\ s^3 & 6 & (K + 6) \\ s^2 & b_3 & Ka \\ s^1 & c_3 & \\ s^0 & Ka & \end{array},$$

donde

$$b_3 = \frac{60 - K}{6} \quad \text{y} \quad c_3 = \frac{b_3(K + 6) - 6Ka}{b_3}.$$

El coeficiente c_3 establece el intervalo aceptable de K y a, mientras que b_3 requiere que K sea menor que 60. Haciendo $c_3 = 0$, se obtiene

$$(K - 60)(K + 6) + 36Ka = 0.$$

La relación requerida entre K y a es entonces

$$a \leqslant \frac{(60 - K)(K + 6)}{36K}$$

cuando a es positivo. Por tanto, si $K = 40$, se requiere que $a \leqslant 0.639$. ■

La forma general de la ecuación característica de un sistema de orden n es

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + \omega_n^n = 0.$$

Se divide entre ω_n^n y se utiliza $s^* = s/\omega_n$ para obtener la forma normalizada de la ecuación característica:

$$s^{*n} + bs^{*n-1} + cs^{*n-2} + \cdots + 1 = 0.$$

Por ejemplo, se normaliza

$$s^3 + 5s^2 + 2s + 8 = 0$$

dividiendo entre $8 = \omega_n^3$, se obtiene

$$\frac{s^3}{\omega_n^3} + \frac{5}{2}\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2}{4}\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1 = 0,$$

Tabla 6.1. Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

n	Ecuación característica	Criterio
2	$s^2 + bs + 1 = 0$	$b > 0$
3	$s^3 + bs^2 + cs + 1 = 0$	$bc - 1 > 0$
4	$s^4 + bs^3 + cs^2 + ds + 1 = 0$	$bcd - d^2 - b^2 > 0$
5	$s^5 + bs^4 + cs^3 + ds^2 + es + 1 = 0$	$bcd + b - d^2 - b^2e > 0$
6	$s^6 + bs^5 + cs^4 + ds^3 + es^2 + fs + 1 = 0$	$(bcd + bf - d^2 - b^2e)e + b^2c - bd - bc^2f - f^2 + bfe + cdf > 0$

Nota: Las ecuaciones son normalizadas por $(\omega_n)^n$.

o

$$s^{*3} + 2.5s^{*2} + 0.5s^* + 1 = 0,$$

donde $s^* = s/\omega_n$. En este caso, $b = 2.5$ y $c = 0.5$. Utilizando esta forma normalizada de la ecuación característica se resume el criterio de estabilidad para una ecuación característica de hasta sexto orden, tal como se muestra en la Tabla 6.1. Obsérvese que $bc = 1.25$ y el sistema es estable.

6.3. ESTABILIDAD RELATIVA DE LOS SISTEMAS DE CONTROL CON REALIMENTACIÓN

La verificación de la estabilidad por el criterio de Routh-Hurwitz proporciona solamente una respuesta parcial al problema de la estabilidad. El criterio de Routh-Hurwitz confirma la estabilidad absoluta de un sistema al determinar si alguna raíz de la ecuación característica está en la parte derecha del plano s. Sin embargo, si el sistema satisface el criterio de Routh-Hurwitz y es absolutamente estable, es deseable determinar la **estabilidad relativa**; es decir, se necesita investigar el amortiguamiento relativo de cada raíz de la ecuación característica. La estabilidad relativa de un sistema puede definirse como la propiedad medida por la parte real relativa de cada raíz o par de raíces. Así, la raíz r_2 es relativamente más estable que las raíces r_1, $\hat{r}_1$, como se muestra en la Figura 6.6. La estabilidad relativa de un sistema también se puede definir en función de los coeficientes relativos de amortiguamiento ζ de cada par de raíces complejas y, por tanto, en función de la velocidad de respuesta y la sobreelongación en lugar del tiempo de asentamiento.

En consecuencia, la investigación de la estabilidad relativa de cada raíz es evidentemente necesaria pues, como se vio en el Capítulo 5, la localización de los polos del lazo cerrado en el plano s determina el comportamiento del sistema. Por esto, es imprescindible

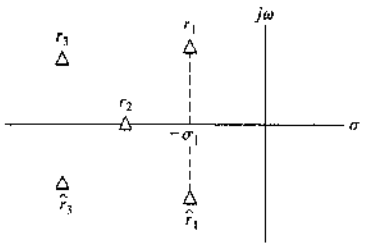


FIGURA 6.6
Localización de las raíces en el plano s.

que se examine de nuevo el polinomio característico $q(s)$ y se consideren varios métodos para la determinación de la estabilidad relativa.

Puesto que la estabilidad relativa de un sistema depende de la localización de las raíces de la ecuación característica, un primer método para establecer la estabilidad relativa utilizando una formulación del plano s es extender el criterio de Routh-Hurwitz. Esto puede lograrse de forma sencilla mediante un cambio de variable que desplace el eje del plano s con el objeto de utilizar el criterio de Routh-Hurwitz. Examinando la Figura 6.6, se observa que un desplazamiento del eje vertical en el plano s hasta $-\sigma_1$ dará como resultado las raíces r_1, $\hat{r}_1$ que aparecen en el eje desplazado. La magnitud correcta para desplazar el eje vertical debe obtenerse por prueba y error. Entonces, sin resolver el polinomio de quinto orden $q(s)$, se puede determinar la parte real de las raíces dominantes r_1, $\hat{r}_1$.

EJEMPLO 6.6. Eje desplazado

Considérese la ecuación característica sencilla de tercer orden

$$q(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4. \tag{6.17}$$

Inicialmente, supóngase que $s_n = s + 2$ y obsérvese que se obtiene un array de Routh sin que se presente un cero en la primera columna. Sin embargo, igualando la variable desplazada s_n a $s - 1$, se obtiene

$$(s_n - 1)^3 + 4(s_n - 1)^2 + 6(s_n - 1) + 4 = s_n^3 + s_n^2 + s_n + 1. \tag{6.18}$$

Entonces, la tabla de Routh se establece como

s_n^3	1	1
s_n^2	1	1
s_n^1	0	0
s_n^0	1	0

Existen raíces en el eje imaginario desplazado, las cuales pueden obtenerse del polinomio auxiliar

$$U(s_n) = s_n^2 + 1 = (s_n + j)(s_n - j) = (s + 1 + j)(s + 1 - j). \tag{6.19}$$ ■

El desplazamiento del eje del plano s es un método muy útil para determinar la estabilidad relativa de un sistema, particularmente para sistemas de orden mayor con varios pares de raíces conjugadas complejas de lazo cerrado.

6.4. ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS CON VARIABLES DE ESTADO

La estabilidad de un sistema modelado mediante un modelo de grafo de flujo de señal en variables de estado se puede averiguar fácilmente. La estabilidad de un sistema con una función de transferencia de entrada-salida $T(s)$ puede determinarse examinando el denominador del polinomio de $T(s)$. Por tanto, si la función de transferencia se escribe como

$$T(s) = \frac{p(s)}{q(s)},$$

donde $p(s)$ y $q(s)$ son polinomios en s, entonces la estabilidad del sistema se representa por las raíces de $q(s)$. El polinomio $q(s)$, cuando se hace igual a cero, se denomina ecuación característica. Las raíces de la ecuación característica deben encontrarse en el lado izquierdo del plano s para que el sistema presente una respuesta temporal estable. Por tanto, para averiguar la estabilidad de un sistema representado por una función de transferencia, se analiza la ecuación característica y se utiliza el criterio de Routh-Hurwitz. Si el sistema a analizar se representa mediante un modelo de estado de grafo de flujo de señal, se obtiene la ecuación característica evaluando el determinante del grafo de flujo. Si el sistema se representa mediante un modelo de diagramas de bloques, se obtiene la ecuación característica utilizando los métodos de reducción de los diagramas de bloques. Para ilustrar estos métodos se analiza la estabilidad del sistema del Ejemplo 3.1.

EJEMPLO 6.7. Estabilidad de un sistema

La función de transferencia $T(s)$ examinada en el Ejemplo 3.1 es

$$T(s) = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6}. \tag{6.20}$$

El polinomio característico para este sistema es

$$q(s) = s^3 + 8s^2 + 16s + 6. \tag{6.21}$$

Este polinomio característico se obtiene también fácilmente del modelo de grafo de flujo o del modelo del diagrama de bloques que se muestra en la Figura 3.8 o el mostrado en la Figura 3.10. Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz, se obtiene que el sistema es estable y que todas las raíces de $q(s)$ se encuentran en el lado izquierdo del plano s. ■

A menudo, se determina el modelo de grafo de flujo o de diagrama de bloques directamente de un conjunto de ecuaciones diferenciales de estado. Se puede utilizar directamente el grafo de flujo para determinar la estabilidad del sistema obteniendo la ecuación característica del determinante del grafo de flujo $\Delta(s)$. Análogamente, se puede utilizar la reducción del diagrama de bloques para definir la ecuación característica. Una ilustración de estos enfoques ayudará a comprender estos métodos.

EJEMPLO 6.8. Estabilidad de un sistema de segundo orden

Un sistema de segundo orden se describe por las dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \quad \text{y} \quad \dot{x}_2 = +1x_2 - Kx_1 + Ku,$$

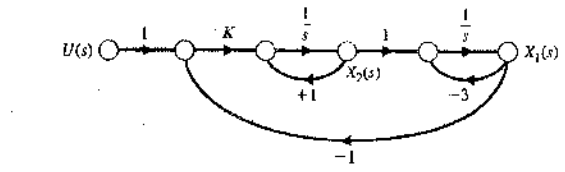
donde la notación del punto significa la primera derivada y $u(t)$ es la entrada. La Figura 6.7(a) muestra el modelo de grafo de flujo de este conjunto de ecuaciones diferenciales y la Figura 6.7(b) muestra el modelo del diagrama de bloques.

Utilizando la fórmula de la ganancia del flujo de señal de Mason, se observan tres lazos:

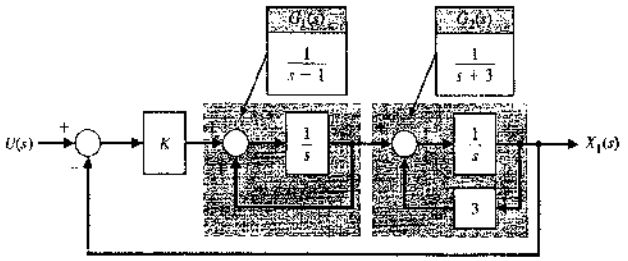
$$L_1 = s^{-1}, \qquad L_2 = -3s^{-1} \quad \text{y} \quad L_3 = -Ks^{-2},$$

donde L_1 y L_2 no comparten un nodo común. Por tanto, el determinante es

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_2 = 1 - (s^{-1} - 3s^{-1} - Ks^{-2}) + (-3s^{-2}).$$



(a)



(b)

FIGURA 6.7
(a) Modelo de grafo de flujo para las ecuaciones en variables de estado del Ejemplo 6.8. (b) Modelo de diagrama de bloques.

Se multiplica por s^2 para obtener la ecuación característica

$$s^2 + 2s + (K - 3) = 0.$$

Como todos los coeficientes deben ser positivos, se requiere $K > 3$ para la estabilidad. Un análisis semejante puede realizarse utilizando el diagrama de bloques. Cerrando los dos lazos de realimentación se obtienen las dos funciones de transferencia:

$$G_1(s) = \frac{1}{s - 1} \quad \text{y} \quad G_2(s) = \frac{1}{s + 3},$$

como se ilustró en la Figura 6.7(b). La función de transferencia es

$$T(s) = \frac{KG_1(s)G_2(s)}{1 + KG_1(s)G_2(s)}.$$

Por tanto, la ecuación característica es

$$\Delta(s) = 1 + KG_1(s)G_2(s) = 0$$

o

$$\Delta(s) = (s - 1)(s + 3) + K = s^2 + 2s + (K - 3) = 0.$$

Esto confirma los resultados que se obtienen utilizando las técnicas de grafos de flujo de señal. ■

Un método para obtener la ecuación característica directamente de la ecuación diferencial vectorial se basa en el hecho de que la solución de un sistema no forzado es una función exponencial. La ecuación diferencial vectorial sin señales de entrada es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{6.22}$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector de estado. La solución es de forma exponencial, y se puede definir una constante λ tal que la solución del sistema para un estado pudiera ser $x_i(t) = k_i e^{\lambda t}$. Los λ_i se denominan raíces características o autovalores del sistema, los cuales son simplemente las raíces de la ecuación característica. Si se permite $\mathbf{x} = \mathbf{k}e^{\lambda t}$ y se sustituye en la Ecuación (6.22), se tiene

$$\lambda \mathbf{k} e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{k} e^{\lambda t} \tag{6.23}$$

o

$$\lambda \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{6.24}$$

La Ecuación (6.24) se puede escribir como

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{6.25}$$

donde $\mathbf{I}$ es igual a la matriz identidad y $\mathbf{0}$ igual a la matriz nula. Este conjunto de ecuaciones simultáneas tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante desaparece; es decir, solamente si

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \tag{6.26}$$

La ecuación de orden n-ésimo en λ resultante de la evaluación de este determinante es la ecuación característica, y la estabilidad del sistema se puede averiguar fácilmente. Se considerará otra vez el sistema de tercer orden descrito en el Ejemplo 3.2 para ilustrar este método.

EJEMPLO 6.9. Sistema epidémico cerrado

La ecuación diferencial vectorial del sistema epidémico viene dada por la Ecuación (3.55) y se repite aquí como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ \beta & -\gamma & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica es entonces

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det\left\{\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ \beta & -\gamma & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \det\begin{bmatrix} (\lambda + \alpha) & \beta & 0 \\ -\beta & (\lambda + \gamma) & 0 \\ -\alpha & -\gamma & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda[(\lambda + \alpha)(\lambda + \gamma) + \beta^2]$$

$$= \lambda[\lambda^2 + (\alpha + \gamma)\lambda + (\alpha\gamma + \beta^2)] = 0.$$

De este modo, se obtiene la ecuación característica del sistema, y es similar a la que se obtuvo en la Ecuación (3.57) mediante los métodos de grafos de flujos. La raíz adicional $\lambda = 0$ resulta de la definición de x_3 como la integral de $(\alpha x_1 + \gamma x_2)$, y x_3 no afecta a las restantes variables de estado. De este modo, la raíz $\lambda = 0$ indica la integración conectada con x_3. La ecuación característica indica que el sistema es marginalmente estable cuando $(\alpha + \gamma) > 0$ y $(\alpha\gamma + \beta^2) > 0$. ■

Por poner otro ejemplo, considérese otra vez el péndulo invertido descrito en el Ejemplo 3.4. La matriz del sistema es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(mg/M) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g/l & 0 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica se puede obtener desde el determinante $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ como sigue:

$$\det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & mg/M & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -(g/l) & \lambda \end{bmatrix} = \lambda\left[\lambda\left(\lambda^2 - \frac{g}{l}\right)\right] = \lambda^2\left(\lambda^2 - \frac{g}{l}\right) = 0.$$

La ecuación característica indica que hay dos raíces en $\lambda = 0$: una en $\lambda = +\sqrt{g/l}$ y otra en $\lambda = -\sqrt{g/l}$. Por tanto, el sistema es inestable, debido a que hay una raíz en el plano derecho en $\lambda = +\sqrt{g/l}$. Las dos raíces en $\lambda = 0$ darán lugar también a una respuesta no limitada.

6.5. EJEMPLO DE DISEÑO: CONTROL DE GIRO DE UN VEHÍCULO CON BANDAS DE RODAMIENTO

El diseño del control de giro de un vehículo con bandas de rodamiento supone la selección de dos parámetros [8]. En la Figura 6.8, el sistema que se muestra en la parte (a) tiene el modelo que se muestra en la parte (b). Los dos rieles operan a velocidades diferentes con el fin de permitir girar al vehículo. Se deben seleccionar K y a para que el sistema sea estable y el error en estado estacionario para una orden de rampa sea menor o igual al 24% de la magnitud de la orden.

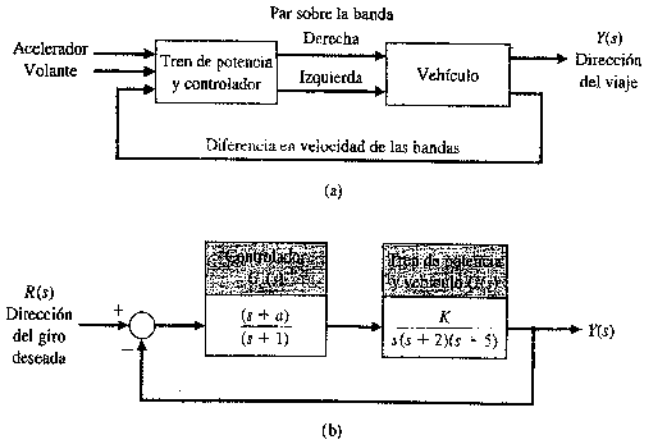


FIGURA 6.8
(a) Sistema de control de giro de un vehículo con dos bandas de rodamiento. (b) Diagrama de bloques.

La ecuación característica del sistema realimentado es

$$1 + G_c G(s) = 0$$

o

$$1 + \frac{K(s + a)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 5)} = 0. \tag{6.27}$$

Por tanto, se tiene

$$s(s + 1)(s + 2)(s + 5) + K(s + a) = 0$$

o

$$s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K + 10)s + Ka = 0. \tag{6.28}$$

Para determinar la región estable para K y a, se estable la tabla de Routh como

s^4	1	17	Ka
s^3	6	$(K + 10)$	0
s^2	b_3	Ka	
s^1	c_3		
s_0	Ka		

donde

$$b_3 = \frac{126 - K}{8} \quad \text{y} \quad c_3 = \frac{b_3(K + 10) - 8Ka}{b_3}.$$

Para que los elementos de la primera columna sean positivos, se requiere que Ka, b_3 y c_3 sean positivos. Por lo tanto, se requiere

$$K < 126,$$
$$Ka > 0, \quad \text{y}$$
$$(K + 10)(126 - K) - 64Ka > 0. \tag{6.29}$$

La Figura 6.9 muestra la región de estabilidad para $K > 0$. El error en estado estacionario para una entrada de rampa $r(t) = At$, $t > 0$ es

$$e_{ss} = A/K_v,$$

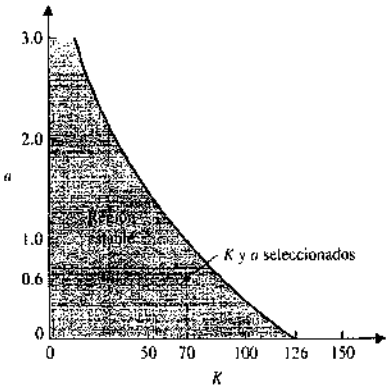


FIGURA 6.9
Región estable.

donde

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_cG = Ka/10.$$

Por tanto, se tiene

$$e_{ss} = \frac{10A}{Ka}. \tag{6.30}$$

Cuando e_{ss} es igual a 23.8% de A, se requiere que $Ka = 42$. Esto se puede satisfacer seleccionando el punto de la región estable cuando $K = 70$ y $a = 0.6$, como se muestra en la Figura 6.9. Otro diseño aceptable se podría alcanzar cuando $K = 50$ y $a = 0.84$. Se puede calcular una serie de posibles combinaciones de K y a que satisfagan $Ka = 42$ y que se encuentren dentro de la región estable, y todas darán soluciones de diseño aceptables. Sin embargo, no todos los valores seleccionados de K y a estarán dentro de la región estable. Obsérvese que K no puede exceder de 126.

6.6. ESTABILIDAD DE SISTEMAS UTILIZANDO MATLAB

Esta sección comienza con un estudio del método de estabilidad de Routh-Hurwitz. Se verá cómo MATLAB puede ayudar en el análisis de estabilidad proporcionando un método fácil y preciso para el cálculo de los polos de la ecuación característica. Para el caso de la ecuación característica como una función de un único parámetro, será posible generar un gráfico que muestre el movimiento de los polos cuando varía el parámetro. La sección finaliza con un ejemplo.

La función introducida en esta sección es la función for, la cual se utiliza para repetir un número de órdenes un número determinado de veces.

Estabilidad de Routh-Hurwitz. Como se formuló anteriormente, el criterio de Routh-Hurwitz es un criterio necesario y suficiente para la estabilidad. Dada una ecuación característica con coeficientes fijos, se puede utilizar Routh-Hurwitz para determinar el número de raíces en el semiplano derecho. Por ejemplo, considérese la ecuación característica

$$q(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24 = 0$$

asociada con el sistema de control en lazo cerrado que se muestra en la Figura 6.10. La Figura 6.11 muestra el array de Routh-Hurwitz correspondiente. Los dos cambios de signo en la primera columna indican que hay dos raíces del polinomio característico en el semiplano derecho; por tanto, el sistema en lazo cerrado es inestable. Utilizando

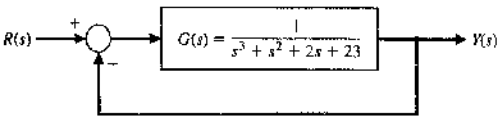


FIGURA 6.10
Sistema de control en lazo cerrado con $T(s) = Y(s)/R(s) = 1/(s^3 + s^2 + 2s + 24)$.

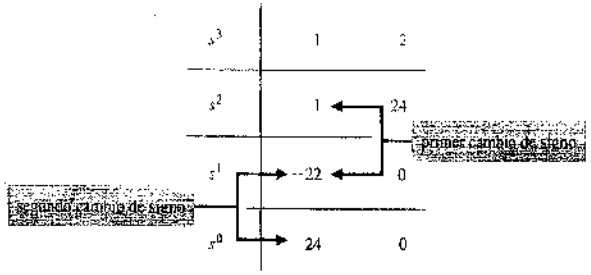


FIGURA 6.11
Tabla de Routh para el sistema de control en lazo cerrado $T(s) = Y(s)/R(s) = 1/(s^3 + s^2 + 2s + 24)$.

```
>>numg=[1]; deng=[1 1 2 23]; sysg=tf(numg,deng);
>>sys=feedback(sysg,[1]);
>>pole(sys)

ans =

   -3.0000
    1.0000 + 2.6458i
    1.0000 - 2.6458i
```

Polos inestables

FIGURA 6.12
Uso de la función **pole** para calcular los polos del sistema de control en lazo cerrado de la Figura 6.10.

MATLAB, se puede verificar el resultado de Routh-Hurwitz calculando directamente las raíces de la ecuación característica, como se muestra en la Figura 6.12, con la función pole. Recuérdese que la función pole calcula los polos del sistema.

Si la ecuación característica es una función de un único parámetro, el método de Routh-Hurwitz puede utilizarse para determinar el intervalo de valores que el parámetro puede tomar para mantener la estabilidad. Considérese el sistema realimentado de lazo cerrado de la Figura 6.13. La ecuación característica es

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K = 0.$$

Utilizando el método Routh-Hurwitz, se obtiene que se requiere $0 < K < 8$ para la estabilidad (*véase* la Ecuación 6.12). Se puede utilizar MATLAB para verificar este resultado gráficamente. Como se muestra en la Figura 6.14(a) se determina un vector de valores para K en el cual se desea calcular las raíces de la ecuación característica. Después, utilizando la función roots, se calculan y dibujan las raíces de la ecuación característica, como se muestra en la Figura 6.14(b). Se puede observar que cuando K aumenta, las raíces de la ecuación característica se mueven hacia el semiplano derecho cuando la ganancia tiende a $K = 8$, y eventualmente dentro del semiplano derecho cuando $K > 8$.

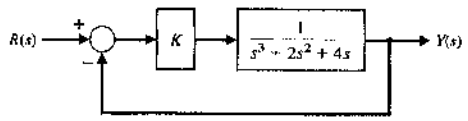
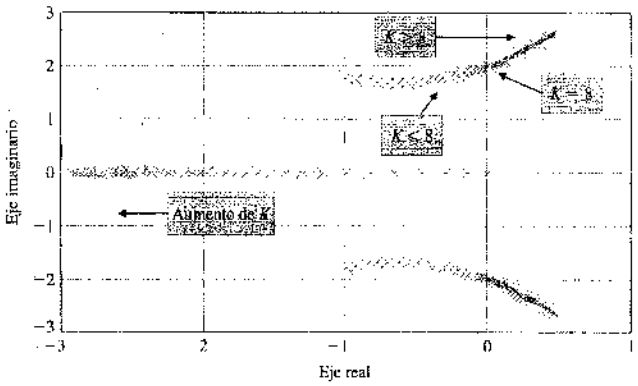


FIGURA 6.13
Sistema de control en lazo cerrado con $T(s) = Y(s)/R(s) = K/(s^3 + 2s^2 + 4s + K)$.



(a)

```
% Este programa calcula las raíces de la ecuación
% característica q(s) = s^3 + 2 s^2 + 4 s + K for 0<K<20
%
K=[0:0.5:20];
for i=1:length(K)
   q=[1 2 4 K(i)];
   p(:,i)=roots(q);
end
plot(real(p),imag(p),'x'), grid
xlabel('Eje real'), ylabel('Eje Imaginario')
```

Bucle para la raíces como una función de K

(b)

FIGURA 6.14
(a) Gráfica de la localización de las raíces de $q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$ para $0 \leq K \leq 20$. (b) Programa de MATLAB.

El programa de la Figura 6.14 contiene la función for. Esta función proporciona un mecanismo para ejecutar repetidamente una serie de órdenes un determinado número de veces. La función for unida a un orden end establece un lazo de cálculo repetido. La Figura 6.15 describe el formato de la función for y proporciona un ejemplo ilustrativo de su utilidad. El ejemplo establece un lazo que se repite diez veces. Durante la iteración i-ésima, donde $1 \leq i \leq 10$, el elemento i-ésimo del vector a se hace igual a 20 y el escalar b se vuelve a calcular.

El método Routh-Hurwitz permite realizar afirmaciones definitivas respecto a la estabilidad absoluta de un sistema lineal. El método no aborda el tema de la estabilidad relativa, el cual está directamente relacionado con la localización de las raíces de la ecuación característica. Routh-Hurwitz dice cuántos polos se encuentran en el semiplano derecho, pero no especifica la localización de los polos. Con MATLAB, se puede fácilmente calcular explícitamente los polos, lo que permite hacer observaciones sobre la estabilidad relativa del sistema.

EJEMPLO 6.10. Control de un vehículo con bandas de rodamiento

La Figura 6.8 muestra el diagrama de bloques del sistema de control para el vehículo con dos bandas de rodamiento. El objetivo de diseño es encontrar a y K tal que el sistema sea estable y el error en estado estacionario para una entrada de rampa sea menor o

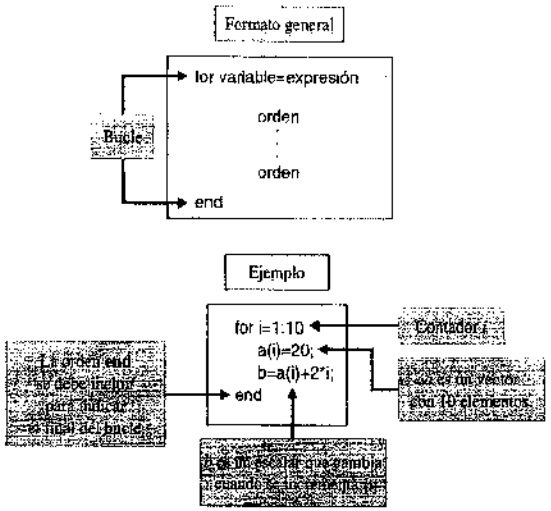


FIGURA 6.15
La función for y un ejemplo ilustrativo.

igual al 24% de la orden. Se puede utilizar el método de Routh-Hurwitz para ayudar en la búsqueda de valores adecuados para a y K. La ecuación característica en lazo cerrado es

$$q(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K + 10)s + aK = 0.$$

Utilizando el array de Routh, se obtiene que, para la estabilidad, se requiere que

$$K < 126 \quad \text{y} \quad aK > 0.$$

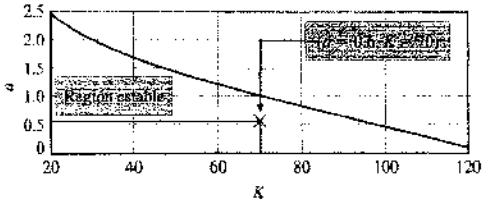
Para K positivo, resulta que se puede restringir la búsqueda a $0 < K < 126$ y $a > 0$. El enfoque será utilizar MATLAB para encontrar una parametrización de a frente a la región de K en la cual está asegurada la estabilidad. Después, se puede encontrar un conjunto de (a, K) perteneciente a la región estable tal que se cumpla la especificación de error en estado estacionario. Este procedimiento, que se muestra en la Figura 6.16, supone seleccionar un intervalo de valores para a y K y calcular las raíces del polinomio característico para valores específicos de a y K. Para cada valor de K, se obtiene el primer valor de a que tiene por resultado al menos una raíz de la ecuación característica en el semiplano derecho. El proceso se repite hasta que se examina el intervalo completo seleccionado. La gráfica de los pares (a, K) define la separación entre las regiones estables e inestables. La región a la izquierda de la gráfica de a frente a K en la Figura 6.16 es la región estable.

Si se supone que $r(t) = At$, $t > 0$, el error en estado estacionario es

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{s(s+1)(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+2)(s+5) + K(s+a)} \cdot \frac{A}{s^2} = \frac{10A}{aK},$$

donde se ha utilizado el hecho de que

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c G(s)} R(s) = \frac{s(s+1)(s+2)(2+5)}{s(s+1)(s+2)(s+5) + K(s+a)} R(s).$$



(a)

twotrackstable.m

```
% La región de estabilidad a-K para el problema del control de giro del vehículo
% con dos bandas de rodamiento
%
a=[0.1:0.01:3.0]; K=[20:1:120];
x=0*K; y=0*K;
n=length(K); m=length(a);
for i=1:n
 for j=1:m
  q=[1, 8, 17, K(i)+10, K(i)*a(j)];
  p=roots(q);
  if max(real(p)) > 0, x(i)=K(i); y(i)=a(j-1); break; end
 end
end
plot(x,y), grid, xlabel('K'), ylabel('a')
```

Intervalo de a y K

Inicialización de los vectores de dibujo como vectores nulos de longitudes adecuadas

Polinomio característico

Para un valor dado de K determínese el primer valor de a para la inestabilidad

(b)

FIGURA 6.16
Región de estabilidad para a y K para el control de giro del vehículo con dos bandas de rodamiento.

Dada la especificación en estado estacionario, $e_{ss} < 0.24A$, se comprueba que la especificación se cumple cuando

$$\frac{10A}{aK} < 0.24A$$

o

$$aK > 41.67. \tag{6.31}$$

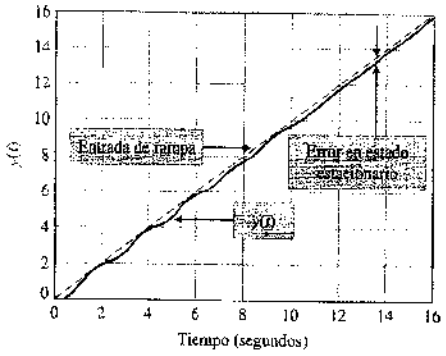
Cualquier valor de a y K que se encuentre en la región estable en la Figura 6.16 y que satisfaga la Ecuación (6.31) dará lugar a un diseño aceptable. Por ejemplo, $K = 70$ y $a = 0.6$ satisfacen todos los requisitos de diseño. La función de transferencia en lazo cerrado (con $a = 0.6$ y $K = 70$) es

$$T(s) = \frac{70s + 42}{s^4 + 8s^3 + 17s^2 + 80s + 42}.$$

Los polos en lazo cerrado asociados son

$$\begin{aligned} s &= -7.0767, \\ s &= -0.5781, \\ s &= -0.1726 + 3.1995i, \quad \text{y} \\ s &= -0.1726 - 3.1995i. \end{aligned}$$

La Figura 6.17 muestra la correspondiente respuesta a una entrada de rampa unitaria. El error en estado estacionario es menor que 0.24, tal como se deseaba. ■



(a)

aKramp.m

```
% Respuesta a una rampa para el control de giro del vehículo con dos
% bandas de rodamiento con a=0.6 y K=70.
%
t=[0:0.01:16]; u=t;
numgc=[1 0.6]; dengc=[1 1]; sysgc=tf(numgc,dengc);
numg=[70]; deng=[1 7 10 0]; sysg=tf(numg,deng);
sysa=series(sysgc,sysg);
sys=feedback(sysa,[1]);
y=lsim(sys,u,t);
plot(t,y,t,u,'--'), grid
xlabel('Tiempo (segundos)'), ylabel('y(t)')
```

(b)

FIGURA 6.17
(a) Respuesta a una rampa para $a = 0.6$ y $K = 70$ para el control de giro del vehículo con dos bandas de rodamiento. (b) Programa de MATLAB.

La estabilidad en sistemas de variables de estado. Ahora se vuelve a determinar la estabilidad de sistemas descritos en forma de variables de estado. Supóngase que se tiene un sistema en forma de espacio de estados como el de la Ecuación (6.22). La estabilidad del sistema se puede evaluar con la **ecuación característica** asociada con la matriz del sistema **A**. La ecuación característica es

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \tag{6.32}$$

El lado izquierdo de la ecuación característica es un polinomio en s. Si todas las raíces de la ecuación característica tienen partes reales negativas [es decir, $\mathrm{Re}(s_i) < 0$], el sistema es estable.

Cuando el modelo del sistema está dado en forma de variables de estado, se debe calcular el polinomio característico asociado con la matriz **A**. Con respecto a esto, se tienen varias opciones. Se puede calcular la ecuación característica directamente de la Ecuación (6.32) calculando manualmente el determinante de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Después, se pueden calcular las raíces utilizando la función roots para comprobar la estabilidad, o, también, se puede utilizar el método de Routh-Hurwitz para detectar cualquier raíz inestable. Desafortunadamente, los cálculos manuales pueden resultar muy largos, especialmente si la dimensión de **A** es grande. Sería deseable evitar este cálculo manual si fuera posible. Como es de esperar, MATLAB puede ayudar en esta tentativa.

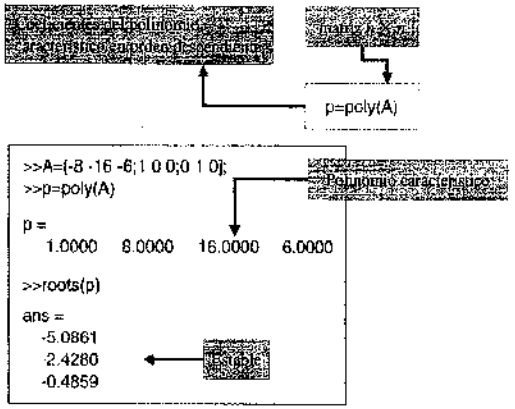


FIGURA 6.18
Cálculo del polinomio característico de **A** con la función poly.

La función poly descrita en la Sección 2.10 se puede utilizar para calcular la ecuación característica asociada a **A**. Recuérdese que poly se utiliza para formar un polinomio a partir de un vector de raíces. También se puede utilizar para calcular la ecuación característica de **A**, como se ilustra en la Figura 6.18. La matriz de entrada **A** es

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -16 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y el polinomio característico asociado es

$$s^3 + 8s^2 + 16s + 6 = 0.$$

Si **A** es una matriz de $n \times n$, poly (**A**) es la ecuación característica representada por los $n + 1$ elementos del vector fila cuyos elementos son los coeficientes de la ecuación característica.

EJEMPLO 6.11. Región de estabilidad para una planta inestable

Un avión de reacción tiene un sistema de control como el mostrado en la Figura 6.19 [17]. Supóngase que $z > 0$ y $p > 0$. El sistema es inestable en lazo abierto (sin realimentación), debido a que la ecuación característica de la planta y el controlador es

$$s(s - 1)(s + p) = s[s^2 + (p - 1)s - p] = 0.$$

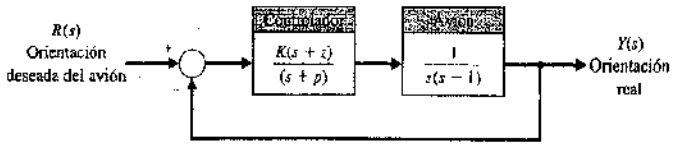


FIGURA 6.19
Sistema de control para un avión de reacción. Supóngase que $z > 0$ y $p > 0$.

Obsérvese que, debido a que un término dentro de los paréntesis tiene un coeficiente negativo, la ecuación característica tiene al menos una raíz a la derecha del plano s. La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es

$$s^3 + (p-1)s^2 + (K-p)s + Kz = 0.$$

El objetivo es determinar la región de estabilidad para K, p y z. El array de Routh es

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & (K-p) \\ s^2 & (p-1) & Kz \\ s^1 & b_2 & \\ s^0 & Kz & \end{array},$$

donde

$$b_2 = \frac{(p-1)(K-p) - Kz}{(p-1)}.$$

Del criterio de Routh-Hurwitz, se obtiene que se requiere $Kz > 0$ y $p > 1$. Fijando $b_2 = 0$ se tiene

$$(p-1)(K-p) - Kz = K[(p-1) - z] - p(p-1) = 0.$$

Por tanto, se requiere que

$$K > \frac{p(p-1)}{(p-1) - z}. \tag{6.33}$$

Considérense dos casos:

1. $z \geq p - 1$: No hay $0 < K < \infty$ que lleve a la estabilidad.
2. $z < p - 1$: Cualquier $0 < K < \infty$ satisface las Ecuaciones (6.33) de condición de estabilidad para que dados un p y un z estuvieran en la estabilidad.

Las condiciones de estabilidad se pueden representar gráficamente. La Figura 6.20 muestra el programa de MATLAB utilizado para generar la superficie de estabilidad en tres dimensiones y meshgrid para generar los vectores para utilizar con la superficie mallada.

La Figura 6.21 muestra la gráfica tridimensional de la región de estabilidad para K, p y z. Un punto de estabilidad admisible es $z = 1$, $p = 10$ y $K = 15$. ■

```
% Región de estabilidad 3-D para el sistema de control del avión de reacción.
%
[p,z]=meshgrid(1.2:0.2:10,0.1:.2:10);
k=p.*(p-1)./(p-1-z);
mesh(k)
```

Transformar los dominios de p y z para la gráfica de mallas

Superficie de estabilidad

Generación del gráfico 3D

FIGURA 6.20
Programa de MATLAB para la región de estabilidad.

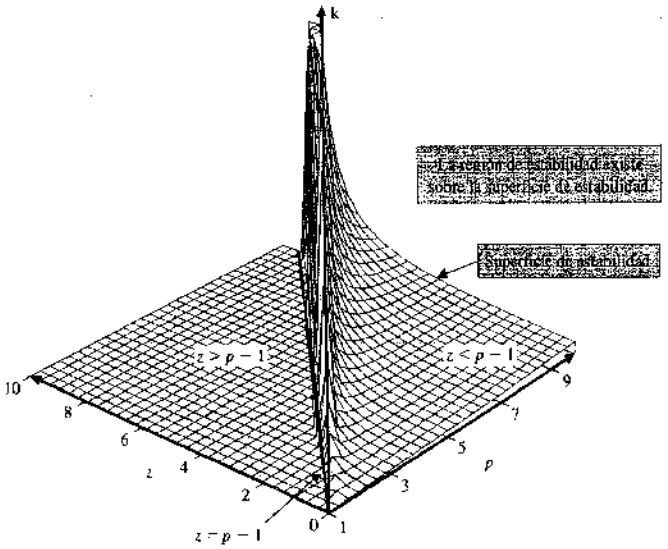


FIGURA 6.21
La región tridimensional de estabilidad se encuentra sobre la superficie mostrada.

6.7. EJEMPLO DE DISEÑO SECUENCIAL: SISTEMA DE LECTURA DE UNA UNIDAD DE DISCO

En la Sección 5.13, se examinó el diseño de la cabeza de un sistema de lectura con una ganancia K_a ajustable. En esta sección, se examinará la estabilidad del sistema cuando se ajusta K_a y después se reconfigura el sistema como en el paso 4 del proceso de diseño (*véase* la Figura 5.50).

Considérese el sistema mostrado en la Figura 6.22. Es el mismo sistema con un modelo del motor y de la carga que se consideró en el Capítulo 5, con la salvedad de que el sensor de realimentación de velocidad ha sido añadido, tal como muestra la Figura 6.22. Inicialmente, se considera el caso en que el interruptor está abierto. Por tanto, la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)}, \tag{6.34}$$

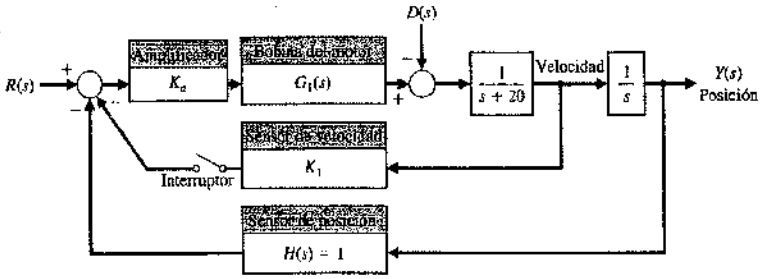


FIGURA 6.22
El sistema de la cabeza de una unidad de disco en lazo cerrado con una realimentación opcional de velocidad.

donde

$$G_1(s) = \frac{5000}{s + 1000}$$

y

$$G_2(s) = \frac{1}{s(s + 20)}.$$

La ecuación característica es

$$s(s + 20)(s + 1000) + 5000K_a = 0 \tag{6.35}$$

o

$$s^3 + 1020s^2 + 20\,000s + 5000K_a = 0.$$

Se utiliza el array de Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 20\,000 \\ s^2 & 1020 & 5000K_a \\ s^1 & b_2 & \\ s^0 & 5000K_a & \end{array},$$

donde

$$b_1 = \frac{(20\,000)1020 - 5000K_a}{1020}.$$

El caso $b_1 = 0$ tiene como resultado estabilidad marginal cuando $K_a = 4080$. Utilizando la ecuación auxiliar, se tiene

$$1020s^2 + 5000(4080) = 0,$$

o las raíces del eje $j\omega$ son $s = \pm j141.4$. Para que el sistema sea estable, $K_a < 4080$.

Ahora se añade la realimentación de la velocidad cerrando el interruptor en el sistema de la Figura 6.22. La función de transferencia en lazo cerrado para el sistema es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s)G_2(s)}{1 + [K_a G_1(s)G_2(s)](1 + K_1 s)}, \tag{6.36}$$

debido a que el factor de realimentación es igual a $(1 + K_1 s)$, como se muestra en la Figura 6.23.

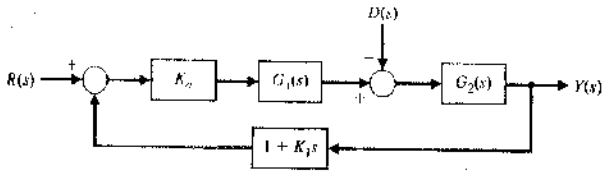


FIGURA 6.23
Sistema equivalente con el interruptor de la realimentación de velocidad cerrado.

La ecuación característica es entonces

$$1 + [K_a G_1(s)G_2(s)](1 + K_1 s) = 0$$

o

$$s(s + 20)(s + 1000) + 5000K_a(1 + K_1 s) = 0.$$

Por tanto, se tiene

$$s^3 + 1020s^2 + [20\,000 + 5000K_a K_1]s + 5000K_a = 0.$$

El array de Routh es

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & (20\,000 + 5000K_a K_1) \\ s^2 & 1020 & 5000K_a \\ s^1 & b_1 & \\ s^0 & 5000K_a & \end{array},$$

donde

$$b_1 = \frac{(20\,000 + 5000K_a K_1) - 5000K_a}{1020}.$$

Para garantizar la estabilidad, es necesario seleccionar el par (K_a, K_1) tal que $b > 0$, donde $K_a > 0$. Cuando $K_1 = 0.05$ y $K_a = 100$, se puede determinar la respuesta del sistema utilizando MATLAB como se muestra en la Figura 6.24. El tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) es aproximadamente 260 ms y el porcentaje de sobreelongación es cero. La Tabla 6.2 resume el comportamiento del sistema. Las especificaciones de comportamiento quedan casi satisfechas, y se necesita alguna iteración de K_1 para obtener el tiempo de asentamiento deseado de 250 ms.

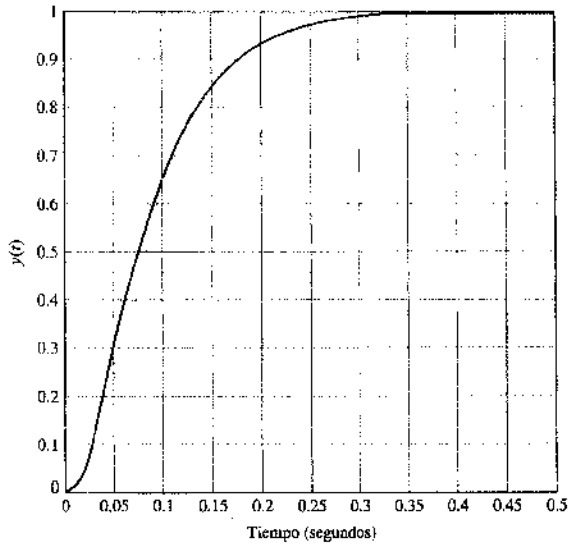
Tabla 6.2 Comportamiento del sistema de unidad de disco comparado con las especificaciones

Medida de comportamiento	Valor deseado	Respuesta real
Porcentaje de sobreelongación	Menor que 5%	0%
Tiempo de asentamiento	Menor que 250 ms	260 ms
Respuesta máxima a una perturbación unitaria	Menor que 5×10^{-3}	2×10^{-3}

```
Ka=100; K1=0.05;
ng1=[5000]; dg1=[1 1000]; sys1=tf(ng1,dg1);
ng2=[1]; dg2=[1 20 0]; sys2=tf(ng2,dg2);
nc=[K1 1]; dc=[0 1]; sysc=tf(nc,dc);
syso=series(Ka*sys1,sys2);
sys=feedback(syso,sysc); sys=minreal(sys);
t=[0:0.001:0.5];
y=step(sys,t); plot(t,y)
ylabel('y(t)'),xlabel('Tiempo (segundos)'),grid
```

Selección de la ganancia de realimentación de la velocidad K_1 y de la ganancia del amplificador K_a

(a)



(b)

FIGURA 6.24
Respuesta del sistema con realimentación de velocidad.
(a) Programa de MATLAB.
(b) Respuesta con $K_a = 100$ y $K_1 = 0.05$.

6.8. RESUMEN

En este capítulo se ha considerado el concepto de la estabilidad de un sistema de control con realimentación. Se desarrolló una definición de un sistema estable en función de la respuesta limitada de un sistema y se relacionó con la localización de los polos de la función de transferencia del sistema en el plano s.

Se incluyó el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz y se consideraron varios ejemplos. También se consideró la estabilidad relativa de un sistema de control con realimentación en términos de la localización de los polos y ceros de la función de transferencia del sistema en el plano s. Se consideró la estabilidad de los sistemas en variables de estado.

EJERCICIOS

E6.1. Un sistema tiene la ecuación característica $s^3 + 3Ks^2 + (2 + K)s + 5 = 0$. Determínese el intervalo de K para que el sistema sea estable.

Respuesta: $K > 0.63$

E6.2. Un sistema tiene la ecuación característica $s^3 + 9s^2 + 26s + 24 = 0$. Empleando el criterio de Routh-Hurwitz, demuéstrese que el sistema es estable.

E6.3. Determínense las raíces de la ecuación característica $s^4 + 9.5s^3 + 30.5s^2 + 37s + 12 = 0$.

E6.4. Un sistema de control tiene la estructura que se muestra en la Figura E6.4. Calcúlese la ganancia para la cual el sistema se hace inestable.

Respuesta: $0 < K < 1.5$

E6.5. Un sistema de realimentación unitaria tiene una función de transferencia de lazo

$$GH(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+6)},$$

donde $K = 20$. Determínense las raíces de la ecuación característica de este sistema.

E6.6. Para el sistema con realimentación del Ejercicio E6.5, hállese el valor de K cuando dos raíces caen sobre el eje imaginario. Determínese el valor de las tres raíces.

Respuesta: $s = -10, \pm j5.2$

E6.7. Un sistema con realimentación negativa tiene una función de transferencia de lazo

$$GH(s) = \frac{K(s+2)}{s(s-1)}.$$

(a) Calcúlese el valor de la ganancia cuando la ζ de las raíces del lazo cerrado es igual a 0.707. (b) Calcúlese el valor de la ganancia cuando el sistema de lazo cerrado tiene dos raíces sobre el eje imaginario.

E6.8. Los ingenieros de diseño trabajan en el desarrollo de aviones de combate pequeños, rápidos y de despegue vertical, que sean invisibles para los radares (aviones clandestinos). En la Figura E6.8 se muestra el concepto de avión que emplea toberas de chorro de giro rápido para la dirección de la nave [22]. El sistema de control de la dirección se muestra en la Figura E6.8. Determínese la ganancia máxima del sistema para una operación estable.

E6.9. Un sistema tiene la ecuación característica

$$s^3 + 3s^2 + (K+1)s + 4 = 0.$$

Hállese el intervalo de K para que el sistema sea estable.

Respuesta: $K > 1/3$

E6.10. Los ojos y los oídos se utilizan para conseguir el equilibrio. El sistema de orientación permite sentarse o permanecer en una posición deseada incluso en movimiento. Este sistema de orientación es sobre todo dirigido por la información recibida en el oído interno, donde los canales semicirculares miden la aceleración angular y los otolitos la aceleración lineal. Pero estas medidas de aceleración necesitan ser sustituidas por señales visuales. Inténtese el experimento siguiente: (a) Sitúese un pie en frente del otro, con las manos descansando sobre las caderas y los codos inclinados hacia fuera. (b) Ciérrense los ojos. ¿Experimentó una oscilación de baja frecuencia que creció hasta que perdió el equilibrio? ¿Es estable esta posición de orientación con o sin el uso de los ojos?

E6.11. Un sistema con una función de transferencia $Y(s)/R(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{24(s+1)}{s^4 + 6s^3 + 2s^2 + s + 3}.$$

Determínese el error en estado estacionario para una entrada de escalón unitario. ¿Es estable el sistema?

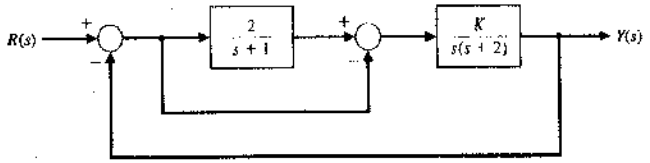


FIGURA E6.4
Sistema con realimentación.

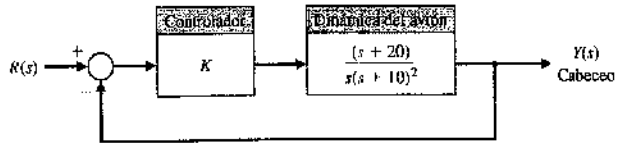


FIGURA E6.8
Control del cabeceo de un avión.

E6.12. Utilizando comportamientos magnéticos, un rotor es suspendido sin contacto. La técnica de suspensión sin contacto para rotores llega a ser más importante en aplicaciones industriales ligeras y pesadas [14]. La ecuación diferencial matricial para un sistema suspendido magnéticamente es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

donde $\mathbf{x}^T = [y, dy/dt, i]$, y = hueco de suspensión e i es la corriente electromagnética. Determínese si el sistema es estable.

Respuesta: El sistema es estable.

E6.13. Un sistema tiene la ecuación característica

$$q(s) = s^6 + 9s^5 + 31.25s^4 + 61.25s^3 + 67.75s^2 + 14.75s + 15 = 0.$$

(a) Determínese si el sistema es estable utilizando el criterio de Routh-Hurwitz. (b) Determínense las raíces de la ecuación característica.

Respuesta: (a) El sistema es marginalmente estable (b) $s = -3, -4, -1 \pm 2j, \pm 0.5j$

E6.14. Un sistema tiene la ecuación característica

$$q(s) = s^4 + 9s^3 + 45s^2 + 87s + 50 = 0.$$

(a) Determínese si el sistema es estable utilizando el criterio de Routh-Hurwitz. (b) Determínense las raíces de la ecuación característica.

E6.15. La ecuación diferencial matricial de un modelo en variables de estado tiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Determínese la ecuación característica. (b) Determínese si el sistema es estable utilizando el criterio de Routh-Hurwitz. (c) Determínense las raíces de la ecuación característica.

Respuesta: (a) $q(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$

E6.16. Un sistema tiene la ecuación característica

$$q(s) = s^3 + 20s^2 + 5s + 100 = 0.$$

(a) Determínese si el sistema es estable utilizando el criterio de Routh-Hurwitz. (b) Determínense las raíces de la ecuación característica.

E6.17. Determínese si los sistemas con las siguientes ecuaciones características son estables o inestables:

(a) $s^3 - 4s^2 + 6s + 100 = 0$,

(b) $s^4 - 6s^3 - s^2 - 17s - 6 = 0$ y

(c) $s^2 + 6s + 3 = 0$.

E6.18. Determínense las raíces de los siguientes polinomios:

(a) $s^3 + 10.4s^2 + 36.2s + 40.8 = 0$ y

(b) $s^3 + 9s^2 + 27s + 27 = 0$.

E6.19. Un sistema tiene la ecuación característica

$$q(s) = s^3 + 10s^2 + 29s + K = 0.$$

Desplácese el eje vertical a la derecha 2 unidades utilizando $s = s_n - 2$, y determínese el valor de la ganancia K para que las raíces complejas sean $s = -2 \pm j$.

E6.20. Un sistema tiene una función de transferencia $Y(s)/R(s) = T(s) = 1/s$. (a) ¿Es estable el sistema? (b) Si $r(t)$ es una entrada de escalón unitario, determínese la respuesta $y(t)$.

E6.21. Un sistema viene representado por la Ecuación (6.22) donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -k & -2 \end{bmatrix}.$$

Hállese el intervalo de k donde el sistema es estable.

E6.22. Considérese el sistema representado en forma de variables de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{Cx} + \mathbf{D}u,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -k & -k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \quad \mathbf{D} = [0].$$

(a) ¿Cuál es la función de transferencia del sistema? (b) ¿Para qué valores de k el sistema es estable?

E6.23. La Figura E6.23 muestra un sistema realimentado en lazo cerrado. ¿Para qué intervalo de valores de los parámetros K y p el sistema es estable?

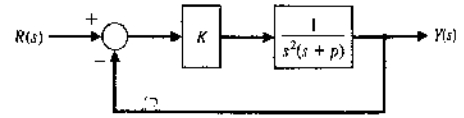


FIGURA E6.23. Sistema de lazo cerrado con parámetros K y p.

PROBLEMAS

P6.1. Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz, determínese la estabilidad de los siguientes polinomios:

(a) $s^2 + 5s + 2$

(b) $s^3 + 4s^2 + 6s + 6$

(c) $s^3 + 2s^2 - 4s + 20$

(d) $s^4 + s^3 + 2s^2 + 10s + 8$

(e) $s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + K$

(f) $s^5 + s^4 + 2s^3 + s^2 + s + 5$

(g) $s^5 + s^4 + 2s^3 + s^2 + s + K$

Para todos los casos, determínese el número de raíces, si las hay, e indíquese si alguna cae en la parte derecha del plano. Así mismo, cuando sea ajustable, determínese el intervalo de K que dé como resultado un sistema estable.

P6.2. En el Problema 4.5 se analizó un sistema de control de antena y se determinó que para reducir el efecto de las perturbaciones del viento, la ganancia del amplificador magnético k_a debería ser lo más grande posible. (a) Determínese el valor límite de la ganancia para mantener un sistema estable. (b) Se desea tener un tiempo de asentamiento del sistema igual a 1.5 segundos. Usando un eje desplazado y el criterio de Routh-Hurwitz, determínese el valor de la ganancia que satisface este requisito. Supóngase que las raíces complejas del sistema de lazo cerrado dominan la respuesta transitoria. (¿Es ésta una aproximación válida en este caso?)

P6.3. La soldadura de arco es una de las áreas de aplicación más importantes de los robots industriales [11]. En la mayoría de los casos de soldadura industrial, la incertidumbre en las dimensiones de las partes, la geometría de la junta y el proceso mismo de soldar requieren el uso de sensores para mantener la calidad. Como se muestra en la Figura P6.3, diversos sistemas emplean dispositivos visuales para medir la geometría de la mezcla de metal fundido. Este sistema emplea una velocidad constante de alimentación del alambre que se va a fundir. (a) Calcúlese el valor máximo de K para el sistema que proporcionará un sistema estable. (b) Para la mitad del valor máximo de K del apartado (a), determínense las raíces de la ecuación característica. (c) Determínese la sobreelongación del sistema del apartado (b) cuando está sujeto a una entrada de escalón.

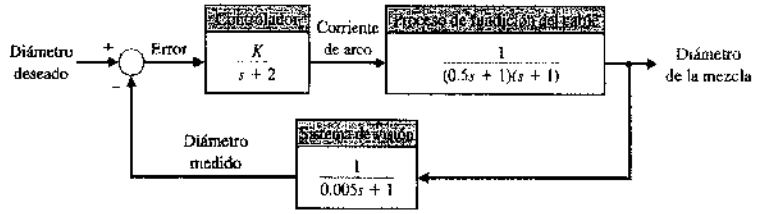


FIGURA P6.3
Control de soldadura.

P6.4. En la Figura P6.4 se muestra un sistema de control con realimentación. La función de transferencia del proceso es

$$G(s) = \frac{K(s + 40)}{s(s + 10)},$$

y la función de transferencia de la realimentación es $H(s) = 1/(s + 20)$. (a) Determínese el valor límite de la ganancia K para un sistema estable. (b) Para la ganancia que da como resultado la estabilidad marginal, determínese la magnitud de las raíces imaginarias. (c) Redúzcase la ganancia a la mitad de la magnitud del valor marginal y determínese la estabilidad relativa del sistema, (1) desplazando el eje y usando el criterio de Routh-Hurwitz, y (2) determinando las localizaciones de las raíces. Demuéstrese que las raíces se encuentran entre -1 y -2.

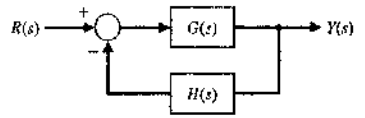


FIGURA P6.4. Sistema realimentado.

P6.5. Determínese la estabilidad relativa de los sistemas con las siguientes ecuaciones características, (1) desplazando el eje en el plano s y usando el criterio de Routh-Hurwitz, y (2) determinando la localización de las raíces en el plano s:

(a) $s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = 0$.

(b) $s^4 + 9s^3 + 30s^2 + 42s + 20 = 0$.

(c) $s^3 + 19s^2 + 110s + 200 = 0$.

P6.6. En la Figura P6.6 se muestra un sistema de control con realimentación unitaria. Determínese la estabilidad relativa del sistema con las siguientes funciones de transferencia, mediante la localización de las raíces en el plano s:

(a) $G(s) = \dfrac{10s + 2}{s^2(s + 1)}$

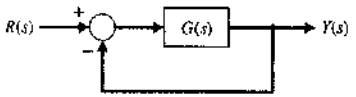


FIGURA P6.6. Sistema con realimentación unitaria.

(b) $G(s) = \dfrac{24}{s(s^3 + 10s^2 + 35s + 50)}$

(c) $G(s) = \dfrac{(s + 2)(s + 3)}{s(s + 4)(s + 6)}$

P6.7. El modelo lineal de un detector de fase (circuito de sincronización de fase) puede representarse con la Figura P6.7 [9]. Los sistemas de sincronización de fase se diseñan para mantener una diferencia de cero en la fase entre la señal portadora de entrada y un oscilador local controlado por voltaje. Los circuitos de sincronización de fase se aplican en la televisión de color, el seguimiento de proyectiles y la telemetría espacial. El filtro para una aplicación particular se escoge como

$$F(s) = \frac{10(s + 10)}{(s + 1)(s + 100)}.$$

Se desea minimizar el error del sistema en estado estacionario para un cambio de rampa en la señal de información de fase. (a) Determínese el valor límite de la ganancia $K_a K = K_u$ con el objeto de mantener un sistema estable. (b) Se decide que es aceptable un error en estado estacionario igual a 1° para una señal de rampa de 100 rad/s. Para ese valor de la ganancia K_u, determínese la localización de las raíces del sistema.

P6.8. Se ha diseñado un sistema de control de velocidad muy interesante y útil para un sistema de control de una silla de ruedas. Se desea que un paralítico, cuyo único movimiento posible es el de la cabeza, pueda conducir una silla de ruedas motorizada. En la Figura P6.8 se muestra un sistema propuesto que utiliza sensores de velocidad montados en engranajes de cabecera. Los sensores proporcionan una salida proporcional a la magnitud del movimiento de la cabeza. Hay un sensor montado a intervalos de 90°, de forma que puede dirigirse hacia adelante, hacia la izquierda, hacia la derecha o hacia atrás. Los valores típicos para las constantes de tiempo son $\tau_1 = 0.5$ s, $\tau_3 = 1$ s y $\tau_4 = 1/4$ s.

(a) Determínese la ganancia límite $K = K_1K_2K_3$ para un sistema estable.

(b) Cuando la ganancia K se hace igual a un tercio del valor límite, determínese si el tiempo de asentamiento (dentro del 2% del valor final del sistema) del sistema es menor que 4 s.

(c) Determínese el valor de la ganancia que da como resultado un sistema con tiempo de asentamiento de 4 s. Así mismo, obténgase el valor de las raíces de la ecuación característica cuando el tiempo de asentamiento es igual a 4 s.

P6.9. Se ha diseñado un dispositivo de almacenamiento de cintas de casete para un almacenamiento cuantioso [1]. Es necesario controlar con precisión la velocidad de la cinta. El control de velocidad del motor de las cintas está representado por el sistema que se muestra en la Figura P6.9.

(a) Determínese la ganancia límite para un sistema estable.

(b) Determínese la ganancia adecuada para que la sobreelongación correspondiente a una orden de escalón sea aproximadamente del 5%.

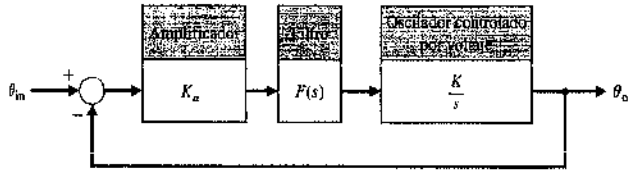


FIGURA P6.7
Sistema de sincronización de fase.

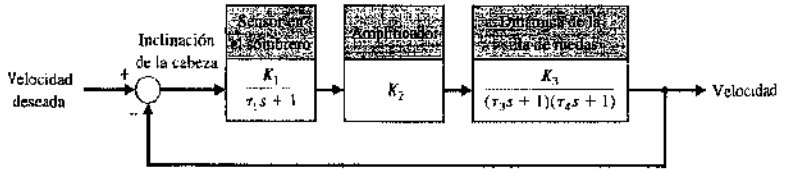


FIGURA P6.8
Sistema de control de una silla de ruedas.

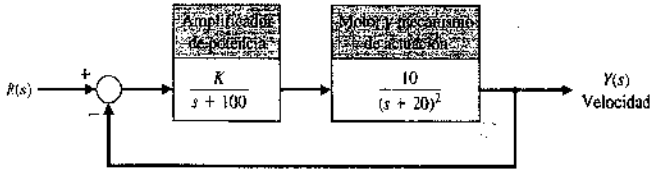


FIGURA P6.9
Sistema de unidad de cinta.

P6.10. Se pueden emplear robots en operaciones de ensamble y manufactura que requieren una manipulación versátil, precisa y rápida [10, 11]. La función de transferencia de lazo abierto de un brazo con activación directa se puede aproximar por medio de la expresión

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 10)}{s(s + 3)(s^2 + 4s + 8)}.$$

(a) Determínese el valor de la ganancia K cuando el sistema oscila. (b) Calcúlense las raíces del sistema de lazo cerrado para la K determinada en el apartado (a).

P6.11. Un sistema de control con realimentación tiene una ecuación característica:

$$s^3 + (1 + K)s^2 + 10s + (5 + 15K) = 0.$$

El parámetro K debe ser positivo. ¿Qué valor máximo puede adoptar K antes de que el sistema sea inestable? Cuando K es igual al valor máximo, el sistema oscila. Determínese la frecuencia de oscilación.

P6.12. Un sistema de control con realimentación tiene una ecuación característica:

$$s^6 + 5s^5 + 14s^4 + 40s^3 + 64s^2 + 80s + 96 = 0.$$

Determínese si el sistema es estable y hállense los valores de las raíces.

P6.13. La estabilidad de una motocicleta y su piloto es un área importante de estudio, ya que muchos diseños de motocicletas han originado vehículos difíciles de controlar [12, 13]. Las características de conducción de una motocicleta deben incluir un modelo del piloto y del vehículo. La dinámica de una motocicleta y un piloto promedio se puede representar por una función de transferencia de lazo abierto (Figura P6.4)

$$GH(s) = \frac{K(s^2 + 30s + 1125)}{s(s + 20)(s^2 + 10s + 125)(s^2 + 60s + 3400)}.$$

(a) Como aproximación, calcúlese el intervalo aceptable de K para un sistema estable cuando se desprecian los polinomios del numerador (ceros) y del denominador ($s^2 + 60s + 3400$). (b) Calcúlese el intervalo real de K aceptable para tener en cuenta todos los ceros y los polos.

P6.14. Un sistema tiene la función de transferencia

$$T(s) = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 20s + 6}.$$

(a) Determínese si el sistema es estable. (b) Determínense las raíces de la ecuación característica. (c) Dibújese la respuesta del sistema para una entrada de escalón unitario.

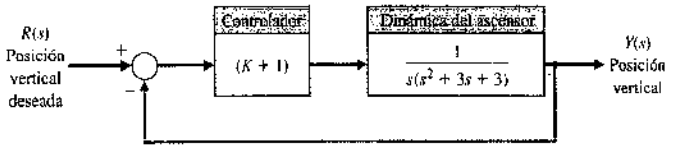


FIGURA P6.15
Sistema de control del ascensor

P6.15. El 16 de julio de 1993, el ascensor de la torre Landmark de 70 pisos en Yokohama que operaba con una velocidad pico de 45 km/h (28 mph), fue inaugurado como el más rápido de los ascensores superrápidos. Para alcanzar tal velocidad sin dejar el estómago de los pasajeros en el piso bajo, el ascensor acelera durante largos periodos de tiempo en lugar de hacerlo de forma precipitada. Subiendo alcanza la máxima velocidad únicamente en el piso 27; comienza a desacelerar 15 pisos después. El resultado es una aceleración pico similar a la de otros ascensores de rascacielos —un poco menor que la décima parte de la fuerza de la gravedad.

La ingeniosidad admirable ha ido haciendo esto más seguro y confortable. Se han desarrollado frenos cerámicos especiales; los de hierro podrían derretirse. Los sistemas controlados por computador amortiguan las vibraciones. El ascensor tiene una aerodinámica para reducir el ruido del viento cuando se mueve hacia arriba y hacia abajo [20]. La Figura P6.15 muestra un sistema de control propuesto para la posición vertical del ascensor. Determínese el intervalo de K para un sistema estable.

P6.16. Considérese el caso de los conejos y los zorros de Australia. El número de conejos es x_1, y si se dejan solos podrían crecer indefinidamente (hasta que se agotase el suministro de comida) de modo que

$$\dot{x}_1 = kx_1.$$

Sin embargo, debido a los zorros que hay en el continente, se tiene

$$\dot{x}_1 = kx_1 - ax_2,$$

donde x_2 es el número de zorros. Actualmente, si los zorros necesitan a los conejos para vivir, se tiene

$$\dot{x}_2 = -hx_2 + bx_1.$$

Determínese si el sistema es estable y de este modo tiende a la condición $x_1(t) = x_2(t) = 0$ en $t = \infty$. ¿Cuáles son los requisitos sobre a, b, h y k para un sistema estable? ¿Cuál es el resultado cuando k es mayor que h?

P6.17. El objetivo del despegue y del aterrizaje vertical (VTOL) de un avión es realizar la operación en aeropuertos relativamente pequeños y poder funcionar como un avión normal en vuelo horizontal [17]. El despegue de un avión de forma similar al de un proyectil (de cabeza) es inherentemente inestable (*véase* el Ejemplo 3.4 para un análisis del péndulo invertido). Un sistema de control con propulsores ajustable pueden controlar el vehículo tal como muestra la Figura P6.17. (a) Determínese el intervalo de ganancia para el cual el sistema es estable. (b) Determínese la ganancia K para la cual el sistema es marginalmente estable y las raíces de la ecuación característica para este valor de K.

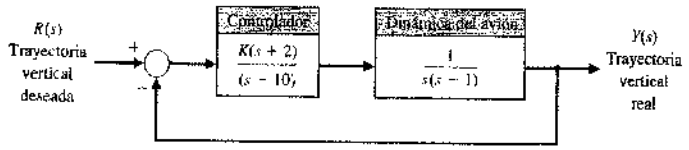
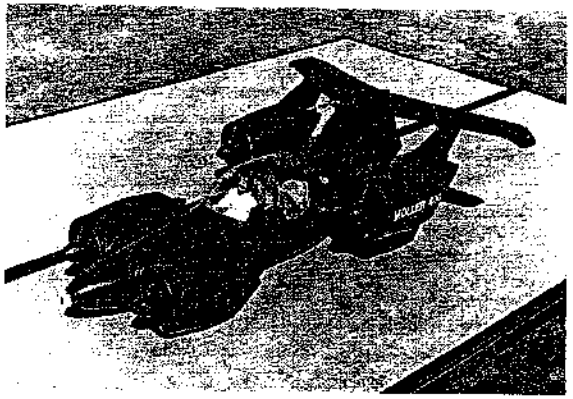
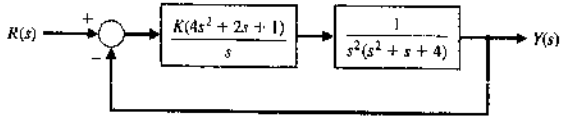


FIGURA P6.17
Control de un avión de reacción.

P6.18. La Figura P6.18(a) muestra un vehículo de despegue vertical. Los cuatro motores giran para despegar. La Figura P6.18(b) muestra el sistema de control para la posición del avión. (a) Para $K = 1$, determínese si el sistema es estable. (b) Determínese, si existe, un intervalo de estabilidad para $K > 0$.



(a)



(b)

FIGURA P6.18
(a) Avión con despegue vertical. (Cortesía de Moller Internacional.)
(b) Sistema de control.

PROBLEMAS AVANZADOS

PA6.1. Un sistema de control teleoperado incorpora a una persona (operador) y a una máquina remota. El sistema de teleoperación normal se basa en un enlace de dirección única a la máquina y realimentación limitada al operador. Sin embargo, un enganche de dos sentidos utilizando intercambio de información bilateral permite un funcionamiento mejor [19]. En el caso del control remoto de un robot, es útil la realimentación de la fuerza y de la posición. La ecuación característica para un sistema teleoperado, como se muestra en la Figura PA6.1, es

$$s^4 + 20s^3 + K_1 s^2 + 4s + K_2 = 0,$$

donde K_1 y K_2 son los factores de ganancia realimentados. Determínese y dibújese la región de estabilidad para este sistema para K_1 y K_2.

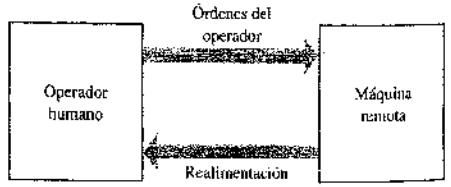


FIGURA PA6.1. Modelo de una máquina teleoperada.

PA6.2. Considérese el caso de un piloto de la armada aterrizando un avión en un portaaviones. El piloto tiene tres tareas básicas. La primera consiste en dirigir la aproximación del avión al barco a lo largo de la línea central de la pista de aterrizaje. La segunda es mantener al avión sobre la trayectoria de descenso correcta. La tercera tarea es mantener la velocidad adecuada. La Figura PA6.2 muestra un modelo del sistema de control de posición lateral. Determínese el intervalo de estabilidad para $K \geq 0$.

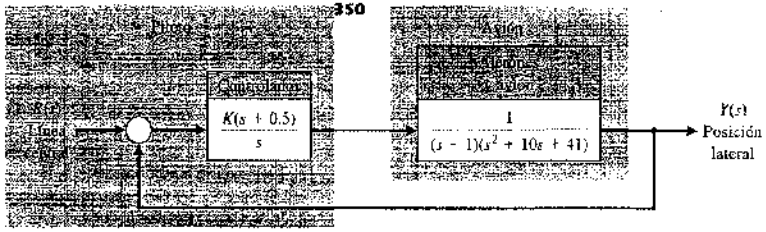


FIGURA PA6.2
Control de posición lateral para el aterrizaje en un portaaviones.

PA6.3. La Figura PA6.3 muestra un sistema de control. Se quiere que el sistema sea estable y que el error en estado estacionario para una entrada de escalón unitario sea menor o igual que 0.05 (5%). (a) Determínese el intervalo de α que satisfaga el error requerido. (b) Determínese el intervalo de α que satisfaga el requisito de estabilidad. (c) Selecciónese un α que reúna los dos requisitos.

PA6.4. Una línea de llenado de botellas utiliza un mecanismo de tornillo de alimentación, tal como se muestra en la Figura PA6.4. La realimentación tacométrica se utiliza para mantener un control de velocidad preciso. Determínese y dibújese el intervalo de K y p que permita un funcionamiento estable.

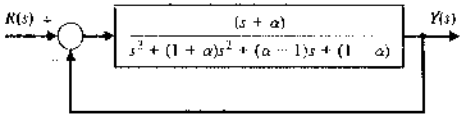
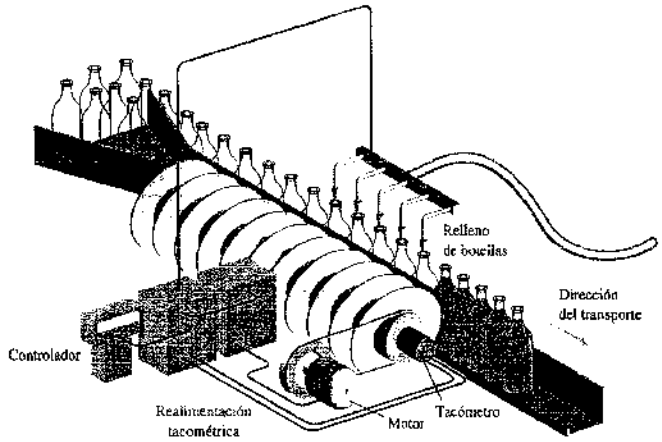
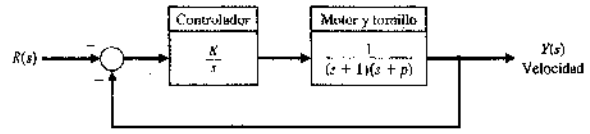


FIGURA PA6.3



(a)



(b)

FIGURA PA6.4
Control de velocidad de una línea de llenado de botellas.

PROBLEMAS DE DISEÑO

PDC6.1. El sistema del motor del cabestrante del problema PDC5.1 utiliza el amplificador como controlador. Determínese el máximo valor de la ganancia K_1 antes de que el sistema llegue a ser inestable.

PD6.1. El control del encendido por chispa del motor de un automóvil requiere un comportamiento constante sobre un intervalo amplio de parámetros [15]. La Figura PD6.1 muestra el sistema de control con una ganancia K del controlador ajustable. El parámetro p es igual a 2 para muchos autos pero puede igualarse a cero para aquellos de alto rendimiento. Selecciónese una ganancia K que dé como resultado un sistema estable para ambos valores de p.

PD6.2. Un vehículo guiado automáticamente en Marte se representa por el sistema de la Figura PD6.2. El sistema tiene unas ruedas dirigibles tanto en la parte delantera como en la parte trasera del vehículo, y el diseño requiere que $H(s) = Ks + 1$. Determínese (a) el valor de K requerido para la estabilidad, (b) el valor de K cuando una raíz de la ecuación característica es igual a $s = -5$, y (c) el valor de las dos raíces restantes para la ganancia seleccionada en el apartado (b). (d) Calcúlese la respuesta del sistema a una orden de escalón para la ganancia del apartado (b).

PD6.3. El sistema con realimentación negativa unitaria

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s(1+\tau s)(s+2s)}$$

tiene dos parámetros que deben seleccionarse. (a) Determínense y dibújense las regiones de estabilidad de este sistema. (b) Selecciónese τ y K tal que el error en estado estacionario para una entrada de rampa sea menor o igual que el 25% de la magnitud de entrada. (c) Determínese el porcentaje de sobreelongación para una entrada de escalón para el diseño seleccionado en el apartado (b).

PD6.4. La Figura PD6.4 muestra el sistema de control de posición del cohete de una lanzadera espacial [18]. (a) Determínese el intervalo de la ganancia K y del parámetro m para que el sistema sea estable, y dibújese la región de estabilidad. (b) Selecciónense los valores de la ganancia y del parámetro para que el error en estado estacionario a una entrada de rampa sea menor o igual que el 10% de la magnitud de entrada. (c) Determínese el porcentaje de sobreelongación para una entrada de escalón con el diseño seleccionado en el apartado (b).

PD6.5. La Figura PD6.5 muestra un sistema de control de tráfico para controlar la distancia entre vehículos [15]. (a) Determínese el intervalo de ganancia K para el cual el sistema es estable. (b) Si K_m es el valor máximo de K tal que las raíces características están sobre el eje $j\omega$, entonces $K = K_m/N$, donde $6 < N < 7$. Se desea que el tiempo de pico sea menor que 2 segundos y que el porcentaje de sobreelongación sea menor que el 18%. Determínese un valor aproximado para N.

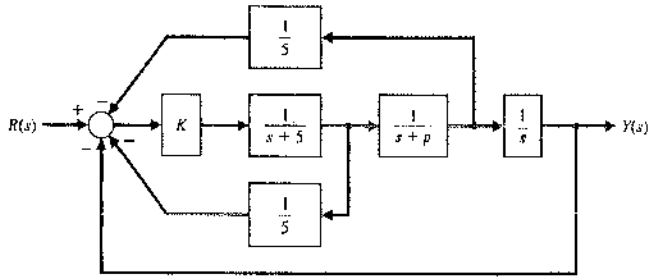


FIGURA PD6.1
Control del motor de un automóvil.

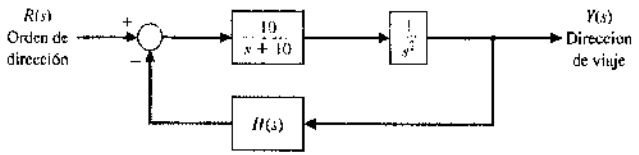


FIGURA PD6.2
Control de un vehículo guiado en Marte.

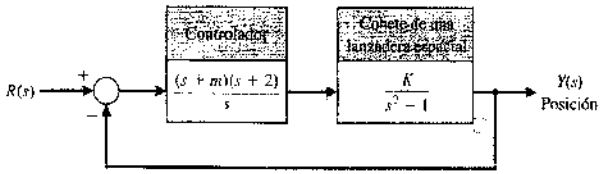


FIGURA PD6.4
Control de posición de una lanzadera.

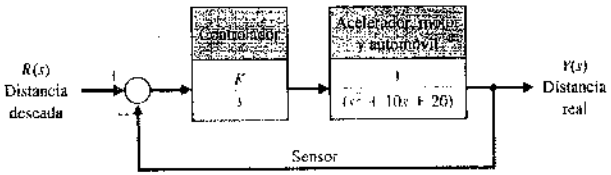
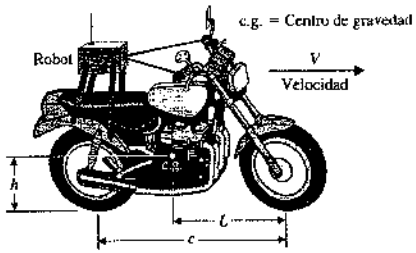


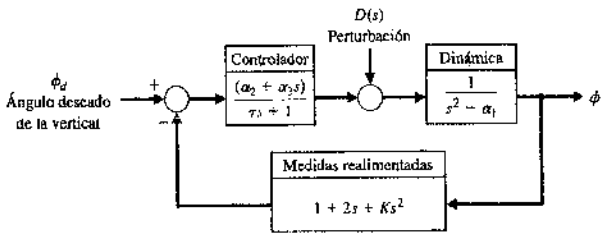
FIGURA PD6.5
Control de distancia de tráfico.

PD6.6. Considérese la posibilidad de un robot dirigiendo una motocicleta, tal como muestra la Figura PD6.6(a) [22]. La Figura PD6.6(b) muestra el diagrama de bloques del modelo del sistema. Determínese el intervalo de K para un funcionamiento estable de la moto cuando $\alpha_1 = g/h = 9$, $\alpha_2 = V^2/hc = 2.7$ y $\alpha_3 = VL/hc = 1.35$. Supóngase que la motocicleta se mueve con una velocidad constante $V = 2$ m/s. La constante de tiempo del controlador es $\tau = 0.2$ y $K > 0$.

PD6.7. Considérese el sistema de control realimentado de la Figura PD6.7. El sistema tiene un lazo interno y otro externo. El lazo interno debe ser estable y tener una velocidad rápida de respuesta. (a) Considérese en primer lugar el lazo interno. Determínese el intervalo de K_1 resultante en un lazo interior estable. Es decir, la función de transferencia $Y(s)/U(s)$ debe ser estable. (b) Selecciónese el valor de K_1 en el intervalo estable que proporcione la respuesta más rápida a un escalón. (c) Para el valor de K_1 seleccionado en el apartado (b), determínese el intervalo de K_2 para que el sistema en lazo cerrado, $T(s) = Y(s)/R(s)$, sea estable.



(a)



(b)

FIGURA PD6.6
(a) Motocicleta controlada por un robot. (b) Diagrama de bloques del sistema.

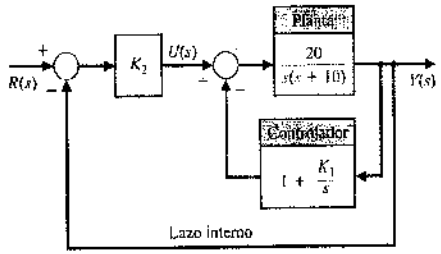


FIGURA PD6.7
Sistema realimentado con lazo interno y lazo externo.

PROBLEMAS CON MATLAB

PM6.1. Determínense las raíces de las siguientes ecuaciones características:

(a) $q(s) = s^3 + 3s^2 + 5s + 7 = 0$.

(b) $q(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 4s + 10 = 0$.

(c) $q(s) = s^4 + 2s^2 + 1 = 0$.

PM6.2. Considérese un sistema con realimentación negativa unitaria con

$$G(s) = \frac{K(s^2 + s + 2)}{s^2 + 2s + 1}.$$

Utilizando MATLAB, calcúlense las raíces del polinomio característico de la función de transferencia en lazo cerrado para $K = 1$, 2 y 5. ¿Para qué valores de K el sistema de lazo cerrado es estable?

PM6.3. Un sistema con realimentación negativa unitaria tiene la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^3 + 4s^2 + 6s + 10}.$$

Utilizando MATLAB, determínese la función de transferencia en lazo cerrado y demuéstrese que las raíces de la ecuación característica son $s_1 = -2.89$ y $s_{2,3} = -0.55 \pm j1.87$.

PM6.4. Considérese la función de transferencia

$$T(s) = \frac{1}{s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + s + 2}.$$

(a) Utilizando el método de Routh-Hurwitz, determínese si el sistema es estable. Si no es estable, ¿cuántos polos hay en el semiplano derecho? (b) Utilizando MATLAB, calcúlense los polos de $T(s)$ y verifíquese el resultado del apartado (a). (c) Dibújese la respuesta a un escalón unitario y analícense los resultados.

PM6.5. Un modelo del «comportamiento de un piloto» se utiliza a veces en el análisis y diseño de controles de aviones para representar al piloto en el lazo. La Figura PM6.5 muestra un diagrama de bloques del avión con un piloto «en el lazo». La variable τ representa el tiempo de retardo del piloto. Se puede representar un piloto lento con $\tau = 0.5$ y un piloto rápido con $\tau = 0.25$. Las variables restantes en el modelo del piloto se supone que son $K = 1$, $\tau_1 = 2$ y $\tau_2 = 0.5$. Utilizando MATLAB, calcúlense los polos del sistema en lazo cerrado para los pilotos rápidos y lentos. ¿Cuál es el máximo tiempo de retardo permisible para la estabilidad?

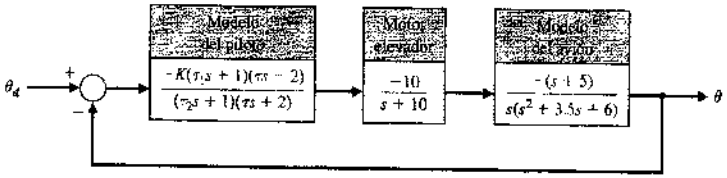


FIGURA PM6.5
Un avión con un piloto en el lazo.

PM6.6. Considérese el sistema de control realimentado de la Figura PM6.6. Utilizando la función for, desarróllese un programa en MATLAB para calcular los polos de la función de transferencia en lazo cerrado para $0 \leq K \leq 5$ y dibújense los resultados marcando los polos con el símbolo « × ». Determínese el intervalo máximo de K para la estabilidad con el método de Routh-Hurwitz. Calcúlense las raíces de la ecuación característica cuando K es el valor mínimo permitido para la estabilidad.

PM6.7. Considérese el sistema en variables de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -15 & -10 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}u,$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0]\mathbf{x}.$$

(a) Calcúlese la ecuación característica utilizando la función poly. (b) Calcúlense las raíces de la ecuación característica y determínese si el sistema es estable. (c) Obténgase la respuesta dibujada de $y(t)$ cuando $u(t)$ es una entrada de escalón unitario y cuando el sistema tiene condiciones iniciales nulas.

PM6.8. Considérese el sistema de control realimentado de la Figura PM6.8. (a) Utilizando el método de Routh-Hurwitz, determínese el intervalo de K_1 que da como resultado la estabilidad en lazo cerrado. (b) Utilizando MATLAB, dibújese la localización de los polos como una función de $0 < K_1 < 30$ y coméntense los resultados.

PM6.9. Considérese el sistema representado en variables de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u,$$

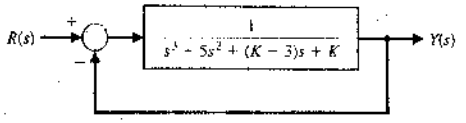


FIGURA PM6.6
Sistema de control realimentado de lazo cerrado con parámetro K.

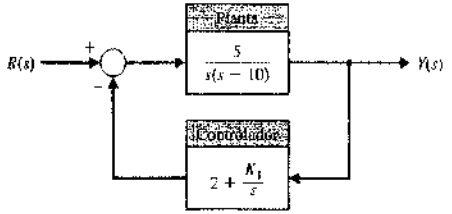


FIGURA PM6.8
Sistema con realimentación no unitaria con parámetro K_1.

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -k & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 2 \quad 0], \quad \mathbf{D} = [0].$$

(a) ¿Para qué valores de k el sistema es estable? (b) Utilizando MATLAB, dibújese la localización de los polos como una función de $0 < k < 10$ y coméntense los resultados.

TÉRMINOS Y CONCEPTOS

Criterio de Routh-Hurwitz. Criterio para determinar la estabilidad de un sistema examinando la ecuación característica de la función de transferencia. El criterio formula que el número de raíces de la ecuación característica con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de los coeficientes en la primera columna del array de Routh.

Estabilidad. Medida del comportamiento del sistema. Un sistema es estable si todos los polos de la función de transferencia tienen partes reales negativas.

Estabilidad absoluta. Descripción del sistema que revela si un sistema es estable o no sin consideración de otros atributos como el grado de estabilidad.

Estabilidad relativa. Propiedad que se mide con la parte real relativa de cada raíz o par de raíces de la ecuación característica.

Marginalmente estable. Sistema es marginalmente estable si y sólo si la respuesta a la entrada cero queda limitada cuando $t \to \infty$.

Polinomio auxiliar. Ecuación que precede inmediatamente a la entrada cero en el array de Routh.

Sistema estable. Sistema dinámico con una respuesta del sistema acotada para una entrada acotada.

Método del lugar de las raíces

7

7.1. Introducción 355
7.2. Concepto del lugar de las raíces 355
7.3. Procedimiento del lugar de las raíces 359
7.4. Ejemplo de análisis y diseño de un sistema de control utilizando el método del lugar de las raíces 374
7.5. Diseño de parámetros por el método del lugar de las raíces 378
7.6. Sensibilidad y el lugar de las raíces 383
7.7. Controladores de tres términos (PID) 391
7.8. Ejemplo de diseño: Sistema de control de un manipulador láser 393
7.9. El diseño de un sistema de control de un robot 396
7.10. El lugar de las raíces utilizando MATLAB 398
7.11. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 404
7.12. Resumen 405

SINOPSIS

En los capítulos anteriores, se analizó cómo se puede describir el comportamiento de un sistema realimentado en términos de la localización de las raíces de la ecuación característica en el plano s. Se sabe que la respuesta de un sistema realimentado en lazo cerrado puede ajustarse para conseguir el comportamiento deseado mediante una selección acertada de uno o más parámetros del sistema. Resulta muy útil determinar cómo se mueven las raíces de la ecuación característica en el plano s cuando se modifica un parámetro.

El lugar de las raíces en el plano s se puede determinar mediante un método gráfico. A una gráfica del lugar de las raíces cuando varía un parámetro del sistema se le denomina gráfica del lugar de las raíces. El **lugar de las raíces** es una herramienta potente para el diseño y el análisis de sistemas de control realimentados y es el tema principal de este capítulo. Se analizarán técnicas prácticas para obtener un dibujo del lugar de las raíces a mano. También se consideran los dibujos de los lugares de las raíces generados mediante computador y se ilustra su efectividad en el proceso de diseño. Se introduce el popular controlador PID como una práctica estructura de controlador.

Se mostrará que es posible utilizar los métodos del lugar de las raíces para realizar diseños cuando varían dos o tres parámetros. Esto proporciona la oportunidad de diseñar sistemas realimentados con dos o tres parámetros ajustables. Por ejemplo, el controlador PID tiene tres parámetros ajustables. Además definirá una medida de sensibilidad de una raíz determinada cuando se producen cambios incrementales pequeños en un parámetro del sistema. El capítulo finaliza con un diseño de un controlador basado en los métodos de lugar de las raíces para el Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco.

7.1. INTRODUCCIÓN

La estabilidad relativa y el comportamiento transitorio de un sistema de control de lazo cerrado están directamente relacionados con la localización en el plano s de las raíces del lazo cerrado de la ecuación característica. Así mismo, con frecuencia, es necesario ajustar uno o más parámetros del sistema para obtener las localizaciones adecuadas de las raíces. Por tanto, vale la pena determinar cómo se desplazan en el plano s las raíces de la ecuación característica de un sistema dado, a medida que varían los parámetros; es decir, es útil determinar el **lugar** de las raíces en el plano s a medida que se varía un parámetro. El **método del lugar de las raíces** fue planteado por Evans en 1948 y se ha desarrollado y utilizado mucho en ingeniería de control [1-3]. La técnica del lugar de las raíces es un método gráfico para dibujar la posición de las raíces en el plano s a medida que varía un parámetro. De hecho, este método proporciona al ingeniero una medida de la sensibilidad de las raíces del sistema para una variación en el parámetro considerado. Esta técnica puede usarse con gran ventaja con el criterio de Routh-Hurwitz.

Como el método que nos ocupa proporciona información gráfica, puede usarse un dibujo aproximado para obtener información cualitativa relacionada con la estabilidad y el comportamiento del sistema. Además, el lugar de las raíces de la ecuación característica de un sistema con lazos múltiples puede investigarse tan fácilmente como para un solo lazo. Si las localizaciones de las raíces no son satisfactorias, los ajustes necesarios del parámetro frecuentemente pueden determinarse sin dificultad a partir del lugar de las raíces [4].

7.2. CONCEPTO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

El comportamiento dinámico de un sistema de control de lazo cerrado se describe mediante la función transferencia de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{p(s)}{q(s)}, \tag{7.1}$$

donde $p(s)$ y $q(s)$ son polinomios en s. Las raíces de la ecuación característica $q(s)$ determinan los modos de respuesta del sistema. Para un sistema de lazo simple como el de la Figura 7.1, se tiene la ecuación característica

$$\boxed{1 + KG(s) = 0,} \tag{7.2}$$

donde K es un parámetro variable. Las raíces características del sistema deben satisfacer la Ecuación (7.2), donde las raíces están en el plano s. Como s es una variable compleja, la Ecuación (7.2) puede escribirse ahora en forma polar como

$$|KG(s)|\underline{/KG(s)} = -1 + j0, \tag{7.3}$$

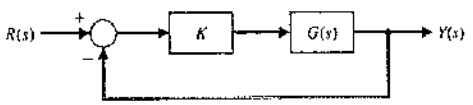


FIGURA 7.1
Sistema de control en lazo cerrado con un parámetro variable K.

y, por tanto, es necesario que

$$|KG(s)| = 1$$

y

$$\underline{/KG(s)} = 180^\circ \pm k360^\circ, \tag{7.4}$$

donde $k = 0, \pm 1, +2, \pm 3, \ldots$

El lugar de las raíces es el camino de las raíces de la ecuación característica al variar un parámetro en el plano s cuando se varía un parámetro del sistema.

En la Figura 7.2 se muestra el sistema simple de segundo orden considerado en capítulos anteriores. La ecuación característica que representa este sistema es

$$\Delta(s) = 1 + KG(s) = 1 + \frac{K}{s(s+2)} = 0$$

o bien

$$\Delta(s) = s^2 + 2s + K = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0. \tag{7.5}$$

El lugar de las raíces, a medida que se varía la ganancia K, se halla haciendo que

$$|G(s)| = \left|\frac{K}{s(s+2)}\right| = 1 \tag{7.6}$$

y

$$\underline{/G(s)} = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ, \ldots \tag{7.7}$$

La ganancia K puede variarse desde cero hasta un valor positivo infinitamente grande. Para un sistema de segundo orden, las raíces son

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \tag{7.8}$$

y para $\zeta < 1$ se sabe que $\theta = \cos^{-1}\zeta$. Gráficamente, para dos polos de lazo abierto como se muestra en la Figura 7.3, el lugar de las raíces es una recta vertical para $\zeta \leq 1$

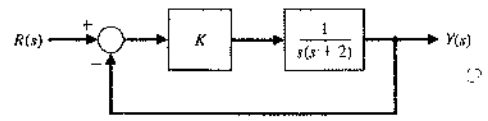


FIGURA 7.2
Sistema de control con realimentación unitaria. La ganancia K es un parámetro variable.

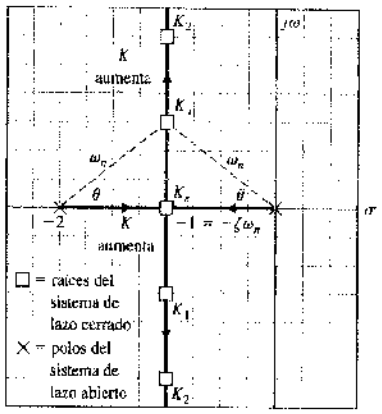


FIGURA 7.3. Lugar de las raíces para un sistema de segundo orden cuando $K_c < K_1 < K_2$. El lugar de las raíces se muestra en gris. Obsérvese que las raíces de la ecuación característica se representan por «□» sobre el lugar de las raíces.

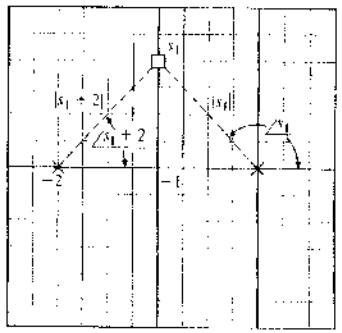


FIGURA 7.4. Evaluación del ángulo y la ganancia en s_1 para ganancia $K = K_1$.

con el objeto de satisfacer el requisito del ángulo, Ecuación (7.7). Por ejemplo, como se muestra en la Figura 7.4, los ángulos en una raíz s_1 son

$$\left/\frac{K}{s(s+2)}\right|_{s=s_1} = -\underline{/s_1} - \underline{/(s_1+2)} = -[(180^\circ - \theta) + \theta] = -180^\circ. \tag{7.9}$$

Este requisito del ángulo se satisface en cualquier punto de la recta vertical que sea una bisectriz perpendicular a la recta 0 a -2. Además, la ganancia K en puntos particulares se obtiene mediante la Ecuación (7.6), como

$$\left|\frac{K}{s(s+2)}\right|_{s=s_1} = \frac{K}{|s_1||s_1+2|} = 1, \tag{7.10}$$

y, por esto,

$$K = |s_1||s_1 + 2|, \tag{7.11}$$

donde $|s_1|$ es la magnitud del vector que va desde el origen hasta s_1, y $|s_1 + 2|$ es la magnitud del vector que va desde -2 hasta s_1.

Para un sistema de lazo cerrado con múltiples lazos, en la Sección 2.7 se obtuvo que utilizando la fórmula de la ganancia del flujo de señal de Mason, se tenía

$$\Delta(s) = 1 - \sum_{n=1}^{N} L_n + \sum_{m,q}^{M,N} L_m L_q - \sum L_r L_s L_t + \cdots, \tag{7.12}$$

donde L_q es igual al valor de la transmitancia del lazo cerrado q-ésimo. Por tanto, se tiene una ecuación característica, que puede escribirse como

$$q(s) = \Delta(s) = 1 + F(s). \tag{7.13}$$

Para encontrar las raíces de la ecuación característica, se iguala la Ecuación (7.13) a cero y se obtiene

$$1 + F(s) = 0. \tag{7.14}$$

La Ecuación (7.14) puede escribirse como

$$F(s) = -1 + j0, \tag{7.15}$$

y las raíces de la ecuación característica deben satisfacer esta relación.

En general, la función $F(s)$ puede escribirse como

$$F(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)(s + z_3)\cdots(s + z_M)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)\cdots(s + p_n)}.$$

Entonces los requisitos de la magnitud y el ángulo para el lugar de las raíces son

$$|F(s)| = \frac{K|s + z_1||s + z_2|\cdots}{|s + p_1||s + p_2|\cdots} = 1 \tag{7.16}$$

y

$$\underline{/F(s)} = \underline{/s + z_1} + \underline{/s + z_2} + \cdots - (\underline{/s + p_1} + \underline{/s + p_2} + \cdots) = 180^\circ \pm q360^\circ, \tag{7.17}$$

donde q es un entero. El requisito de la magnitud, Ecuación (7.16), permite determinar el valor de K para una localización dada s_1 de una raíz. Un punto de prueba en el plano s, s_1, se verifica como localización de una raíz cuando se satisface la Ecuación (7.17). Todos los ángulos se miden en la dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj a partir de una línea horizontal.

Para ilustrar aún más el procedimiento del lugar de las raíces, se considera de nuevo el sistema de segundo orden de la Figura 7.5(a). El efecto de la variación del parámetro, a, puede representarse efectivamente escribiendo de nuevo la ecuación característica para el lugar de las raíces con a como factor multiplicador del numerador. Entonces la ecuación característica es

$$1 + KG(s) = 1 + \frac{K}{s(s + a)} = 0$$

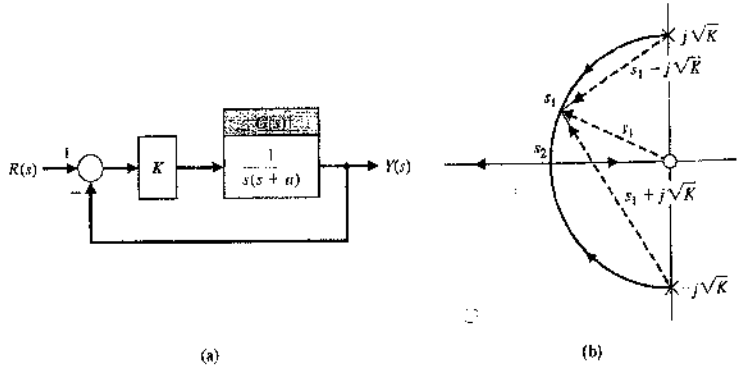


FIGURA 7.5
(a) Sistema de lazo simple. (b) Lugar de las raíces como una función del parámetro a, donde $a > 0$.

o bien

$$s^2 + as + K = 0.$$

Dividiendo por el factor $(s^2 + K)$, se obtiene

$$1 + \frac{as}{s^2 + K} = 0. \tag{7.18}$$

Entonces el criterio de magnitud se satisface cuando

$$\frac{a|s_1|}{|s_1^2 + K|} = 1 \tag{7.19}$$

en la raíz s_1. El criterio del ángulo es

$$\underline{/s_1} - (\underline{/s_1 + j\sqrt{K}} + \underline{/s_1 - j\sqrt{K}}) = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ, \ldots$$

En principio, se podría construir el lugar de las raíces determinando los puntos en el plano s que satisfacen el criterio del ángulo. En la sección siguiente se desarrollará un procedimiento en varios pasos para dibujar el lugar de las raíces. La Figura 7.5(b) muestra el lugar de las raíces para la ecuación característica de la Ecuación (7.18). Específicamente, en la raíz s_1 la magnitud del parámetro a se encuentra por la Ecuación (7.19) como

$$a = \frac{|s_1 - j\sqrt{K}||s_1 + j\sqrt{K}}{|s_1|}. \tag{7.20}$$

Las raíces del sistema se unen en el eje real en el punto s_2 y proporcionan, para una entrada de escalón, una respuesta amortiguada críticamente. El parámetro, a, tiene una magnitud en las raíces amortiguadas críticamente, $s_2 = \sigma_2$, igual a

$$a = \frac{|\sigma_2 - j\sqrt{K}||\sigma_2 + j\sqrt{K}|}{\sigma_2} = \frac{1}{\sigma_2}(\sigma_2^2 + K), \tag{7.21}$$

donde σ_2 se calcula a partir de las longitudes del vector del plano s como $\sigma_2 = \sqrt{K}$. A medida que a aumenta más allá del valor crítico, las raíces son reales y diferentes; una raíz es mayor que σ_2 y la otra es menor.

En general, es deseable un proceso ordenado para localizar el lugar de las raíces a medida que varía un parámetro. En la sección siguiente se desarrollará ese método ordenado para obtener un diagrama del lugar de las raíces.

7.3. MÉTODO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

La ecuación característica de un sistema proporciona un conocimiento valioso en relación con la respuesta del sistema cuando se determinan las raíces de la ecuación. Para localizar las raíces de la ecuación característica de forma gráfica sobre el plano s, se desarrollará un procedimiento ordenado que facilita el dibujo rápido del lugar de las raíces.

Paso 1: Preparar el dibujo del lugar de las raíces. Se empieza escribiendo la ecuación característica como

$$1 + F(s) = 0. \tag{7.22}$$

y se reordena la ecuación, si es necesario, de forma que aparezca el parámetro de interés, K, como factor multiplicativo en la forma

$$1 + KP(s) = 0. \tag{7.23}$$

Normalmente, interesa determinar el lugar de las raíces cuando K varía como

$$0 \leqslant K \leqslant \infty.$$

Se factoriza $P(s)$, y se escribe el polinomio en forma de polos y ceros como sigue:

$$1 + K\frac{\prod_{i=1}^{M}(s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s + p_j)} = 0. \tag{7.24}$$

Entonces se localizan los polos, p_j, y ceros, z_i, en el plano s con símbolos apropiados. Por convenio, se utiliza «x» para denominar a los polos y «o» para los ceros.

Escribiendo de nuevo la Ecuación (7.24), se tiene

$$\prod_{j=1}^{n}(s + p_j) + K\prod_{i=1}^{M}(s + z_i) = 0. \tag{7.25}$$

Obsérvese que la Ecuación (7.25) es otra forma de escribir la ecuación característica. Cuando $K = 0$, las raíces de la ecuación característica son simplemente los polos de $P(s)$. Para ver esto, considérese la Ecuación (7.25) con $K = 0$. En este caso, se tiene

$$\prod_{j=1}^{n}(s + p_j) = 0.$$

Cuando se resuelve, esto devuelve los valores de s que coinciden con los polos de $P(s)$. A la inversa, cuando $K \to \infty$, las raíces de la ecuación característica son los ceros de $P(s)$. Para ver esto, primero se divide la Ecuación (7.25) entre K. En este caso, se tiene

$$\frac{1}{K}\prod_{j=1}^{n}(s + p_j) + \prod_{j=1}^{M}(s + z_j) = 0,$$

lo cual, como $K \to \infty$, se reduce a

$$\prod_{j=1}^{M}(s + z_j) = 0.$$

Cuando se resuelve, esto devuelve los valores de s que coinciden con los ceros de $P(s)$. Por tanto, se observa que **el lugar de las raíces de la ecuación característica $1 + KP(s) = 0$ comienza en los polos de $P(s)$ y termina en los ceros de $P(s)$, a medida que K aumenta desde cero hasta infinito.** Para la mayoría de las funciones, $P(s)$, que se tendrán en cuenta, varios de los ceros de $P(s)$ están en el infinito en el plano s. Esto es debido a que la mayoría de las funciones tienen más polos que ceros. Con n polos y M ceros y $n > M$, se tienen $n - M$ ramificaciones del lugar de las raíces aproximándose a los $n - M$ ceros en el infinito.

Paso 2: Localizar los segmentos del eje real que están en el lugar de las raíces. **El lugar de las raíces en el eje real siempre está en una sección del eje real a la izquierda de un número impar de polos y ceros.** Este hecho se comprueba claramente examinando el criterio del ángulo de la Ecuación (7.17). Estos pasos útiles para la representación gráfica del lugar de las raíces se ilustrarán mediante un ejemplo adecuado.

EJEMPLO 7.1. Sistema de segundo orden

Un sistema de control con realimentación de lazo simple tiene la siguiente ecuación característica:

$$1 + GH(s) = 1 + \frac{K(\frac{1}{2}s + 1)}{\frac{1}{4}s^2 + s} = 0, \tag{7.26}$$

Paso 1: La ecuación característica se puede escribir como

$$1 + K\frac{2(s + 1)}{s^2 + 4s} = 0,$$

donde

$$P(s) = \frac{2(s + 1)}{s^2 + 4s}.$$

La función de transferencia, $P(s)$, se escribe en términos de polos y ceros como

$$1 + K\frac{2(s + 2)}{s(s + 4)} = 0, \tag{7.27}$$

y el parámetro multiplicativo de ganancia es K. Para determinar el lugar de las raíces para la ganancia $0 \leqslant K \leqslant \infty$, se localizan los polos y ceros en el eje real como se muestra en la Figura 7.6(a).

Paso 2: El criterio del ángulo se satisface en el eje real entre los puntos 0 y -2, ya que el ángulo desde el polo p_1 al origen es de 180° y el ángulo desde el cero y el polo p_2 en $s = -4$ es de cero grados. Como el lugar de las raíces empieza en los polos y termina en los ceros, el lugar de las raíces aparece como se muestra en la Figura 7.6(b), donde se indica con una flecha la dirección del lugar de las raíces a medida que K aumenta ($K\uparrow$). Se observa que, como el sistema tiene dos polos reales y un cero real, el segundo segmento del lugar de las raíces termina en un cero en el infinito negativo. Para calcular la ganancia K en una localización específica de una raíz en el lugar de las raíces, se utiliza el criterio de la magnitud, Ecuación (7.16). Por ejemplo, la ganancia K en la raíz $s = s_1 = -1$ se calcula de (7.16) como

$$\frac{(2K)|s_1 + 2|}{|s_1||s_1 + 4|} = 1$$

o

$$K = \frac{|-1||-1 + 4|}{2|-1 + 2|} = \frac{3}{2}. \tag{7.28}$$

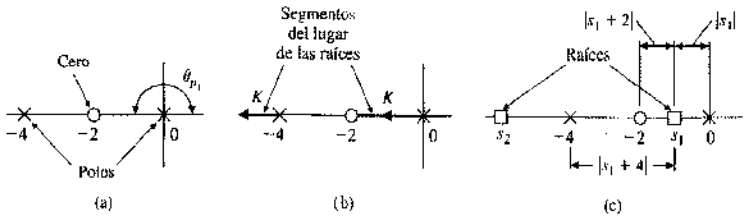


FIGURA 7.6
(a) El cero y los polos de un sistema de segundo orden, (b) los segmentos del lugar de las raíces, y (c) la magnitud de cada vector en s_1.

Esta magnitud también puede calcularse gráficamente como se muestra en la Figura 7.6(c). Para la ganancia de $K = \frac{3}{2}$, existe otra raíz localizada en el lugar de las raíces a la izquierda del polo en -4. Gráficamente se encuentra que la localización de la segunda raíz en $s = -6$, como se muestra en la Figura 7.6(c).

Ahora, se determina el número de lugares de las raíces separados, *SL*. Como los lugares de las raíces empiezan en los polos y terminan en los ceros, el **número de lugares de las raíces separados es igual al número de polos** si este número es mayor que el de ceros. Por tanto, como se observa en la Figura 7.6, el número de lugares de las raíces separados es igual a dos porque hay dos polos y un cero.

Recuérdese que **los lugares de las raíces deben ser simétricos con respecto al eje real horizontal**, debido a que las raíces complejas deben aparecer como pares de raíces conjugadas complejas. ■

Ahora, se sigue con el desarrollo de la lista general de pasos para el dibujo del lugar de las raíces.

Paso 3: El lugar de las raíces se dirige hacia los ceros en el infinito a lo largo de asíntotas centradas en σ_A y con ángulos ϕ_A. Cuando el número de ceros finitos de $P(s)$, M, es menor que el número de polos, n, por el número $N = n - M$, entonces N secciones de lugares de las raíces deben terminar en ceros en el infinito. Estas secciones se dirigen hacia los ceros en el infinito a lo largo de **asíntotas** a medida que K tiende a infinito. Estas **asíntotas lineales se centran** en un punto del eje real dado por

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{polos de } P(s) - \sum \text{ceros de } P(s)}{n - M} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (-p_j) - \sum_{i=1}^{M} (-z_i)}{n - M}. \tag{7.29}$$

El **ángulo de las asíntotas** con respecto al eje real es

$$\phi_A = \frac{(2q - 1)}{n - M} 180^\circ, \qquad q = 0, 1, 2, \ldots, (n - M - 1), \tag{7.30}$$

donde q es un índice entero [3]. La utilidad de esta regla es obvia para trazar la forma aproximada de un lugar de las raíces. La Ecuación (7.30) puede deducirse fácilmente considerando un punto en un segmento del lugar de las raíces a una distancia remota respecto de los polos y ceros finitos en el plano s. El ángulo de fase total en este punto remoto es de 180°, puesto que es un punto en un segmento del lugar de las raíces. Como los polos y ceros finitos de $P(s)$ están a una gran distancia respecto del punto remoto, el ángulo desde cada polo y cada cero, ϕ, es esencialmente igual y, por tanto, el ángulo total es simplemente $\phi(n - M)$, donde n y M son los números de polos y ceros finitos, respectivamente. Por esto, se tiene

$$\phi(n - M) = 180^\circ,$$

o bien

$$\phi = \frac{180^\circ}{n - M}$$

Teniendo en cuenta todos los posibles segmentos del lugar de las raíces en las localizaciones remotas del plano s, se obtiene la Ecuación (7.30).

El centro de las asíntotas lineales, frecuentemente conocido como **centroide de las asíntotas**, se determina considerando la ecuación característica, Ecuación 7.24. Para valores grandes de s, sólo es necesario considerar los términos de orden mayor, por lo cual la ecuación característica se reduce a

$$1 + \frac{Ks^M}{s^n} = 0.$$

Sin embargo, esta relación, que es una aproximación, indica que el centroide de las $(n - M)$ asíntotas está en el origen, $s = 0$. Se obtiene una mejor aproximación si se considera una ecuación característica de la forma

$$1 + \frac{K}{(s - \sigma_A)^{n - M}} = 0$$

con un centroide en σ_A.

El centroide se determina considerando los dos primeros términos de la Ecuación (7.24), los cuales pueden encontrarse mediante la relación

$$1 + \frac{K \prod_{i=1}^{M} (s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s + p_j)} = 1 + K \frac{(s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_0)}{(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0)}.$$

Del Capítulo 6, especialmente la Ecuación (6.5), se observa que

$$b_{M-1} = \sum_{i=1}^{M} z_i \quad \text{y} \quad a_{n-1} = \sum_{j=1}^{n} p_j.$$

Considerando solamente los dos primeros términos de este desarrollo, se tiene

$$1 + \frac{K}{s^{n-M} + (a_{n-1} - b_{M-1})s^{n-M-1}} = 0.$$

Los dos primeros términos de

$$1 + \frac{K}{(s - \sigma_A)^{n-M}} = 0$$

son

$$1 + \frac{K}{s^{n-M} - (n - M)\sigma_A s^{n-M-1}} = 0.$$

Igualando en la ecuación los términos para s^{n-M-1}, se obtiene

$$(a_{n-1} - b_{M-1}) = -(n - M)\sigma_A$$

o

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} (-p_i) - \sum_{i=1}^{M} (-z_i)}{n - M},$$

lo cual es equivalente a la Ecuación (7.29).

Por ejemplo, examínese de nuevo el sistema mostrado de la Figura 7.2 analizado en la Sección 7.2. La ecuación característica se escribe como

$$1 + \frac{K}{s(s+2)} = 0.$$

Como $n - M = 2$, se espera que dos lugares de las raíces terminen en ceros en el infinito. Las asíntotas de los lugares de las raíces se localizan en un centro

$$\sigma_A = \frac{-2}{2} = -1$$

y en ángulos de

$$\phi_A = 90^\circ, \quad q = 0 \quad \text{y} \quad \phi_A = 270^\circ, \quad q = 1.$$

Por tanto, el lugar de las raíces se traza fácilmente, como se muestra en la Figura 7.3. Un ejemplo ilustrará mejor el proceso de la utilización de las asíntotas.

EJEMPLO 7.2. Sistema de segundo orden

Un sistema de control con realimentación tiene como ecuación característica

$$1 + GH(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2}. \tag{7.31}$$

Se desea trazar el lugar de las raíces para determinar el efecto de la ganancia K. Los polos y ceros se localizan en el plano s como se muestra en la Figura 7.7(a). Las secciones del lugar de las raíces en el eje real deben localizarse a la izquierda de un número impar de polos y ceros; por tanto se localizan con líneas gruesas como se muestra en la Figura 7.7(a). La intersección de las asíntotas es

$$\sigma_A = \frac{(-2) + 2(-4) - (-1)}{4 - 1} = \frac{-9}{3} = -3. \tag{7.32}$$

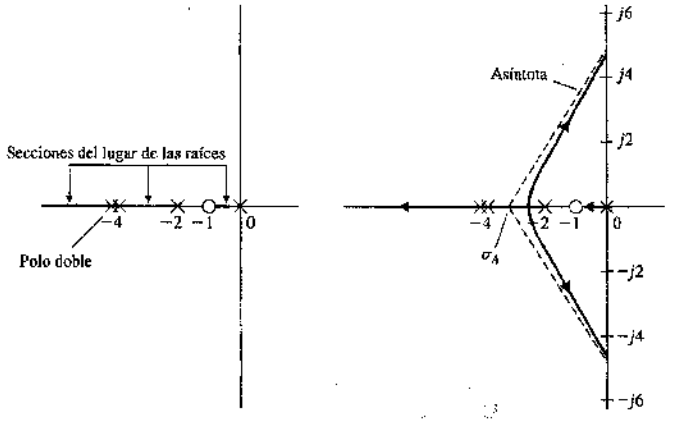


FIGURA 7.7
Un sistema de cuarto orden con (a) un cero y (b) lugar de las raíces.

Los ángulos de las asíntotas son

$$\phi_A = +60^\circ, \quad q = 0,$$
$$\phi_A = 180^\circ, \quad q = 1, \text{ y}$$
$$\phi_A = 300^\circ, \quad q = 2,$$

donde hay tres asíntotas ya que $n - M = 3$. Así mismo, se observa que las secciones del lugar de las raíces deben empezar en los polos y, por tanto, dos de éstas deben dejar el doble polo en $s = -4$. Entonces, con las asíntotas trazadas en la Figura 7.7(b), se puede dibujar la forma del lugar de las raíces que se muestra en dicha figura. Si es necesario, se puede calcular gráficamente la forma real del lugar de las raíces en el área próxima a σ_A. ■

Ahora se continúa con el desarrollo de más pasos del proceso para determinar el lugar de las raíces.

Paso 4: Determinar el punto en el cual el lugar de las raíces cruza el eje imaginario (si lo hay), utilizando el método de Routh-Hurwitz. **El punto real en que el lugar de las raíces cruza el eje imaginario se calcula fácilmente utilizando el criterio de Routh-Hurwitz.**

Paso 5: Determinar el punto de salida sobre el eje real (si lo hay). El lugar de las raíces del Ejemplo 7.2 deja el eje real en un **punto de salida.** La salida del lugar de las raíces del eje real ocurre donde es cero el cambio total del ángulo causado por un pequeño desplazamiento vertical. El lugar de las raíces deja el eje real donde hay varias raíces (habitualmente dos raíces). En la Figura 7.8(a) se muestra el punto de salida para un sistema simple de segundo orden y, para el caso especial de un sistema de cuarto orden, en la Figura 7.8(b). En general, debido al criterio de fase, **las tangentes de los lugares de las raíces en el punto de salida están igualmente espaciadas sobre 360 grados. Por tanto, en la Figura 7.8(a) se observa que los dos lugares de las raíces en el punto de salida están separados 180°, mientras que en la Figura 7.8(b) los cuatro lugares de las raíces están a 90°.**

El punto de salida en el eje real puede calcularse gráfica o analíticamente. El método más directo para calcular dicho punto requiere reordenar la ecuación característica con el objeto de despejar el factor multiplicativo K. Entonces la ecuación característica se escribe como

$$p(s) = K. \tag{7.33}$$

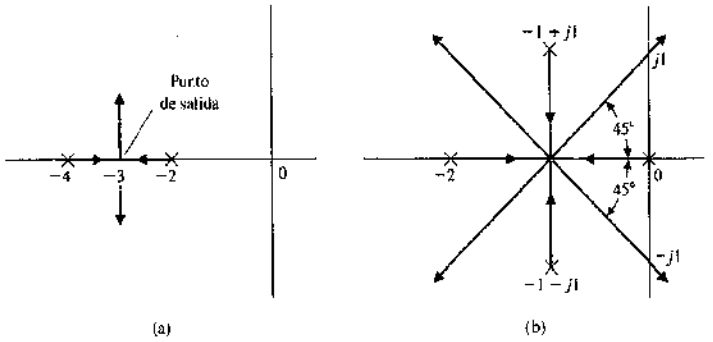


FIGURA 7.8
Ilustración del punto de salida (a) para un sistema de segundo orden y (b) para un sistema de cuarto orden.

Por ejemplo, considérese un sistema de lazo cerrado con realimentación unitaria y con una función de transferencia de lazo abierto

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)},$$

el cual tiene como ecuación característica

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K}{(s+2)(s+4)} = 0. \tag{7.34}$$

Alternativamente, la ecuación puede escribirse como

$$K = p(s) = -(s+2)(s+4). \tag{7.35}$$

El lugar de las raíces para este sistema se muestra en la Figura 7.8(a). Se espera que el punto de salida esté cerca de $s = \sigma = -3$ y se traza $p(s)|_{s=\sigma}$ cerca del punto, como se muestra en la Figura 7.9. En este caso, $p(s)$ es igual a cero en los polos $s = -2$ y $s = -4$. La gráfica de $p(s)$ contra σ es simétrica y el punto máximo está en $s = \sigma = -3$, el punto de salida.

Analíticamente, se puede obtener el mismo resultado determinando el máximo de $K = p(s)$. Para encontrar el máximo analíticamente, se deriva, se iguala el polinomio derivado a cero y se determinan las raíces del polinomio. Por tanto, se puede calcular

$$\frac{dK}{ds} = \frac{dp(s)}{ds} = 0 \tag{7.36}$$

para encontrar el punto de salida. Evidentemente, la Ecuación (7.36) es una expresión analítica del procedimiento gráfico descrito en la Figura 7.9 y dará como resultado una ecuación sólo de un orden menor que el número total de polos y ceros $(n + M - 1)$.

La prueba de la Ecuación (7.36) se obtiene por una consideración de la ecuación característica

$$1 + F(s) = 1 + \frac{KY(s)}{X(s)} = 0,$$

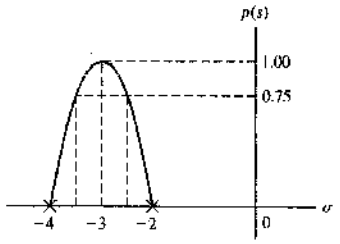


FIGURA 7.9
Cálculo gráfico del punto de salida.

la cual puede escribirse como

$$X(s) + KY(s) = 0. \tag{7.37}$$

Para un pequeño incremento en K, se tiene

$$X(s) + (K + \Delta K)Y(s) = 0.$$

Dividiendo por $X(s) + KY(s)$ se obtiene

$$1 + \frac{\Delta KY(s)}{X(s) + KY(s)} = 0. \tag{7.38}$$

Como el denominador es la ecuación característica original, en un punto de salida existe una multiplicidad de raíces, y

$$\frac{Y(s)}{X(s) + KY(s)} = \frac{C_i}{(s - s_i)^n} = \frac{C_i}{(\Delta s_i)^n}. \tag{7.39}$$

Entonces se puede escribir la Ecuación (7.38) como

$$1 + \frac{\Delta KC_i}{(\Delta s_i)^n} = 0 \tag{7.40}$$

o bien

$$\frac{\Delta K}{\Delta s} = -\frac{+(\Delta s)^{n-1}}{C_i}. \tag{7.41}$$

Por tanto, a medida que Δs tiende a cero, se obtiene

$$\frac{dK}{ds} = 0 \tag{7.42}$$

en los puntos de salida.

Ahora, considerando de nuevo el caso específico donde

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)},$$

se obtiene

$$p(s) = K = -(s+2)(s+4) = -(s^2 + 6s + 8). \tag{7.43}$$

Entonces, cuando se deriva, se tiene

$$\frac{dp(s)}{ds} = -(2s + 6) = 0, \tag{7.44}$$

o sea que los puntos de salida se presentan en $s = -3$. Un ejemplo más complicado ilustrará el método y demostrará la utilidad de la técnica gráfica para determinar el punto de salida.

EJEMPLO 7.3. Sistema de tercer orden

En la Figura 7.10 se muestra un sistema de control con realimentación. La ecuación característica es

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0. \tag{7.45}$$

Como el número de polos, n, menos el número de ceros, M, es igual a 2, se tienen dos asíntotas en $\pm 90°$ con un centro en $\sigma_A = -2$. Las asíntotas y las secciones de los lugares de las raíces en el eje real se muestran en la Figura 7.11(a). Se presenta un punto de salida entre $s = -2$ y $s = -3$. Para calcular el punto de salida, se escribe de nuevo la ecuación característica de forma que se despeje K como sigue:

$$s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0$$

o

$$p(s) = \frac{-s(s+2)(s+3)}{(s+1)} = K. \tag{7.46}$$

Entonces, calculando $p(s)$ en diversos valores de s entre $s = -2$ y $s = -3$, se obtienen los resultados de la Tabla 7.1, como se muestra en la Figura 7.11(b). Alternativamente, derivando la Ecuación (7.46) e igualando a cero se obtiene

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s(s+2)(s+3)}{(s+1)}\right) = \frac{(s^3+5s^2+6s) - (s+1)(3s^2+10s+6)}{(s+1)^2} = 0$$

$$= 2s^3 + 8s^2 + 10s + 6 = 0. \tag{7.47}$$

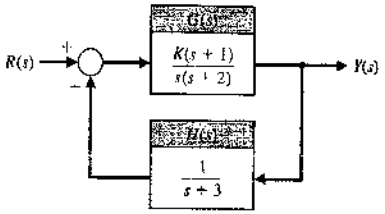


FIGURA 7.10
Sistema de lazo cerrado.

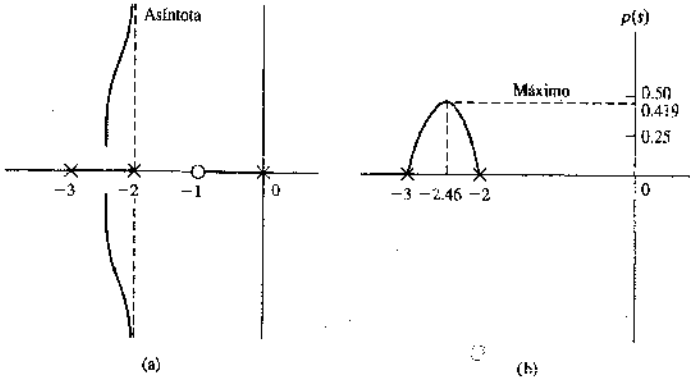


FIGURA 7.11
Cálculo de (a) las asíntotas y (b) el punto de salida.

Tabla 7.1

$p(s)$	0	0.411	0.419	0.417	0.390	0
s	−2.00	−2.40	−2.46	−2.50	−2.60	−3.0

Ahora bien, para localizar el máximo de $p(s)$, se localizan las raíces de la Ecuación (7.47) para obtener $s = -2.46, -0.77 \pm 0.79j$. El único valor de s en el eje real en el intervalo de $s = -2$ a $s = -3$ es $s = -2.46$; por tanto, éste debe ser el punto de salida. Es evidente, por este ejemplo, que el cálculo de $p(s)$ cerca del punto de salida esperado proporciona un método efectivo para calcular dicho punto. ■

Paso 6: Determinar el ángulo de salida del lugar de las raíces desde un polo y el ángulo de llegada del lugar de las raíces en un cero, utilizando el criterio del ángulo de fase. **El ángulo de salida del lugar de las raíces desde un polo es la diferencia entre el ángulo total debido a los demás polos y ceros y el ángulo del criterio de $+180°(2q+1)$**, y análogamente para el ángulo de llegada del lugar de las raíces a un cero. El ángulo de salida (o llegada) es de interés especial para polos (y ceros) complejos, pues la información es útil para completar el lugar de las raíces. Por ejemplo, considérese la función de tercer orden de lazo abierto

$$F(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{(s+p_3)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}. \tag{7.48}$$

En la Figura 7.12(a) se muestran las localizaciones del polo y los ángulos de los vectores en un polo complejo p_1. Los ángulos en un punto de prueba s_1, a una distancia infinitesimal de p_1, deben cumplir el criterio del ángulo. Por tanto, como $\theta_2 = 90°$, se tiene

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta_1 + 90° + \theta_3 = +180°,$$

o sea que el ángulo de salida en el polo p_1 es

$$\theta_1 = 90° - \theta_3.$$

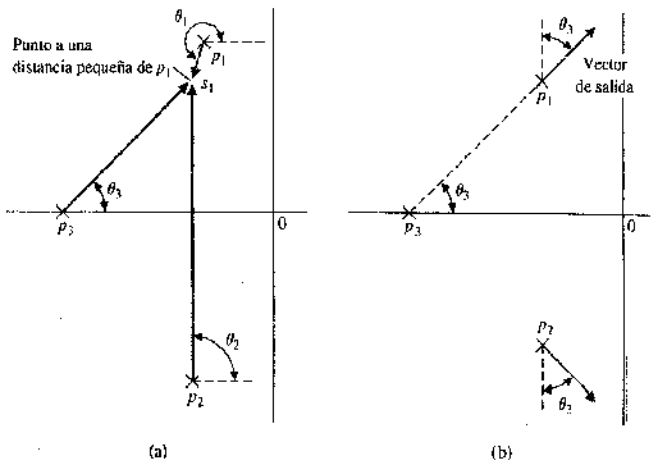


FIGURA 7.12
Ilustración del ángulo de salida. (a) Punto de prueba de distancia infinitesimal desde p_1. (b) Vector de salida real en p_1.

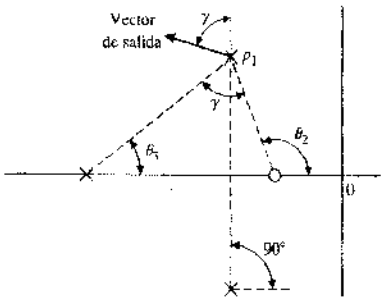


FIGURA 7.13
Cálculo del ángulo de salida.

como se muestra en la Figura 7.12(b). La salida en el polo p_2 es la negativa de la de p_1 dado que p_1 y p_2 son conjugados complejos. En la Figura 7.13 se muestra otro ejemplo de un ángulo de salida. En este caso, el ángulo de salida se halla a partir de

$$\theta_2 - (\theta_1 + \theta_3 + 90^\circ) = 180^\circ.$$

Como $(\theta_2 - \theta_3) = \gamma$, se obtiene que el ángulo de salida es $\theta_1 = 90^\circ + \gamma$.

Paso 7: El último paso en el procedimiento del trazado del lugar de las raíces es completar el dibujo. Esto supone el dibujo de todas las secciones del lugar de las raíces que se han cubierto en los seis pasos anteriores. Si se requiere un lugar de las raíces más detallado, se recomienda utilizar una herramienta asistida por computador como MATLAB. (*Véase* la Sección 7.10.)

En alguna situación, se puede querer determinar la localización de una raíz, s_x, y el valor del parámetro K_x en esa localización de la raíz. Para determinar las localizaciones de las raíces que satisfacen el criterio de fase en la raíz s_x, $x = 1, 2, ..., n$ se utiliza el criterio de fase. El criterio de fase, dado en la Ecuación 17.17, es

$$\underline{/P(s)} = 180^\circ \pm q360^\circ \quad \text{y} \quad q = 1, 2, ...$$

Para determinar el valor del parámetro K_x en una raíz específica s_x, se utiliza el requisito de magnitud (Ecuación 7.16). El requisito de magnitud en s_x es

$$K_x = \left. \frac{\prod_{i=1}^{n} |(s + p_i)|}{\prod_{j=1}^{M} |(s + z_i)|} \right|_{s = s_x}$$

Vale la pena resumir en este punto los pasos utilizados en el método del lugar de las raíces (Tabla 7.2) y después ilustrar su utilización en un ejemplo completo.

EJEMPLO 7.4. Sistema de cuarto orden

1. (a) Se desea representar gráficamente el lugar de las raíces para la ecuación característica de un sistema cuando K varía, siendo $K > 0$

$$1 + \frac{K}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s} = 0.$$

Tabla 7.2 Siete pasos para dibujar un lugar de las raíces

Paso	Ecuación relacionada o regla
Preparación del dibujo del lugar de las raíces.	
(a) Escribir la ecuación característica en forma de polos-ceros de manera que el parámetro de interés K aparezca como un multiplicador.	$1 + KP(s) = 0.$
(b) Factor $P(s)$ en términos de n polos y M ceros.	$1 + K \dfrac{\prod_{i=1}^{M} (s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s + p_j)} = 0.$
(c) Localizar los polos y ceros de lazo abierto de $P(s)$ en el plano s con símbolos seleccionados.	× = polos, ○ = ceros El lugar de las raíces comienza en un polo y finaliza en un cero.
(d) Determinar el número de lugares de las raíces separados, SL.	$SL = n$ cuando $n \geq M$; n = número finito de polos; M = número finito de ceros.
(e) El lugar de las raíces es simétrico con respecto al eje real horizontal.	
2. Localizar los segmentos del eje real en los cuales están los lugares de las raíces.	El lugar de las raíces se encuentra a la izquierda de un número impar de polos y ceros.
3. El lugar de las raíces continúa a los ceros del infinito a lo largo de las asíntotas centradas en σ_A y con ángulo ϕ_A.	$\sigma_A = \dfrac{\sum (-p_j) - \sum (-z_i)}{n - M}$ $\phi_A = \dfrac{(2q + 1)}{n - M} 180^\circ, q = 0, 1, 2, ... (n - M - 1).$
4. Determinar el punto en que el lugar de las raíces que cruza el eje imaginario (si lo hace).	Utilizar el criterio de Routh-Hurwitz (*véase* la Sección 6.2).
5. Determinar el punto de salida en el eje real (si existe alguno).	a) Supóngase $K = p(s)$. b) Obténgase $\dfrac{dp(s)}{ds} = 0.$ c) Determínense las raíces de 5(b) o utilícese un método gráfico para encontrar el máximo de $p(s)$.
6. Calcular el ángulo de la salida del lugar geométrico desde los polos complejos y el de llegada en los ceros complejos.	$\underline{/P(s)} = 18^\circ \pm q360^\circ$ a $s = p_j$ o z_i.
7. Complétese el dibujo del lugar de las raíces.	

(b) Determinando los polos, se tiene

$$1 + \frac{K}{s(s + 4)(s + 4 + j4)(s + 4 - j4)} = 0 \qquad (7.49)$$

con K variando de cero a infinito. Este sistema no tiene ceros finitos.

(c) Los polos se localizan en el plano s como se muestra en la Figura 7.14(a).

(d) Como el número de polos n es igual a 4, hay cuatro lugares de las raíces separados.

(e) El lugar de las raíces es simétrico con respecto al eje real.

2. Existe un segmento del lugar de las raíces en el eje real entre $s = 0$ y $s = -4$.

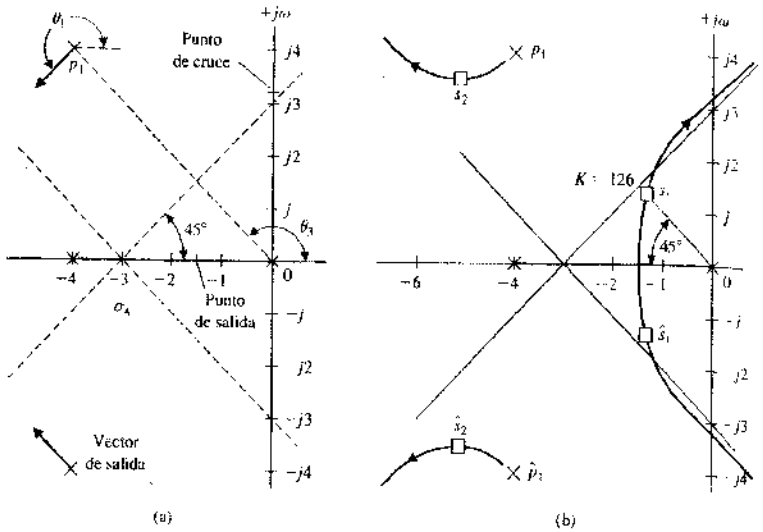


FIGURA 7.14
Lugar de las raíces para el Ejemplo 7.4. Localización (a) de los polos y (b) de las asíntotas.

3. Los ángulos de las asíntotas son

$$\phi_A = \frac{(2q+1)}{4}180^\circ, \qquad q = 0, 1, 2, 3;$$

y

$$\phi_A = +45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ.$$

El centro de las asíntotas es

$$\sigma_A = \frac{-4-4-4}{4} = -3.$$

Entonces las asíntotas se dibujan como se muestra en la Figura 7.14(a).

4. La ecuación característica se escribe ahora como

$$s(s+4)(s^2+8s+32)+K = s^4+12s^3+64s^2+128s+K = 0. \qquad (7.50)$$

Por tanto, el array de Routh-Hurwitz es

s^4	1	64	K
s^3	12	128	
s^2	b_1	K	
s^1	c_1		
s^0	K		

donde

$$b_1 = \frac{12(64)-128}{12} = 53.33 \quad \text{y} \quad c_1 = \frac{53.33(128)-12K}{53.33}.$$

Tabla 7.3

$p(s)$	0	51.0	68.44	80.0	83.57	75.0	0
s	−4.0	−3.0	−2.5	−2.0	−1.577	−1.0	0

Por consiguiente, el valor límite de la ganancia para la estabilidad es $K = 568.89$ y las raíces de la ecuación auxiliar son

$$53.33s^2 + 568.89 = 53.33(s^2 + 10.67) = 53.33(s + j3.266)(s - j3.266). \quad (7.51)$$

Los puntos donde el lugar de las raíces cruza el eje imaginario se muestran en la Figura 7.14(a). Por lo tanto, cuando $K = 568.89$, el lugar de las raíces corta el eje $j\omega$ en $s = j3.266$.

5. El punto de salida se estima calculando

$$K = p(s) = -s(s+4)(s+4+j4)(s+4-j4)$$

entre $s = -4$ y $s = 0$. Se espera que el punto de salida esté entre $s = -3$ y $s = -1$ y, por tanto, se busca el valor máximo de $p(s)$ en esa región. En la Tabla 7.3 aparecen los valores de $p(s)$ que resultan para varios valores de s. El máximo de $p(s)$ está aproximadamente en $s = -1.577$, como se indica en la tabla. Normalmente no es necesaria una estimación más exacta del punto de salida. Entonces el punto de salida se indica en la Figura 7.14(a).

6. El ángulo de salida en el polo complejo p_1 puede calcularse utilizando el criterio del ángulo como sigue:

$$\theta_1 + 90^\circ + 90^\circ + \theta_3 = 180^\circ.$$

Aquí, θ_3 es el ángulo subtendido por el vector desde el polo p_3. Los ángulos desde el polo en $s = -4$ y $s = -4 - j4$ son de 90°. Como $\theta_3 = 135^\circ$, se obtiene que

$$\theta_1 = -135^\circ = +225^\circ,$$

como se muestra en la Figura 7.14(a).

7. Se completa el dibujo como se muestra en la Figura 7.14(b).

Utilizando la información obtenida en los siete pasos del método del lugar de las raíces, se traza el lugar de las raíces completo rellenando el dibujo lo mejor posible con una inspección visual. En la Figura 7.14(b) se muestra el lugar de las raíces para este sistema. Cuando las raíces complejas próximas al origen tienen una razón de amortiguamiento de $\zeta = 0.707$, se puede determinar gráficamente la ganancia K como se muestra en la Figura 7.14(b). Se calculan las longitudes de los vectores hasta la localización de la raíz s_1 desde los polos de lazo abierto y se obtiene una ganancia en s_1 de

$$K = |s_1||s_1+4||s_1-p_1||s_1-\hat{p}_1| = (1.9)(2.9)(3.8)(6.0) = 126. \qquad (7.52)$$

El par restante de raíces complejas se presenta en s_2 y $\hat{s}_2$, cuando $K = 126$. El efecto de las raíces complejas en s_2 y $\hat{s}_2$ sobre la respuesta transitoria será despreciable comparado con las raíces s_1 y $\hat{s}_1$. Este hecho puede comprobarse considerando el amortiguamiento de la respuesta debido a cada par de raíces. El amortiguamiento debido a s_1 y $\hat{s}_1$ es

$$e^{-\zeta\omega_n t} = e^{-\sigma_1 t},$$

y el factor de amortiguamiento debido a s_2 y $\bar{s}_2$ es

$$e^{-\zeta_2\omega_{n2}t} = e^{-\sigma_2 t},$$

donde σ_2 es aproximadamente cinco veces mayor que σ_1. Por tanto, el término de la respuesta transitoria debido a s_2 decaerá mucho más rápidamente que el debido a s_1. Por eso, para una entrada de escalón unitario, la respuesta puede escribirse como

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + c_1 e^{-\sigma_1 t}\operatorname{sen}(\omega_1 t + \theta_1) + c_2 e^{-\sigma_2 t}\operatorname{sen}(\omega_2 t + \theta_2) \\ &\simeq 1 + c_1 e^{-\sigma_1 t}\operatorname{sen}(\omega_1 t + \theta_1). \end{aligned} \tag{7.53}$$

Las raíces complejas conjugadas que están próximas al origen del plano s en relación con las otras del sistema de lazo cerrado, se conocen como **raíces dominantes** del sistema, pues representan o dominan la respuesta transitoria. El dominio relativo de las raíces complejas, en un sistema de tercer orden con un par de raíces complejas conjugadas, se determina por la relación de las partes reales de las raíces complejas, y dará como resultado un dominio aproximado para relaciones que excedan de cinco.

Por supuesto, el dominio del segundo término de la Ecuación (7.53) también depende de las magnitudes relativas de los coeficientes c_1 y c_2. Estos coeficientes, que son los residuos calculados en las raíces complejas, dependen a su vez de las localizaciones de los ceros en el plano s. Por tanto, el concepto de raíces dominantes es útil para estimar la respuesta de un sistema, pero debe usarse con precaución y con comprensión de las suposiciones en que se fundamenta. ■

7.4. EJEMPLO DEL ANÁLISIS Y DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL UTILIZANDO EL MÉTODO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

El análisis y diseño de un sistema de control puede realizarse utilizando la transformada de Laplace, un diagrama del flujo de señal o diagrama de bloques, el plano s y el método del lugar de las raíces. En este punto del desarrollo vale la pena examinar un sistema de control y, con base en el método del lugar de las raíces, seleccionar los valores adecuados del parámetro.

En la Figura 7.15 se muestra una balanza automática de autonivelación donde la operación de pesaje se controla por la función física de balance a través de un lazo eléctrico de realimentación [5]. La balanza se muestra en la condición de equilibrio, y x es el recorrido del contrapeso W_c desde una condición de equilibrio sin carga. El peso que se

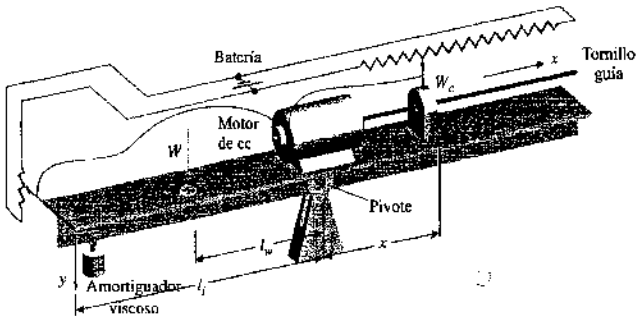


FIGURA 7.15
Balanza automática de autonivelación. Con autorización de J. H. Goldberg, *Automatic Controls*, Allyn and Bacon, Boston, 1964.

Tabla 7.4

$W_c = 2$ N	Ganancia del tornillo guía $K_t = \dfrac{1}{4000\pi}$ m/rad.
$I = 0.05$ kg-m^2	
$l_w = 5$ cm	Ganancia del potenciómetro de entrada $K_i = 4800$ V/m.
$l_i = 20$ cm	
$b = 10\sqrt{3}$ kg/m/s	Ganancia del potenciómetro de realimentación $K_f = 400$ V/m.

medirá, W, se aplica a 5 cm del pivote, y la longitud del brazo de la balanza al amortiguador viscoso, l_i, es de 20 cm. Se desea resolver los siguientes puntos:

1. Seleccionar los parámetros y especificaciones del sistema de realimentación.
2. Obtener un modelo que represente al sistema.
3. Seleccionar la ganancia K basada en un diagrama del lugar de las raíces.
4. Determinar el modo dominante de la respuesta.

La inercia del brazo de la balanza es igual a 0.05 kg-m^2. Se debe seleccionar un voltaje de la batería que sea lo suficientemente grande para proporcionar una ganancia razonable del sensor de posición; por esto se escoge $E_{bb} = 24$ voltios. Se utilizará un tornillo guía de 20 roscas/cm y un potenciómetro para x de 6 cm de longitud. Se requieren balances exactos, por lo que se escogerá un potenciómetro de entrada para y de 0.5 cm de longitud. Se escogerá un amortiguador razonablemente viscoso con una constante de amortiguamiento $b = 10\sqrt{3}$ kg/m/s. Finalmente, se escogerá un contrapeso W_c, de forma que pueda nivelarse el intervalo de pesos W esperado. En resumen, los parámetros del sistema se seleccionan según la lista de la Tabla 7.4.

Especificaciones. Se desea una respuesta exacta y rápida que dé como resultado un pequeño error de medición del peso en el estado estacionario. Por tanto, se necesitará que el sistema sea por lo menos de tipo uno, de modo que produzca un error de medición igual a cero. Para un cambio de escalón, es satisfactoria una respuesta amortiguada periódica en el peso medido, W, y por tanto se especificará una respuesta dominante con $\zeta = 0.5$. El tiempo de asentamiento deberá ser menor que dos segundos para así proporcionar un dispositivo de rápida medición de pesos. El tiempo de asentamiento debe estar dentro del 2% del valor final de la balanza después de introducir el peso que se desea medir. Las especificaciones se resumen en la Tabla 7.5.

La derivación de un modelo del sistema electromecánico puede lograrse obteniendo las ecuaciones del movimiento de la balanza. Para pequeñas desviaciones de la balanza, el ángulo de desviación es

$$\theta \simeq \frac{y}{l_i}. \tag{7.54}$$

Tabla 7.5 Especificaciones

Error en estado estacionario	$K_p = \infty$, $e_{ss} = 0$ para una entrada de escalón
Respuesta subamortiguada	$\zeta = 0.5$
Tiempo de asentamiento	Menos de 2 segundos

El movimiento del brazo de la balanza respecto al pivote se representa por la ecuación de par de torsión:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \Sigma \text{ torsiones.}$$

Por tanto, en función del ángulo de desviación el movimiento se representa por

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = l_w W - xW_c - l_i^2 b\frac{d\theta}{dt}. \tag{7.55}$$

El voltaje de entrada al motor es

$$v_m(t) = K_i y - K_f x. \tag{7.56}$$

La función de transferencia del motor es

$$\frac{\theta_m(s)}{V_m(s)} = \frac{K_m}{s(\tau s + 1)}, \tag{7.57}$$

donde τ se considerará despreciable con respecto a las constantes de tiempo de todo el sistema y θ_m es la rotación de salida del eje. En la Figura 7.16 se muestra un grafo de flujo de señal y un diagrama de bloques que representan las Ecuaciones (7.55) a (7.57). Examinando la trayectoria directa de W a $X(s)$, se observa que el sistema es de tipo uno debido a la integración que precede a $Y(s)$. Por tanto, el error en estado estacionario del sistema es cero.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema se obtiene utilizando la fórmula de la ganancia del flujo de señal de Mason y se obtiene que es

$$\frac{X(s)}{W(s)} = \frac{(l_w l_i K_i K_m K_s/Is^3)}{1 + (l_i^2 b/Is) + (K_m K_s K_f/s) + (l_i K_i K_m K_s W_c/Is^3) + (l_i^2 b K_m K_s K_f/Is^2)}, \tag{7.58}$$

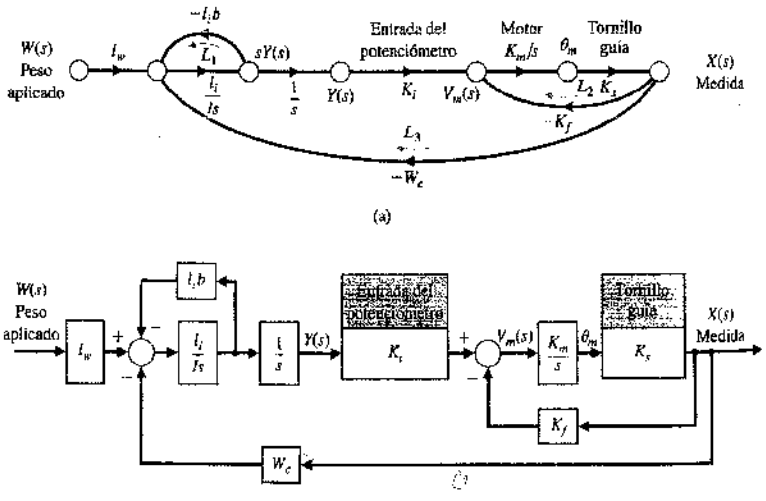


FIGURA 7.16
Modelo para la balanza automática. (a) Señal de grafo de flujo. (b) Diagrama de bloques.

donde el numerador es el factor de la trayectoria de W a X, el segundo término del denominador es el lazo L_1, el tercer término es el factor del lazo L_2, el cuarto término es el lazo L_3 y el quinto representa los dos lazos no tocados L_1L_2. Por tanto, la función de transferencia de lazo cerrado es

$$\frac{X(s)}{W(s)} = \frac{l_w l_i K_i K_m K_s}{s(Is + l_i^2 b)(s + K_m K_s K_f) + W_c K_m K_s K_i l_i}. \tag{7.59}$$

La ganancia del sistema en estado estacionario es entonces

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{x(t)}{|W|}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{X(s)}{W(s)}\right) = \frac{l_w}{W_c} = 2.5 \text{ cm/kg} \tag{7.60}$$

cuando $W(s) = |W|/s$. Para obtener el lugar de las raíces en función de la constante K_m del motor, se sustituyen los parámetros seleccionados en la ecuación característica, la cual es el denominador de la Ecuación (7.59). Por tanto, se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$s(s + 8\sqrt{3})\left(s + \frac{K_m}{10\pi}\right) + \frac{96K_m}{10\pi} = 0. \tag{7.61}$$

Escribiendo de nuevo la ecuación característica en la forma de lugar de las raíces, se aísla en primer lugar a K_m como sigue:

$$s^2(s + 8\sqrt{3}) + s(s + 8\sqrt{3})\frac{K_m}{10\pi} + \frac{96K_m}{10\pi} = 0. \tag{7.62}$$

Entonces, escribiendo de nuevo la Ecuación (7.62) en la forma de lugar de las raíces, se tiene

$$1 + KP(s) = 1 + \frac{(K_m/10\pi)[s(s + 8\sqrt{3}) + 96]}{s^2(s + 8\sqrt{3})} = 0$$

$$= 1 + \frac{(K_m/10\pi)(s + 6.93 + j6.93)(s + 6.93 - j6.93)}{s^2(s + 8\sqrt{3})}. \tag{7.63}$$

En la Figura 7.17 se muestra el lugar de las raíces a medida que varía K_m. Las raíces dominantes pueden colocarse en $\zeta = 0.5$ cuando $K = 25.3 = K_m/10\pi$. Con el objeto de obtener esta ganancia,

$$K_m = 795\frac{\text{rad/s}}{\text{volt}} = 7600\frac{\text{rpm}}{\text{volt}}, \tag{7.64}$$

se necesitará un amplificador para proporcionar una parte de la ganancia requerida. La parte real de las raíces dominantes es mayor que 4 y, por tanto, el tiempo de asentamiento, $4/\sigma$, es menor que 1 segundo, cumpliéndose el requisito establecido. La tercera raíz de la ecuación característica es real en $s = -30.2$, y evidentemente las raíces subamortiguadas dominan la respuesta. Por tanto, el sistema se ha analizado por el método del lugar de las raíces y se ha obtenido un diseño adecuado para el parámetro K_m. La eficiencia de los métodos del plano s y del lugar de las raíces se demuestra claramente mediante este ejemplo.

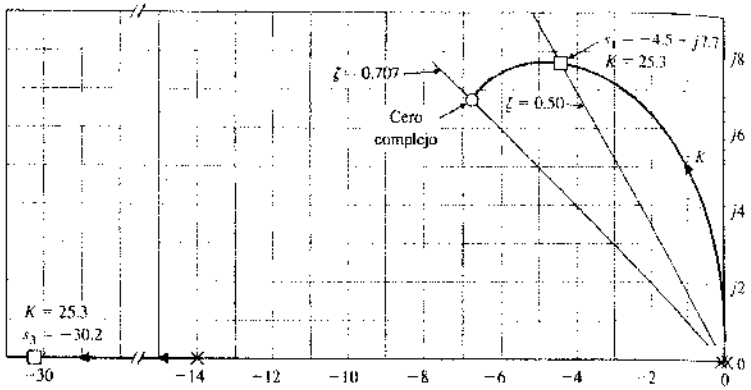


FIGURA 7.17
Lugar de las raíces a medida que varía K_m. Un lugar de las raíces parte de los dos polos en el origen y se dirige a los dos ceros complejos cuando K aumenta. El otro lugar de las raíces se encuentra a la izquierda del polo en $s = -14$.

7.5. DISEÑO DE PARÁMETROS POR EL MÉTODO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

El desarrollo original del método del lugar de las raíces se relacionó con la determinación del lugar de las raíces para las raíces de la ecuación característica a medida que varía la ganancia, K, del sistema desde cero hasta infinito. Sin embargo, como se ha visto, puede estudiarse fácilmente el efecto de otros parámetros del sistema usando este método. Fundamentalmente, este método se relaciona con una ecuación característica (Ecuación 7.22), que puede escribirse como

$$1 + F(s) = 0. \tag{7.65}$$

Entonces puede aplicarse el método estándar del lugar de las raíces que se ha estudiado. Surge la siguiente pregunta: ¿Cómo se puede estudiar el efecto de dos parámetros, α y β? Parece que el método del lugar de las raíces es para un solo parámetro; sin embargo, afortunadamente puede extenderse sin dificultad para el estudio de dos o más parámetros. Este método de **diseño de parámetros** utiliza el método del lugar de las raíces para seleccionar el valor de los parámetros.

La ecuación característica de un sistema dinámico puede escribirse como

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0. \tag{7.66}$$

Evidentemente, el efecto del coeficiente a_1 puede estudiarse mediante la ecuación del lugar de las raíces

$$1 + \frac{a_1 s}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_0} = 0. \tag{7.67}$$

Si el parámetro de interés, α, no aparece únicamente como coeficiente, entonces se puede aislar como

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + (a_{n-q} - \alpha)s^{n-q} + \alpha s^{n-q} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0. \tag{7.68}$$

Así, por ejemplo, una ecuación de tercer orden de interés podría ser

$$s^3 + (3 + \alpha)s^2 + 3s + 6 = 0. \tag{7.69}$$

Para analizar el efecto del parámetro α, se aísla y se escribe de nuevo la ecuación en la forma de lugar de las raíces como se muestra en los siguientes pasos:

$$s^3 + 3s^2 + \alpha s^2 + 3s + 6 = 0; \tag{7.70}$$

$$1 + \frac{\alpha s^2}{s^3 + 3s^2 + 3s + 6} = 0. \tag{7.71}$$

Entonces, para determinar el efecto de dos parámetros, se debe repetir dos veces el método del lugar de las raíces. Así, para una ecuación característica con dos parámetros variables, α y β, se tiene

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + (a_{n-q} - \alpha)s^{n-q} + \alpha s^{n-q} + \cdots + (a_{n-r} - \beta)s^{n-r} + \beta s^{n-r} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0. \tag{7.72}$$

Los dos parámetros variables se han separado, y se determinará el efecto de α y después el efecto de β. Por ejemplo, para cierta ecuación característica de tercer orden con α y β como parámetros, se obtiene

$$s^3 + s^2 + \beta s + \alpha = 0. \tag{7.73}$$

En este caso particular, los parámetros aparecen como coeficientes de la ecuación característica. El efecto de la variación de β desde cero hasta infinito se determina por la ecuación del lugar de las raíces

$$1 + \frac{\beta s}{s^3 + s^2 + \alpha} = 0. \tag{7.74}$$

Se observa que el denominador de la Ecuación (7.74) es la ecuación característica del sistema con $\beta = 0$. Por tanto, primero se debe calcular el efecto de la variación de α desde cero hasta infinito mediante la ecuación

$$s^3 + s^2 + \alpha = 0,$$

escribiéndola como

$$1 + \frac{\alpha}{s^2(s + 1)} = 0, \tag{7.75}$$

donde β se ha igualado a cero en la Ecuación (7.73). Entonces, tras calcular el efecto de α, se selecciona un valor de este parámetro y se utiliza con la Ecuación (7.74) para calcular el efecto de β. Este método de dos pasos para calcular el efecto de α y después el de β puede efectuarse como un procedimiento para el lugar de las raíces de dos raíces. Primero se obtiene el lugar de las raíces a medida que varía α y se selecciona un valor adecuado de α; los resultados son localizaciones satisfactorias de las raíces. Entonces se obtiene el lugar de las raíces para β, observando que los polos de la Ecuación (7.74) son las raíces calculadas por el lugar de las raíces de la Ecuación (7.75). Una limitación de este método es que no siempre se podrá obtener una ecuación característica que sea lineal en el parámetro considerado (por ejemplo, α).

Para ilustrar efectivamente este método, se obtendrá el lugar de las raíces para α y después para β por la Ecuación (7.73). En la Figura 7.18(a) aparece el trazo del lugar de las raíces a medida que varía α para la Ecuación (7.75); se muestran las raíces para dos

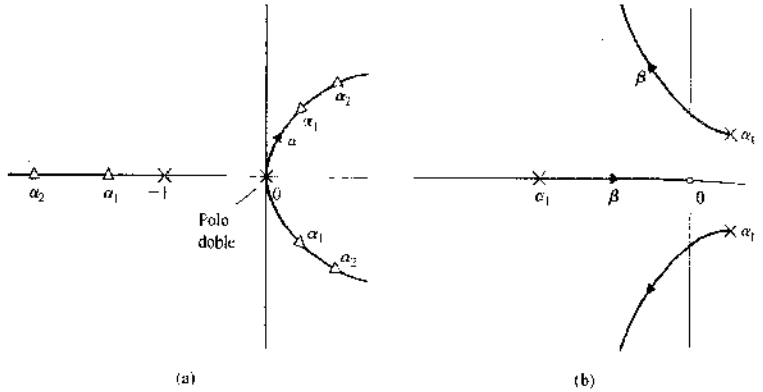


FIGURA 7.18
Lugar de las raíces en función de α y β. (a) Lugar de las raíces cuando varía α. (b) Lugar de las raíces cuando varía β para un valor de $\alpha = \alpha_1$.

valores de ganancia α. Si la ganancia α se selecciona como α_1, entonces las raíces resultantes de la Ecuación (7.75) vienen a ser los polos de la Ecuación (7.74). El lugar de las raíces de la Ecuación (7.74) a medida que varía β se muestra en la Figura 7.18(b), y puede seleccionarse un valor adecuado de β teniendo en cuenta las localizaciones deseadas de las raíces.

Usando el método del lugar de las raíces se ilustrará, aún más, este método del diseño del parámetro mediante un ejemplo específico.

EJEMPLO 7.5. Control de una cabeza de soldadura

Una cabeza de soldadura para el chasis de un automóvil requiere un sistema de control preciso para su posicionamiento [4]. Se diseña un sistema de control con realimentación para satisfacer las siguientes especificaciones:

1. Error en estado estacionario para una entrada de rampa $\leqslant 35\%$ de la magnitud de entrada.
2. Razón de amortiguamiento de las raíces dominantes $\geqslant 0.707$.
3. Tiempo de asentamiento dentro del 2% del valor final $\leqslant 3$ segundos.

En la Figura 7.19 se muestra la estructura del sistema de control con realimentación, donde se debe seleccionar la ganancia K_1 del amplificador y la ganancia K_2 de realimentación de la derivada. La especificación del error en estado estacionario puede escribirse como sigue:

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s(|R|/s^2)}{1 + G_2(s)}, \tag{7.76}$$

donde $G_2(s) = G(s)/(1 + G(s)H_1(s))$. Por tanto, el requisito del error en estado estacionario es

$$\frac{e_{ss}}{|R|} = \frac{2 + K_1K_2}{K_1} \leqslant 0.35. \tag{7.77}$$

Por tanto, para alcanzar un valor pequeño del error en estado estacionario, se seleccionará un valor pequeño de K_2. La especificación de la razón de amortiguamiento requiere que las raíces del sistema de lazo cerrado estén por debajo de la línea a 45° en la parte izquierda del plano s. La especificación del tiempo de asentamiento puede escribirse en términos de la parte real de las raíces dominantes como

$$T_s = \frac{4}{\sigma} \leqslant 3 \text{ segundos} \tag{7.78}$$

Por tanto, es necesario que $\sigma = 4/3$, y esta superficie se indica en la Figura 7.20, en la parte izquierda del plano s, junto con el requisito ζ. Para satisfacer las especificaciones, todas las raíces deben estar dentro del área sombreada de la parte izquierda del plano.

Los parámetros a seleccionar son $\alpha = K_1$ y $\beta = K_2K_1$. La ecuación característica es

$$1 + GH(s) = s^2 + 2s + \beta s + \alpha = 0. \tag{7.79}$$

El lugar de las raíces a medida que varía $\alpha = K_1$ (con $\beta = 0$), se determina mediante la ecuación:

$$1 + \frac{\alpha}{s(s+2)} = 0, \tag{7.80}$$

como se ve en la Figura 7.21(a). Para una ganancia de $K_1 = \alpha = 20$, las raíces se indican en el lugar de las raíces. Entonces, el efecto de la variación de $\beta = 20K_2$ se determina por la ecuación del lugar de las raíces

$$1 + \frac{\beta s}{s^2 + 2s + \alpha} = 0, \tag{7.81}$$

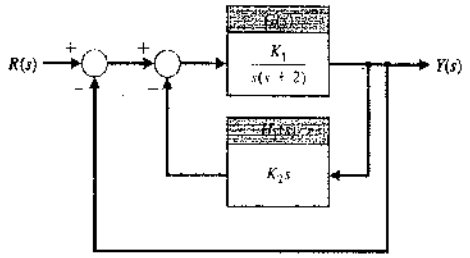


FIGURA 7.19
Diagrama de bloques del sistema de control de una cabeza de soldadura.

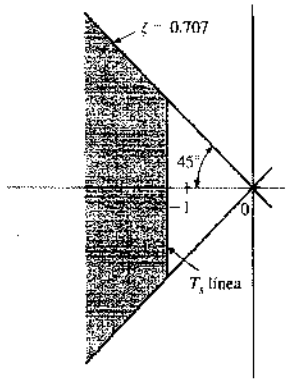


FIGURA 7.20
Región en el plano s para la localización de la raíz deseada.

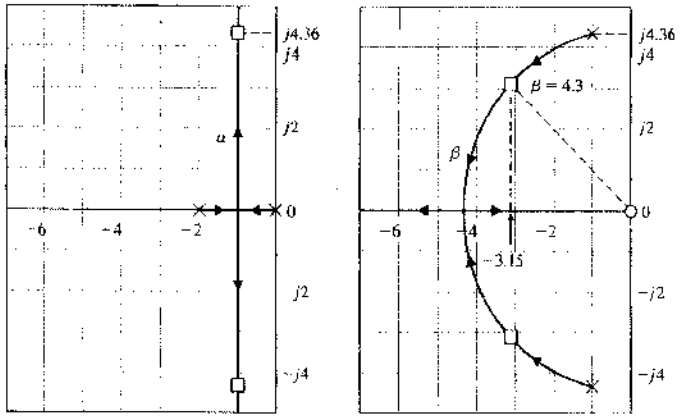


FIGURA 7.21
Lugares de las raíces en función de (a) α y (b) β.

donde los polos de este lugar de las raíces son las raíces del lugar de las raíces de la Figura 7.21(a). En la Figura 7.21(b) se muestra el lugar de las raíces para la Ecuación (7.81); las raíces con $\zeta = 0.707$ se obtienen cuando $\beta = 4.3 = 20K_2$ o cuando $K_2 = 0.215$. La parte real de estas raíces es $\sigma = 3.15$ y, por tanto, el tiempo de asentamiento (dentro del 2% del valor final) es igual a 1.27 segundos, el cual es considerablemente menor que la especificación de 3 segundos. ■

El método del lugar de las raíces puede extenderse a más de dos parámetros aumentando el número de pasos en el método descrito en esta sección. Además, puede generarse una familia de lugares de las raíces para dos parámetros, con el objeto de determinar el efecto total de la variación de dichos parámetros. Por ejemplo, se determinará el efecto de la variación de α y β de la siguiente ecuación característica:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + \beta s + \alpha = 0. \tag{7.82}$$

La ecuación del lugar de las raíces en función de α (con $\beta = 0$) es

$$1 + \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)} = 0. \tag{7.83}$$

El lugar de las raíces en función de β es

$$1 + \frac{\beta s}{s^3 + 3s^2 + 2s + \alpha} = 0. \tag{7.84}$$

En la Figura 7.22 se muestra (con líneas continuas) el lugar de las raíces en función de α para la Ecuación (7.83). Las raíces de este lugar de las raíces, indicadas por una cruz, son los polos del lugar de las raíces de la Ecuación (7.84). En este caso el lugar de las raíces de la Ecuación (7.84) continúa en la Figura 7.22 (líneas punteadas), donde aparece el lugar de las raíces de β para diferentes valores seleccionados de α. Esta familia de lugares de las raíces, conocida como **contornos de las raíces**, ilustra el efecto de α y β en las raíces de la ecuación característica de un sistema [3].

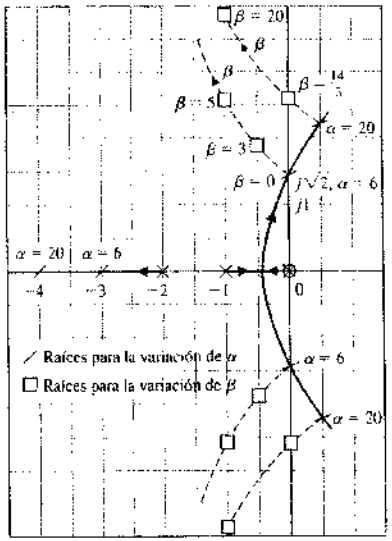


FIGURA 7.22
Lugar de las raíces de dos parámetros. El lugar de las raíces para la variación de α está en gris.

7.6. SENSIBILIDAD Y LUGAR DE LAS RAÍCES

Una de las principales razones para la utilización de realimentación negativa en los sistemas de control es reducir el efecto de las variaciones de los parámetros. Este efecto, como se vio en la Sección 4.2, puede describirse midiendo la **sensibilidad** del comportamiento del sistema a los cambios del parámetro específico. En la Sección 4.2 se definió la **sensibilidad logarítmica** originalmente sugerida por Bode como

$$S_K^T = \frac{d \ln T}{d \ln K} = \frac{\partial T/T}{\partial K/K}, \tag{7.85}$$

donde la función de transferencia del sistema es $T(s)$ y el parámetro de interés es K.

En años recientes, con la mayor utilización del método de los polos y ceros (plano s), ha resultado útil definir una medida de la sensibilidad en función de las posiciones de las raíces para la ecuación característica [7-9]. Como las raíces de la ecuación característica representan los modos dominantes de la respuesta transitoria, el efecto de las variaciones de los parámetros en la posición de las raíces es una medida importante y útil de la sensibilidad. La **sensibilidad de las raíces** de un sistema $T(s)$ puede definirse como

$$\boxed{S_K^{r_i} = \frac{\partial r_i}{\partial \ln K} = \frac{\partial r_i}{\partial K/K},} \tag{7.86}$$

donde r_i es igual a la raíz i-ésima del sistema, de forma que

$$T(s) = \frac{K_1 \prod_{j=1}^{M} (s + z_j)}{\prod_{i=1}^{n} (s + r_i)} \tag{7.87}$$

y K es el parámetro. La sensibilidad de la raíz relaciona el cambio en la localización de las raíces en el plano s con el cambio en el parámetro. Esta sensibilidad se relaciona con la sensibilidad logarítmica de Bode por la relación

$$S_K^T = \frac{\partial \ln K_1}{\partial \ln K} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial \ln K} \cdot \frac{1}{(s + r_i)} \tag{7.88}$$

cuando los ceros de $T(s)$ son independientes del parámetro K, de forma que

$$\frac{\partial z_j}{\partial \ln K} = 0.$$

Esta sensibilidad logarítmica puede obtenerse fácilmente determinando la derivada de $T(s)$, Ecuación (7.87), con respecto a K. Para el caso particular en que la ganancia del sistema es independiente del parámetro K, se tiene

$$S_K^T = -\sum_{i=1}^{n} S_K^{r_i} \cdot \frac{1}{(s + r_i)}, \tag{7.89}$$

y se relacionan directamente las dos medidas de la sensibilidad.

El cálculo de la sensibilidad de la raíz para un sistema de control puede hacerse fácilmente utilizando los métodos del lugar de las raíces de la sección anterior. La sensibilidad de la raíz $S_K^{r_i}$ puede calcularse en la raíz r_i examinando los contornos de la raíz para el parámetro K. Se puede variar K en una cantidad finita pequeña ΔK y calcular la nueva raíz modificada $(r_i + \Delta r_i)$ en $K + \Delta K$. De este modo, utilizando la Ecuación (7.86), se tiene

$$S_K^{r_i} \simeq \frac{\Delta r_i}{\Delta K / K} \tag{7.90}$$

La Ecuación (7.90) es una aproximación para el valor real de la sensibilidad cuando $\Delta K \to 0$. Un ejemplo ilustrará el proceso para calcular la sensibilidad de la raíz.

EJEMPLO 7.6. Sensibilidad de las raíces de un sistema de control

La ecuación característica del sistema de control con realimentación mostrado en la Figura 7.23 es

$$1 + \frac{K}{s(s + \beta)} = 0$$

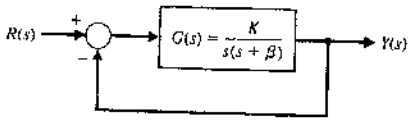


FIGURA 7.23
Sistema de control con realimentación.

o bien

$$s^2 + \beta s + K = 0. \tag{7.91}$$

Se considerará que el parámetro α es la ganancia K. Entonces el efecto de un cambio en cada parámetro puede determinarse utilizando las relaciones

$$\alpha = \alpha_0 \pm \Delta\alpha \quad \text{y} \quad \beta = \beta_0 \pm \Delta\beta,$$

donde α_0 y β_0 son los valores nominales o deseados para los parámetros α y β, respectivamente. Se considerará el caso cuando el valor nominal del polo es $\beta_0 = 1$ y la ganancia deseada es $\alpha_0 = K = 0.5$. Entonces el lugar de las raíces en función de $\alpha = K$ puede obtenerse utilizando la ecuación del lugar de las raíces

$$1 + \frac{K}{s(s + \beta_0)} = 1 + \frac{K}{s(s + 1)} = 0, \tag{7.92}$$

como se muestra en la Figura 7.24. El valor nominal de la ganancia $K = \alpha_0 = 0.5$ da como resultado dos raíces complejas, $r_1 = -0.5 + j0.5$ y $r_2 = \hat{r}_1$, como se muestra en la Figura 7.24. Para calcular el efecto de cambios inevitables en la ganancia, la ecuación característica con $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ viene a ser

$$s^2 + s + \alpha_0 \pm \Delta\alpha = s^2 + s + 0.5 \pm \Delta\alpha$$

o

$$1 + \frac{\pm\Delta\alpha}{s^2 + s + 0.5} = 1 + \frac{\pm\Delta\alpha}{(s + r_1)(s + \hat{r}_1)} = 0. \tag{7.93}$$

Por tanto, el efecto de los cambios en la ganancia puede calcularse a partir del lugar de las raíces de la Figura 7.24. Para un cambio del 20% en α, se tiene $\pm\Delta\alpha = \pm 0.1$. Las localizaciones de las raíces para una ganancia $\alpha = 0.4$ y $\alpha = 0.6$, se determinan fácilmente por los métodos del lugar de las raíces; en la Figura 7.24 se muestran las localizaciones de las raíces para $\pm\Delta\alpha = \pm 0.1$. Cuando $\alpha = K = 0.6$, la raíz en el segundo cuadrante del plano s es

$$r_1 + \Delta r_1 = -0.5 + j0.59,$$

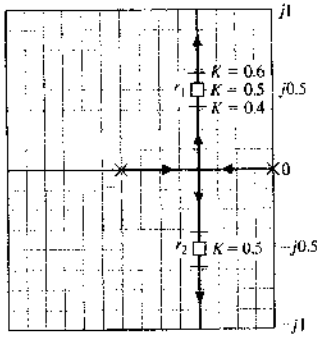


FIGURA 7.24
Lugar de las raíces para K.

y el cambio en la raíz es $\Delta r_1 = +j0.09$. Cuando $\alpha = K = 0.4$, la raíz en el segundo cuadrante es

$$r_1 + \Delta r_1 = -0.5 + j0.387,$$

y el cambio en la raíz es $\Delta r = -j0.11$. Así pues, la sensibilidad de la raíz para r_1 es

$$S^{r_1}_{\Delta K} = S^{r_1}_{K} = \frac{\Delta r_1}{\Delta K/K} = \frac{+j0.09}{+0.2} = j0.45 = 0.45\underline{/+90^\circ} \tag{7.94}$$

para cambios positivos de la ganancia. Para incrementos negativos de la ganancia, la sensibilidad es

$$S^{r_1}_{\Delta K} = S^{r_1}_{K} = \frac{\Delta r_1}{\Delta K/K} = \frac{+j0.11}{+0.2} = j0.55 = 0.55\underline{/-90^\circ}.$$

Por supuesto, para pequeños cambios infinitesimales en el parámetro ∂K, la sensibilidad será igual para incrementos positivos o negativos en K. El ángulo de la sensibilidad de la raíz indica la dirección en que se moverá la raíz a medida que varía el parámetro. El ángulo del movimiento para $+\Delta\alpha$ siempre es de 180° menos el ángulo del movimiento para $-\Delta\alpha$ en el punto $\alpha = \alpha_0$.

El polo β varía debido a cambios medioambientales y puede representarse por $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$, donde $\beta_0 = 1$. Entonces el efecto de la variación de los polos se representa por la ecuación característica

$$s^2 + s + \Delta\beta s + K = 0,$$

o, en la forma del lugar de las raíces,

$$1 + \frac{\Delta\beta s}{s^2 + s + K} = 0. \tag{7.95}$$

Nuevamente, el denominador del segundo término es la ecuación característica sin cambios, cuando $\Delta\beta = 0$. En la Figura 7.24 se muestra el lugar de las raíces para el sistema sin cambio ($\Delta\beta = 0$) en función de K. Para una especificación de diseño que requiere $\zeta = 0.707$, las raíces complejas están en

$$r_1 = -0.5 + j0.5 \quad \text{y} \quad r_2 = \hat{r}_1 = -0.5 - j0.5.$$

Entonces, como las raíces son complejas conjugadas, la sensibilidad de la raíz para r_1 es el conjugado de esta sensibilidad para $\hat{r}_1 = r_2$. Usando las técnicas del lugar de las raíces del parámetro estudiadas en la sección anterior, se obtiene el lugar de las raíces para $\Delta\beta$ como se muestra en la Figura 7.25. Normalmente, el interés se centra en el efecto de una variación del parámetro de forma que $\beta = \beta_0 \pm \Delta\beta$, para lo cual el lugar de las raíces, a medida que disminuye $\Delta\beta$, se obtiene a partir de la ecuación del lugar de las raíces

$$1 + \frac{(\Delta\beta)s}{s^2 + s + K} = 0. \tag{7.96}$$

Examinando la Ecuación (7.96), se observa que la ecuación es de la forma

$$1 - \Delta\beta P(s) = 0.$$

Comparando esta ecuación con la Ecuación (7.23) en la Sección 7.3, se observa que en este caso el signo que precede a la ganancia $\Delta\beta$ es negativo. De manera análoga al desarrollo del método del lugar de las raíces de la Sección 7.3, se necesita que el lugar de las raíces satisfaga las ecuaciones

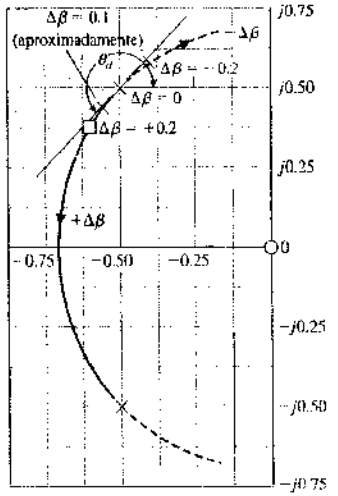


FIGURA 7.25
Lugar de la raíces para el parámetro β.

$$|\Delta\beta P(s)| = 1 \quad \text{y} \quad \underline{/P(s)} = 0^\circ \pm q360^\circ, \tag{7.97}$$

donde $q = 0, 1, 2, \ldots$ El lugar de las raíces sigue a uno de cero grados (Ecuación 7.97) en contraste con el de 180° considerado anteriormente. Sin embargo, las reglas del lugar de las raíces de la Sección 7.3 pueden alterarse para considerar el requisito del ángulo de fase de cero grados, y entonces puede obtenerse el lugar de las raíces como en las secciones anteriores. Por tanto, para obtener el efecto de la reducción de β, se determina el lugar de las raíces de cero grados, en contraste con el de 180°, como se muestra mediante un lugar de las raíces punteado en la Figura 7.25. Por tanto, para encontrar el efecto de un cambio del 20% en el parámetro β, se calculan las nuevas raíces para $\pm\Delta\beta = \pm 0.20$ como se muestra en la Figura 7.25. La sensibilidad de la raíz se calcula fácilmente de forma gráfica; para un cambio positivo en β, es

$$S^{r_1}_{\beta+} = \frac{\Delta r_1}{(\Delta\beta/\beta)} = \frac{0.16\underline{/-131^\circ}}{0.20} = 0.80\underline{/-131^\circ}. \tag{7.98}$$

La sensibilidad de la raíz para un cambio negativo en β es

$$S^{r_1}_{\beta-} = \frac{\Delta r_1}{(\Delta\beta/\beta)} = \frac{0.125\underline{/38^\circ}}{0.20} = 0.625\underline{/+38^\circ}. \tag{7.99}$$

A medida que disminuye el cambio porcentual $(\Delta\beta/\beta)$, las medidas de la sensibilidad, $S^{r_1}_{\beta+}$ y $S^{r_1}_{\beta-}$, tenderán a igualarse en magnitud y a tener una diferencia en ángulo de 180°. Por esto, para cambios pequeños cuando $\Delta\beta/\beta \leq 0.10$, las medidas de la sensibilidad se relacionan según

$$|S^{r_1}_{\beta+}| = |S^{r_1}_{\beta-}| \tag{7.100}$$

y

$$\underline{/S_{\beta+}^{r_1}} = 180^\circ + \underline{/S_{\beta}^{r_1}}. \tag{7.101}$$

Frecuentemente, la medida deseada de la sensibilidad de la raíz corresponde a cambios pequeños en el parámetro. Cuando el cambio relativo en el parámetro es tal que $\Delta\beta/\beta = 0.10$, es satisfactoria una aproximación del lugar de las raíces. El lugar de las raíces para la Ecuación (7.97) cuando $\Delta\beta$ varía, deja al polo en $\Delta\beta = 0$ con un ángulo de salida θ_d. Como θ_d se calcula fácilmente, se puede estimar el incremento en el cambio de la raíz por la aproximación del lugar de las raíces con la línea en θ_d. Esta aproximación se muestra en la Figura 7.25 y es exacta únicamente para cambios relativamente pequeños en $\Delta\beta$. Sin embargo, el uso de esta aproximación evita al analista dibujar todo el diagrama del lugar de las raíces. Por tanto, para la Figura 7.25, puede calcularse la sensibilidad de la raíz para $\Delta\beta/\beta = 0.10$ a lo largo de la línea de salida, y se obtiene

$$S_{\beta+}^{r_1} = \frac{0.74\underline{/-135^\circ}}{0.10} = 0.74\underline{/-135^\circ}. \tag{7.102}$$

La medida de la sensibilidad de la raíz ante una variación de parámetro es útil para comparar la sensibilidad en diversos parámetros del diseño y en diferentes localizaciones de las raíces. Comparando la Ecuación (7.102) para β con la (7.94) para α, se observa (a) que la sensibilidad para β es aproximadamente un 50% más grande en magnitud, y (b) que el ángulo para $S_{\beta+}^{r_1}$ indica que el método de la raíz hacia el eje $j\omega$ es más sensible para los cambios en β. Por tanto, serán más estrictos los requisitos de tolerancia para β que para α. Esta información proporciona al diseñador una medida comparativa de las tolerancias requeridas para cada parámetro. ■

EJEMPLO 7.7. Sensibilidad de las raíces a un parámetro

Un sistema de control con realimentación unitaria tiene una función de transferencia directa

$$G(s) = \frac{20.7(s+3)}{s(s+2)(s+\beta)}, \tag{7.103}$$

donde $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$ y $\beta_0 = 8$. La ecuación característica en función de $\Delta\beta$ es

$$s(s+2)(s+8+\Delta\beta) + 20.7(s+3) = 0$$

o

$$s(s+2)(s+8) + \Delta\beta s(s+2) + 20.7(s+3) = 0. \tag{7.104}$$

Cuando $\Delta\beta = 0$, las raíces son

$$r_1 = -2.36 + j2.48, \qquad r_2 = \hat{r}_1 \quad \text{y} \quad r_3 = -5.27.$$

El lugar de las raíces para $\Delta\beta$ se determina usando la ecuación del lugar de las raíces

$$1 + \frac{\Delta\beta s(s+2)}{(s+r_1)(s+\hat{r}_1)(s+r_3)} = 0. \tag{7.105}$$

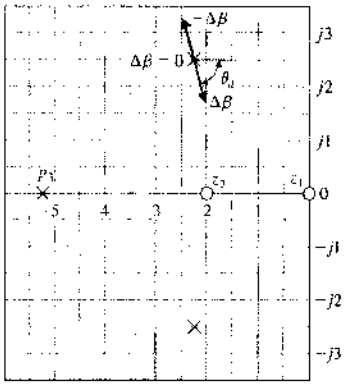


FIGURA 7.26
Diagrama de polos y ceros para el parámetro β.

En la Figura 7.26 se muestran los polos y ceros de la Ecuación (7.105). El ángulo de salida en r_1 se calcula a partir de los ángulos como sigue:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= -(\theta_d + 90^\circ + \theta_{p_3}) + (\theta_{z_1} + \theta_{z_2}) \\ &= -(\theta_d + 90^\circ + 40^\circ) + (133^\circ + 98^\circ), \end{aligned} \tag{7.106}$$

Por tanto, $\theta_d = -80$ y el lugar de las raíces se aproxima cerca de r_1 por la recta en un ángulo de θ_d. Para un cambio de $\Delta r_1 = 0.2\underline{/-80^\circ}$ a lo largo de la línea de salida, se calcula el $+\Delta\beta$ determinando las longitudes del vector desde los polos y ceros. Entonces se tiene

$$+\Delta\beta = \frac{4.8(3.75)(0.2)}{(3.25)(2.3)} = 0.48. \tag{7.107}$$

Por tanto, la sensibilidad en r_1 es

$$S_{\beta}^{r_1} = \frac{\Delta r_1}{\Delta\beta/\beta} = \frac{0.2\underline{/-80^\circ}}{0.48/8} = 3.34\underline{/-80^\circ}, \tag{7.108}$$

lo cual indica que la raíz es bastante sensible a este cambio del 6% en el parámetro β. En comparación, vale la pena determinar la sensibilidad de la raíz, r_1, a un cambio en el cero, $s = -3$. Entonces la ecuación característica es

$$s(s+2)(s+8) + 20.7(s+3+\Delta\gamma) = 0$$

o

$$1 + \frac{20.7\Delta\gamma}{(s+r_1)(s+\hat{r}_1)(s+r_3)} = 0. \tag{7.109}$$

En la Figura 7.27 se muestra el diagrama de polos y ceros para la Ecuación (7.109). El ángulo de salida en la raíz r_1 es de $180^\circ = -(\theta_d + 90^\circ + 40^\circ)$ o

$$\theta_d = +50^\circ. \tag{7.110}$$

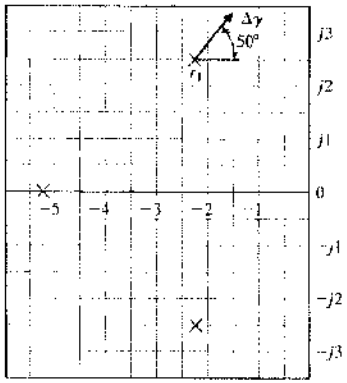


FIGURA 7.27
Diagrama de polos y ceros para el parámetro γ.

Para un cambio de $r_1 = 0.2\angle +50°$, $\Delta\gamma$ es positivo. Obteniendo las longitudes del vector, se observa que

$$|\Delta\gamma| = \frac{5.22(4.18)(0.2)}{20.7} = 0.21. \tag{7.111}$$

Por tanto, la sensibilidad en r_1 para $+\Delta\gamma$ es

$$S_\gamma^{r_1} = \frac{\Delta r_1}{\Delta\gamma/\gamma} = \frac{0.2\angle +50°}{0.21/3} = 2.84\angle +50° \tag{7.112}$$

Así, se observa que la magnitud de la sensibilidad de la raíz para el polo β y el cero γ es aproximadamente igual. Sin embargo, puede considerarse que la sensibilidad del sistema al polo es menor que la correspondiente al cero, pues el ángulo de la sensibilidad, $S_\gamma^{r_1}$, es igual a $+50°$ y la dirección del cambio de la raíz está dirigida hacia el eje $j\omega$.

Calculando la sensibilidad de la raíz de igual forma que en los párrafos anteriores, se obtiene que para el polo $s = -\delta_0 = -2$ la sensibilidad es

$$S_{\delta=}^{r_1} = 2.1\angle +27°. \tag{7.113}$$

Por esto, para el parámetro δ, la magnitud de la sensibilidad es menor que para los otros parámetros pero la dirección del cambio de la raíz es más importante que para β y γ. ■

Para utilizar la medida de la sensibilidad de la raíz en el análisis y diseño de sistemas de control, debe hacerse una serie de cálculos para diversas elecciones de posibles configuraciones de las raíces y los ceros y polos de la función de transferencia de lazo abierto. Por tanto, el uso de la medida de la sensibilidad de la raíz como técnica de diseño está un poco limitado por el número relativamente grande de cálculos requeridos y por la falta de una dirección obvia para el ajuste de los parámetros, con el objeto de proporcionar una sensibilidad minimizada o reducida. Sin embargo, la medida de la sensibilidad de la raíz puede utilizarse como una medida del análisis que permite al diseñador comparar la sensibilidad para varios diseños de sistema basados en un método adecuado de diseño. La medida de la sensibilidad de la raíz es un índice útil de la sensibilidad de un sistema a las variaciones del parámetro expresadas en el plano s. La debilidad de la

medida de la sensibilidad es que descansa en la capacidad de las localizaciones de las raíces para representar el comportamiento del sistema. Como se ha visto en los capítulos anteriores, la localización de las raíces representa de forma bastante adecuada el comportamiento de muchos sistemas; no obstante, debe darse la consideración debida a la localización de los ceros de la función de transferencia de lazo cerrado y al dominio de las raíces pertinentes. La medida de la sensibilidad de la raíz es muy adecuada para la sensibilidad del comportamiento y puede usarse con fiabilidad para el diseño y análisis.

7.7. CONTROLADORES DE TRES TÉRMINOS (PID)

Uno de los controladores más utilizados en control de procesos industriales es el denominado controlador de tres términos o **controlador PID**. Este controlador tiene una función de transferencia

$$\boxed{G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s.} \tag{7.114}$$

El controlador proporciona un término proporcional, un término integral y un término derivativo [4, 10]. La ecuación para la salida en el dominio del tiempo es

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int e(t)\,dt + K_D \frac{de(t)}{dt}. \tag{7.115}$$

El controlador de tres modos se denomina también controlador PID porque contiene un término proporcional, uno integral y otro derivativo. La función de transferencia del término derivativo es realmente

$$G_d(s) = \frac{K_D s}{\tau_d s + 1}, \tag{7.116}$$

pero τ_d es normalmente mucho menor que las constantes de tiempo del propio proceso, por lo que puede desestimarse.

Si se fija $K_D = 0$, se tiene el **controlador proporcional + integral (PI)**

$$\boxed{G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s}.} \tag{7.117}$$

Cuando $K_I = 0$, se tiene

$$\boxed{G_c(s) = K_p + K_D s,}$$

el cual se denomina **controlador proporcional + derivativo (PD)**.

Muchos procesos industriales se controlan utilizando controladores proporcionales-integrales-derivativos (PID). La popularidad de los controladores PID puede atribuirse en parte a su buen comportamiento en un amplio intervalo de condiciones de operación y en parte a su sencillez funcional, lo cual permite a los ingenieros operar con ellos de una manera sencilla y directa. Para implementar este controlador se deben determinar tres parámetros para un proceso dado: la ganancia proporcional, la ganancia integral y la ganancia derivativa [10].

El controlador PID también puede ser visto como una cascada de los controladores PI y PD. Considérese el controlador PI

$$G_{PI}(s) = \hat{K}_P + \frac{\hat{K}_I}{s}$$

y el controlador PD

$$G_{PD}(s) = \bar{K}_P + \bar{K}_D s.$$

donde $\hat{K}_P$ y $\hat{K}_I$ son las ganancias del controlador PI y $\bar{K}_P$ y $\bar{K}_D$ son las ganancias del controlador PD. La cascada de los dos controladores (es decir, situándolos en serie) produce

$$\begin{aligned} G_c(s) &= G_{PI}(s)G_{PD}(s) \\ &= \left(\hat{K}_P + \frac{\hat{K}_I}{s}\right)(\bar{K}_P + \bar{K}_D s) \\ &= (\bar{K}_P\hat{K}_P + \hat{K}_I\bar{K}_D) + \hat{K}_P\bar{K}_I s + \frac{\hat{K}_I\bar{K}_P}{s} \\ &= K_P + K_D s + \frac{K_I}{s}, \end{aligned}$$

donde se tienen las siguientes relaciones entre las ganancias de los controladores PI y PD y las ganancias del controlador PID:

$$\begin{aligned} K_P &= \bar{K}_P\hat{K}_P + \hat{K}_I\bar{K}_D \\ K_D &= \hat{K}_P\bar{K}_D \\ K_I &= \hat{K}_I\bar{K}_P. \end{aligned}$$

Considérese el controlador PID

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \\ &= \frac{K_D(s^2 + as + b)}{s} = \frac{K_D(s + z_1)(s + z_2)}{s}, \end{aligned} \tag{7.118}$$

donde $a = K_P/K_D$ y $b = K_I/K_D$. Por tanto, un controlador PID introduce una función de transferencia con un polo en el origen y dos ceros que pueden estar situados en cualquier parte del lado izquierdo del plano s.

Recuérdese que un lugar de las raíces comienza en los polos y termina en los ceros. Si se tiene un sistema, como el que se muestra en la Figura 7.28, con

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 3)},$$

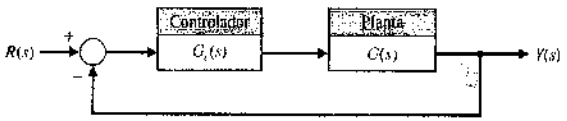


FIGURA 7.28
Sistema en lazo cerrado con un controlador.

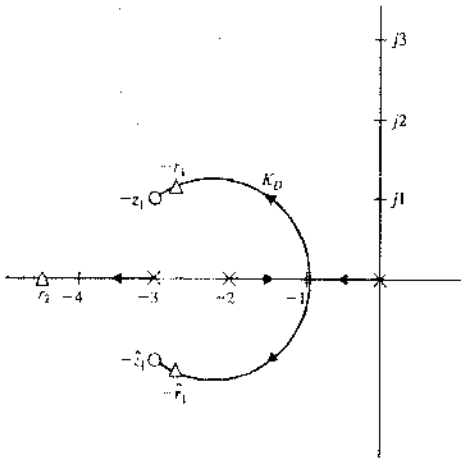


FIGURA 7.29
Lugar de las raíces para una planta con un controlador PID con ceros complejos.

y se utiliza un controlador PID con ceros complejos, z_1 y z_2, donde $z_1 = -3 + j1$ y $z_2 = \hat{z}_1$, se puede dibujar el lugar de las raíces como se muestra en la Figura 7.29. Cuando se incrementa la ganancia del controlador KD, las raíces complejas se aproximan a los ceros. La función de transferencia de lazo cerrado es

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{G(s)G_c(s)}{1 + G(s)G_c(s)} \\ &= \frac{K_D(s + z_1)(s + \hat{z}_1)}{(s + r_2)(s + r_1)(s + \hat{r}_1)}. \end{aligned}$$

La respuesta de este sistema será atractiva. El porcentaje de sobreelongación para un escalón será menor que el 2% y el error en estado estacionario para una entrada de escalón será cero. El tiempo de asentamiento será aproximadamente de 1 segundo. Si se desea un tiempo de asentamiento menor, se selecciona z_1 y z_2 para que se encuentren más lejos a la izquierda del plano s y se fija K_D para que conduzca a las raíces cerca de los ceros complejos.

Posteriormente, en este capítulo, se utilizará el controlador PD para controlar el problema de diseño secuencial de la unidad de disco (*véase* la Sección 7.11).

7.8. EJEMPLO DE DISEÑO: SISTEMA DE CONTROL DE UN MANIPULADOR LÁSER

Los láseres pueden utilizarse para taladrar el agujero para la inserción apropiada de una articulación de cadera artificial. La utilización del láser en cirugía requiere una alta precisión en la respuesta de posición y velocidad. Se considera el sistema que se muestra en

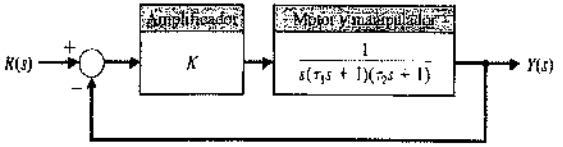


FIGURA 7.30
Sistema de control de un manipulador láser.

la Figura 7.30, el cual utiliza un motor manipulador de cc para el láser. La ganancia K del amplificador se debe ajustar para que el error en estado estacionario para una rampa unitaria, $r(t) = At$ (donde $A = 1$ mm/s), sea menor o igual que 0.1 mm, a la vez que se mantiene una respuesta estable.

Para obtener el error en estado estacionario requerido y una buena respuesta, se selecciona un motor con una constante de tiempo de campo $\tau_1 = 0.1s$ y una constante de tiempo de motor + carga $\tau_2 = 0.2s$. En este caso se tiene

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + K}$$
$$= \frac{K}{0.02s^3 + 0.3s^2 + s + K} = \frac{50K}{s^3 + 15s^2 + 50s + 50K}. \quad (7.119)$$

El error en estado estacionario para una rampa, $R(s) = A/s^2$, de la Ecuación (5.29), es

$$e_{ss} = \frac{A}{K_a} = \frac{A}{K}.$$

Como se desea $e_{ss} = 0.1$ mm (o menor) y $A = 1$ mm, se requiere $K = 10$ (o mayor).

Para asegurar un sistema estable, se obtiene la ecuación característica de la Ecuación (7.119) como

$$s^3 + 15s^2 + 50s + 50K = 0.$$

Formando el array de Routh, se tiene

s^3	1	50
s^2	15	$50K$
s^1	b_1	0
s^0	$50K$	

donde

$$b_1 = \frac{750 - 50K}{15}.$$

Por tanto, el sistema es estable para

$$0 \leq K \leq 15.$$

La ecuación característica se puede escribir como

$$1 + K\frac{50}{s^3 + 15s^2 + 50s} = 0.$$

La Figura 7.31 muestra el lugar de las raíces para $K > 0$. Utilizando $K = 10$ se obtiene como resultado un sistema estable que también cumple la especificación de error de seguimiento en estado estacionario. Las raíces en $K = 10$ son $r_2 = -13.98$, $r_1 = -0.51 + j5.96$ y $\bar{r}_1$. El ζ de las raíces complejas es 0.085 y $\zeta\omega_n = 0.51$. De este modo, suponiendo que las raíces complejas son dominantes, se espera (utilizando las Ecuaciones 5.16 y 5.13) para una entrada de escalón tener una sobreelongación del 76% y un tiempo de asentamiento (dentro del 2% del valor final) de

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.51} = 7.8s.$$

Dibujando la respuesta del sistema real, se observa que la sobreelongación es del 70% y el tiempo de asentamiento es de 7.5 segundos. Por tanto, las raíces complejas son esencialmente dominantes. La respuesta del sistema para una entrada de escalón es muy oscilatoria y no se puede tolerar para la cirugía con láser. La señal de orden debe estar limitada a una señal de rampa de baja velocidad. La Figura 7.32 muestra la respuesta para una señal de rampa.

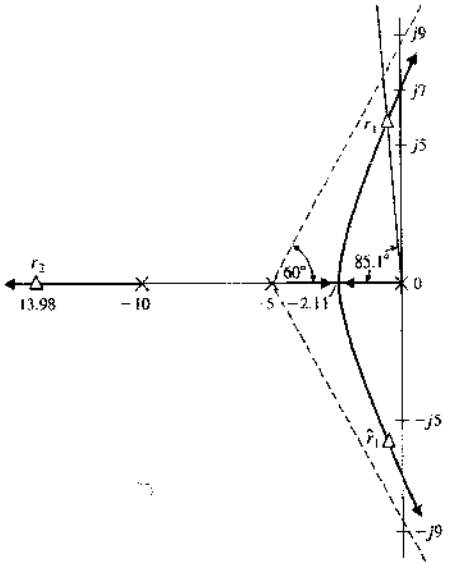


FIGURA 7.31
Lugar de las raíces para un sistema de control láser.

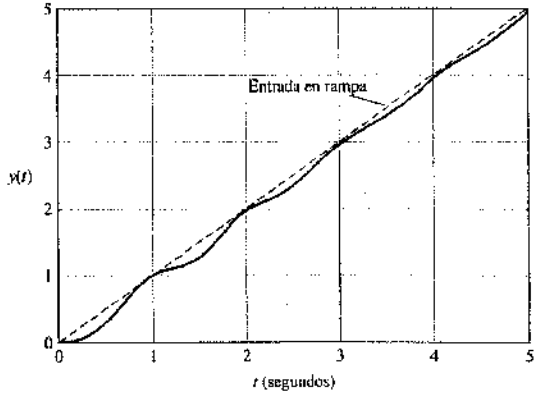


FIGURA 7.32
Respuesta a una entrada en rampa para un sistema de control láser.

7.9. EL DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL DE UN ROBOT

El concepto de reproducción de un robot es relativamente fácil de comprender. La idea central consiste en que los robots se autorreproducen ellos mismos y se desarrolla una fábrica que produce automáticamente robots. La Figura 7.33 muestra un ejemplo de una reproducción de un robot con facilidad. Para lograr un control rápido y preciso de un robot es importante mantener el brazo del robot rígido y ligero [6].

Las especificaciones para controlar el movimiento de un brazo flexible y ligero son: (1) un tiempo de asentamiento dentro del 2% del valor final de menos de 2 segundos, (2) un porcentaje de sobreelongación menor del 10% para una entrada de escalón, y (3) un error en estado estacionario de cero para una entrada escalón.

La Figura 7.34 muestra el diagrama de bloques del sistema propuesto con un controlador. La configuración propone la utilización de la realimentación de la velocidad y el uso de un controlador $G_c(s)$. Como el robot es bastante ligero y flexible, la función de transferencia del brazo es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \left(\frac{1}{s^2}\right)G(s),$$

y se llega a

$$G(s) = \frac{(s^2 + 4s + 10\,004)(s^2 + 12s + 90\,036)}{(s + 10)(s^2 + 2s + 2501)(s^2 + 6s + 22\,509)}. \tag{7.120}$$

Por tanto, los ceros complejos se encuentran localizados en

$$s = -2 \pm j100 \quad \text{y} \quad s = -6 \pm j300.$$

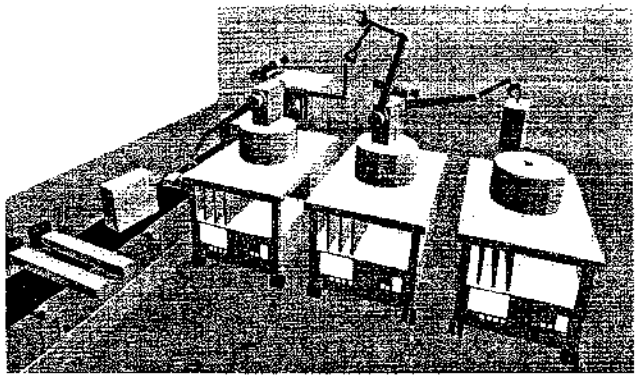


FIGURA 7.33
Reproducción sencilla de un robot.

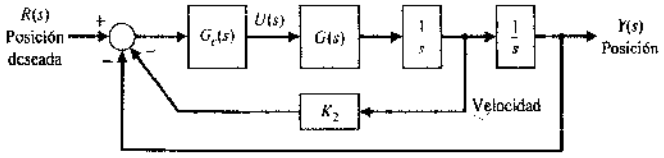


FIGURA 7.34
Configuración propuesta para el control de un brazo de robot ligero.

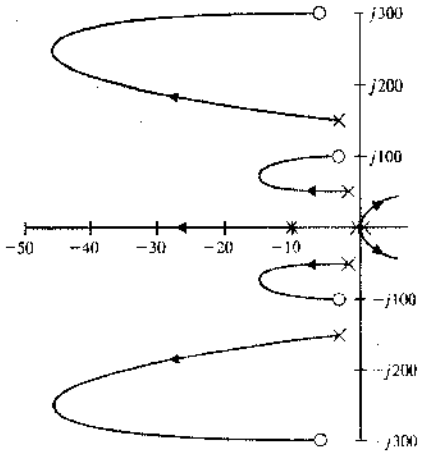


FIGURA 7.35
Lugar de las raíces del sistema si $K_2 = 0$, K_1 varía desde $K_1 = 0$ hasta $K_1 = \infty$, y $G_c(s) = K_1$.

Los polos complejos están localizados en

$$s = -1 \pm j50 \quad \text{y} \quad s = -3 \pm j150.$$

La Figura 7.35 muestra un dibujo del lugar de las raíces cuando $K_2 = 0$ y el controlador es una ganancia ajustable $G_c(s) = K_1$. El sistema es inestable debido a que dos de las raíces de la ecuación característica aparecen en el lado derecho del plano s para $K_1 > 0$.

Está claro que se necesita introducir la utilización de la realimentación de velocidad fijando K_2 a una magnitud positiva. Además se tiene $H(s) = (1 + K_2 s)$; por tanto, la función de transferencia de lazo es

$$\left(\frac{1}{s^2}\right)G(s)H(s) = \frac{K_1K_2\left(s + \dfrac{1}{K_2}\right)(s^2 + 4s + 10\,004)(s^2 + 12s + 90\,036)}{s^2(s + 10)(s^2 + 2s + 2501)(s^2 + 6s + 22\,509)},$$

donde K_1 es la ganancia de $G_c(s)$. Ahora se tienen disponibles dos parámetros, K_1 y K_2, que se pueden ajustar. Se selecciona $5 < K_2 < 10$ para situar el cero ajustable cerca del origen.

Cuando $K_2 = 5$ y K_1 se varía, se obtiene el lugar de las raíces dibujado en la Figura 7.36. Cuando $K_1 = 0.8$ y $K_2 = 5$, se obtiene un respuesta a escalón con un porcentaje de sobreelongación del 12% y un tiempo de asentamiento de 1.8 segundos. Ésta es la respuesta alcanzable óptima. Si se intenta con $K_2 = 7$ o $K_2 = 4$, la sobreelongación será mayor que la deseada. Por tanto, se ha alcanzado el mejor comportamiento con este sistema. Si se desea continuar el proceso de diseño, se podría utilizar un controlador $G_c(s)$ con un polo y un cero además de mantener la realimentación de la velocidad con $K_2 = 5$.

Una posible selección de controlador es

$$G_c(s) = \frac{K_1(s + z)}{(s + p)}. \tag{7.121}$$

Si se selecciona $z = 1$ y $p = 5$, entonces, cuando $K_1 = 5$, se obtiene una respuesta a escalón con una sobreelongación del 8% y un tiempo de asentamiento de 1.6 segundos.

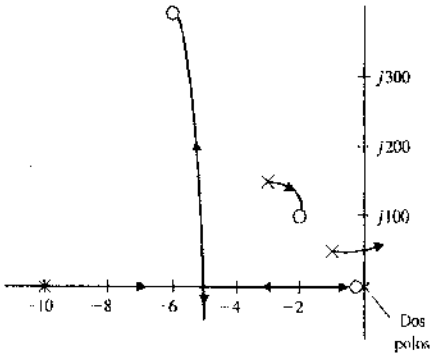


FIGURA 7.36
Lugar de las raíces para el controlador del robot con un cero insertado en $s = -0.2$ con $G_c(s) = K_1$.

7.10. EL LUGAR DE LAS RAÍCES UTILIZANDO MATLAB

Utilizando ordenadamente el procedimiento resumido en la Tabla 7.2 se puede obtener un dibujo aproximado del lugar de las raíces. Otra opción consiste en utilizar MATLAB para obtener un gráfico preciso del lugar de las raíces. Sin embargo, no se debería estar tentado de depender exclusivamente de MATLAB para obtener las gráficas del lugar de las raíces abandonando los pasos manuales para el desarrollo de un lugar de las raíces aproximado. Los conceptos fundamentales detrás del método del lugar de las raíces están dentro de los pasos manuales y es esencial entender sus aplicaciones completamente.

La sección comienza con un análisis sobre cómo obtener un dibujo del lugar de las raíces con MATLAB. A continuación se analizan las relaciones entre el desarrollo en fracciones simples, los polos dominantes y la respuesta del sistema de lazo cerrado. La sensibilidad de las raíces se aborda al final de la sección.

Las funciones incluidas en esta sección son rlocus, rlocfind y residue. Las funciones rlocus y rlocfind se utilizan para obtener las gráficas del lugar de las raíces, y la función residue para el desarrollo en fracciones simples de funciones racionales.

Obtención de un gráfico del lugar de las raíces. Considérese el sistema de control de lazo cerrado de la Figura 7.10. La función de transferencia de lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+3) + K(s+1)}.$$

La ecuación característica se puede escribir como

$$1 + K\frac{(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0. \qquad (7.122)$$

El formato de la ecuación característica de la Ecuación (7.122) es necesario para utilizar la función rlocus a fin de generar las gráficas del lugar de las raíces. El formato general de la ecuación característica necesario para aplicar la función rlocus es

$$1 + KG(s) = 1 + K\frac{p(s)}{q(s)} = 0, \qquad (7.123)$$

donde K es el parámetro de interés para ser variado desde $0 < K < \infty$. La Figura 7.37 muestra la función rlocus, donde se define el objeto de la función de transferencia sys = $G(s)$. La Figura 7.38 muestra los pasos para obtener la gráfica del lugar de las raíces asociada a la Ecuación (7.122) junto con el gráfico del lugar de las raíces. Si se llama a la función rlocus sin argumentos en el lado izquierdo se obtiene como resultado una generación automática del gráfico del lugar de las raíces. Cuando se llama con argumentos en el lado izquierdo, la función rlocus devuelve una matriz de las localizaciones de las raíces y el vector de ganancias asociado.

Los pasos para obtener una gráfica del lugar de las raíces con MATLAB son los siguientes:

1. Obtener la ecuación característica con el formato dado en la Ecuación (7.123), donde K es el parámetro de interés.
2. Utilizar la función rlocus para generar los gráficos.

Refiriéndose a la Figura 7.38, se puede ver que, cuando K aumenta, dos ramificaciones del lugar de las raíces salen desde el eje real. Esto significa que, para algunos valores de K, la ecuación característica del sistema de lazo cerrado tendrá dos raíces complejas. Supóngase que se desea encontrar el valor de K que corresponde al par de raíces complejas. Se puede utilizar la función rlocfind para hacer esto, pero únicamente des-

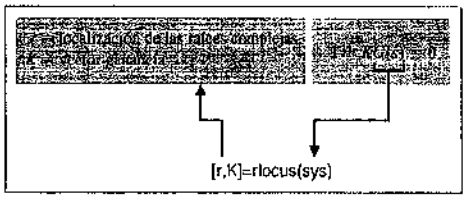


FIGURA 7.37
Función rlocus.

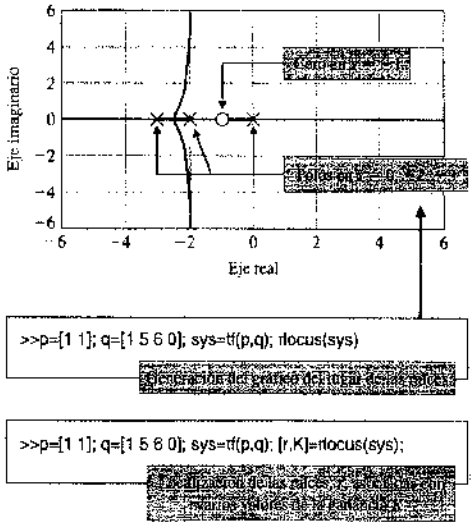
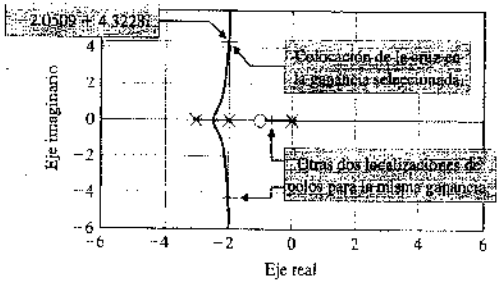


FIGURA 7.38
Lugar de las raíces para la ecuación característica, Ecuación (7.122).



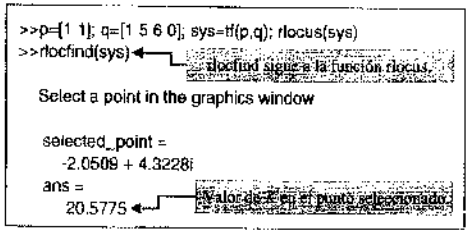

>>p=[1 1]; q=[1 5 6 0]; sys=tf(p,q); rlocus(sys)
>>rlocfind(sys)
rlocfind sigue a la función rlocus.
Select a point in the graphics window
selected_point =
-2.0509 + 4.3228i
ans =
20.5775
Valor de K en el punto seleccionado.

FIGURA 7.39
Utilización de la función **rlocfind**.

pués de que se haya obtenido el lugar de las raíces con la función rlocus. Al ejecutar la función rlocfind se obtendrá como resultado la aparición de un marcador en forma de cruz sobre la gráfica del lugar de las raíces. Se mueve el marcador en forma de cruz a la posición de interés en el lugar de las raíces y se pulsa la tecla enter. El valor del parámetro K y el valor del punto seleccionado se mostrarán en el visualizador de órdenes. La Figura 7.39 ilustra el uso de la función rlocfind.

Continuando con el ejemplo del lugar de las raíces de tercer orden, se observa que cuando $K = 20.5775$ la función de transferencia de lazo cerrado tiene tres polos y dos ceros en

$$\text{polos: } s = \begin{pmatrix} -2.0505 + j4.3227 \\ -2.0505 - j4.3227 \\ 0.8989 \end{pmatrix}; \qquad \text{ceros: } s = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Considerando únicamente la localización de los polos de lazo cerrado, se debería esperar que el polo real en $s = -0.8989$ fuese el polo dominante. Para verificar esto, se puede estudiar la respuesta del sistema de lazo cerrado para una entrada de escalón, $R(s) = 1/s$. Para una entrada de escalón, se tiene

$$Y(s) = \frac{20.5775(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+3) + 20.5775(s+1)} \cdot \frac{1}{s}. \tag{7.124}$$

Generalmente, el primer paso en el cálculo de $y(t)$ es expandir la Ecuación (7.124) en desarrollo en fracciones simples. La función residue se puede utilizar para expandir la Ecuación (7.124) como muestra la Figura 7.40. La Figura 7.41 describe la función residue.

El desarrollo en fracciones simples de la Ecuación (7.124) es

$$Y(s) = \frac{-1.3786 + j1.7010}{s + 2.0505 + j4.3228} + \frac{-1.3786 - j1.7010}{s + 2.0505 - j4.3228} + \frac{-0.2429}{s + 0.8989} + \frac{3}{s}.$$

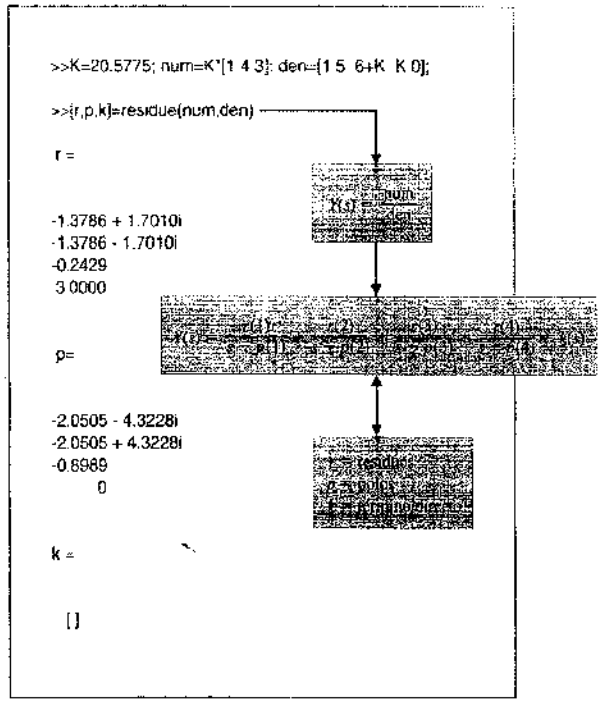


FIGURA 7.40
Desarrollo en fracciones simples de la Ecuación (7.124).

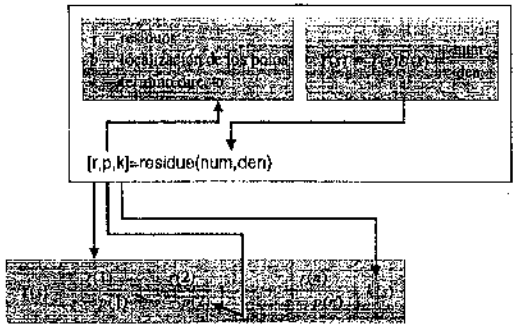


FIGURA 7.41
Función **residue**.

Comparando los residuos, se observa que el coeficiente del término correspondiente al polo en $s = -0.8989$ es considerablemente más pequeño que el coeficiente de los términos correspondientes a los polos complejos conjugados en $s = -2.0505 \pm j4.3227$. De esto, se espera que la influencia del polo en $s = -0.8989$ sobre la respuesta de salida $y(t)$ no sea dominante. El tiempo de asentamiento (dentro del 2% del valor final) se predice entonces considerando los polos complejos conjugados. Los polos en

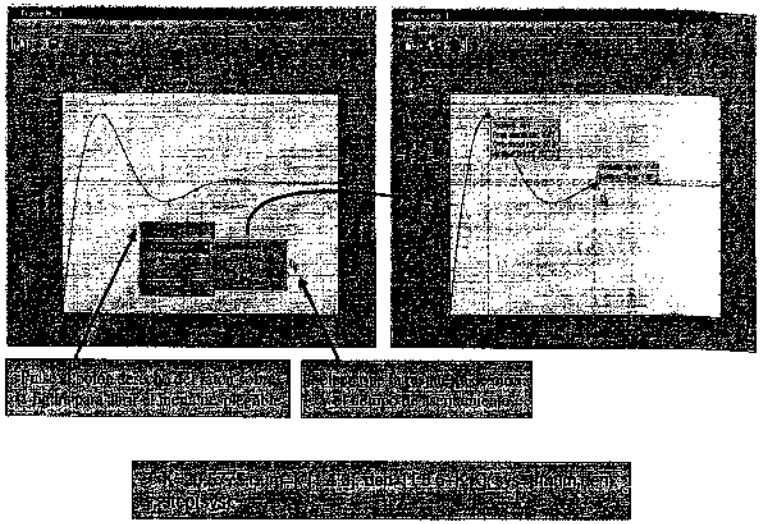


FIGURA 7.42. Respuesta a un escalón para el sistema de lazo cerrado de la Figura 7.10 con $K = 20.5775$.

$s = -2.0505 \pm j4.3227$ corresponden a un amortiguamiento de $\zeta = 0.4286$ y a una frecuencia natural de $\omega_n = 4.7844$. De este modo, el tiempo de asentamiento previsible es

$$T_s \simeq \frac{4}{\zeta\omega_n} = 1.95 \text{ segundos.}$$

Utilizando la función step, como muestra la Figura 7.42, se observa que $T_s = 1.6$ segundos. Por tanto, la aproximación del tiempo de asentamiento de $T_s \simeq 1.95$ es una aproximación bastante buena. El porcentaje de sobreelongación se puede predecir utilizando la Figura 5.13 debido a que el cero de $T(s)$ en $s = -3$ afectará a la respuesta del sistema. Utilizando la Figura 5.12, la sobreelongación previsible es del 60%. Como se puede observar en la Figura 7.42, la sobreelongación real es del 50%.

Cuando se utiliza la función step se puede pulsar sobre la figura el botón derecho del ratón para acceder al menú desplegable, que permite determinar el tiempo de asentamiento de la respuesta a un escalón y la respuesta pico tal como se ilustra en la Figura 7.42. Sobre el menú desplegable selecciónese «Characteristics» y «Settling Time». Aparecerá un punto sobre la figura en el lugar del asentamiento. Sitúese el cursor sobre el punto para determinar el tiempo de asentamiento.

En este ejemplo, se ha ilustrado el papel de los ceros del sistema sobre la respuesta transitoria. La proximidad del cero en $s = -1$ al polo en $s = -0.8989$ reduce el efecto de ese polo sobre la respuesta transitoria. Los principales responsables en la respuesta transitoria son los polos complejos conjugados en $s = -2.0505 \pm j4.3228$ y el cero en $s = -3$.

Hay un punto final pendiente sobre la función residue: Se puede convertir el desarrollo en fracciones simples otra vez a la forma polinomial num/den, dados los residuos (r), la situación de los polos (p) y los términos directos (k) con la orden que se muestra en la Figura 7.43.

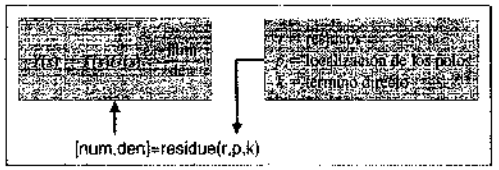


FIGURA 7.43 Convertir un desarrollo en fracciones parciales a una función racional.

Sensibilidad y lugar de las raíces. Las raíces de la ecuación característica juegan un papel importante en la definición de la respuesta transitoria del sistema de lazo cerrado. El efecto de las variaciones del parámetro sobre las raíces de la ecuación característica es una medida útil de sensibilidad. La sensibilidad de las raíces se puede definir como

$$\frac{\partial r_i}{\partial K/K}. \tag{7.125}$$

Se puede utilizar la Ecuación (7.125) para estudiar la sensibilidad de las raíces de la ecuación característica a variaciones en el parámetro K. Si se cambia K por una cantidad pequeña finita ΔK, y se evalúa la raíz modificada $r_i + \Delta r_i$, se sigue que

$$S_K^{r_i} = \frac{\Delta r_i}{\Delta K/K}. \tag{7.126}$$

La cantidad $S_K^{r_i}$ es un número complejo. Volviendo al ejemplo de tercer orden de la Figura 7.10 (Ecuación 7.122), si se cambia K por un factor del 5%, se observa que el polo complejo conjugado dominante en $s = -2.0505 + j4.3228$ cambia por

$$\Delta r_i = -0.0025 - j0.1168$$

cuando K varía desde $K = 20.5775$ hasta $K = 21.6064$. De la Ecuación (7.126) se sigue que

$$S_K^{r_i} = \frac{-0.0025 - j0.1168}{1.0289/20.5775} = -0.0494 - j2.3355.$$

La sensibilidad $S_K^{r_i}$ se puede escribir también de la forma

$$S_K^{r_i} = 2.34 \underline{/268.79^\circ}$$

La magnitud y dirección de $S_K^{r_i}$ proporciona una medida de la sensibilidad de las raíces. La Figura 7.44 muestra el programa utilizado para llevar a cabo estos cálculos de sensibilidad.

La medida de la sensibilidad de las raíces puede ser útil para comparar la sensibilidad para varios parámetros del sistema en diferentes localizaciones de la raíz.

```
% Cálculo de la sensibilidad del sistema para la
% variación de un parámetro
%
K=20.5775, den=[1 5 6+K K]; r1=roots(den);
%
dK=1.0289;          % Cambio en K
%
Km=K+dK; denm=[1 5 6+Km Km]; r2=roots(denm);
dr=r1-r2;
%
S=dr/(dK/K);        % Cálculo de la sensibilidad
```

FIGURA 7.44 Cálculo de la sensibilidad para el lugar de las raíces para un cambio del 5% en $K = 20.5775$.

7.11. EJEMPLO DE DISEÑO SECUENCIAL: SISTEMA DE LECTURA DE UNA UNIDAD DE DISCO

En el Capítulo 6 se introdujo una nueva configuración para el sistema de control utilizando la realimentación de la velocidad (*véase* la Sección 6.7). En este capítulo se utilizará el controlador PID para obtener una respuesta deseada. Nuevamente se está en el paso 4 del proceso de diseño de la Figura 5.50. Se continuará con el modelo (paso 5) y después se seleccionará un controlador (paso 6). Finalmente, se optimizarán los parámetros y se analizará el comportamiento (paso 7). En este capítulo se utilizará el método del lugar de las raíces en la selección de los parámetros del controlador.

Se utiliza el lugar de las raíces para seleccionar las ganancias del controlador. El controlador PID que se introduce en este capítulo es

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s. \tag{7.127}$$

Debido a que el modelo de la planta, $G_1(s)$, ya tiene una integración, se fija $K_I = 0$. Por tanto, se tiene el controlador PD

$$G_c(s) = K_P + K_D s, \tag{7.128}$$

y el objetivo es seleccionar K_P y K_D para cumplir las especificaciones. La Figura 7.45 muestra el sistema. La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G(s)G_1(s)G_2(s)}{1 + G_c(s)G_1(s)G_2(s)H(s)},$$

donde $H(s) = 1$.

Para obtener el lugar de las raíces como una función de un parámetro, se escribe $G_c(s)G_1(s)G_2(s)\ H(s)$ como

$$G_cG_1G_2H(s) = \frac{5000(K_P + K_D s)}{s(s + 20)(s + 1000)} = \frac{5000K_D(s + z)}{s(s + 20)(s + 1000)},$$

donde $z = K_P/K_D$. Se usa K_P para seleccionar la situación del cero z y luego se dibuja el lugar en función de K_D. Basándose en el estudio desarrollado en la Sección 6.7, se selecciona $z = 1$ tal que

$$G_cG_1G_2H(s) = \frac{5000K_D(s + 1)}{s(s + 20)(s + 1000)}. \tag{7.129}$$

El número de polos menos el número de ceros es 2, y se esperan asíntotas en $\phi_A = \pm 90°$ con un centroide

$$\sigma_A = \frac{-1020 + 1}{2} = -509.5.$$

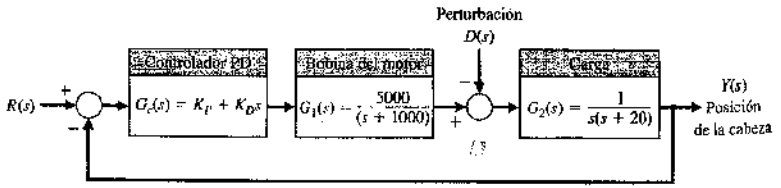


FIGURA 7.45
Sistema de control de una unidad de disco con un controlador PD.

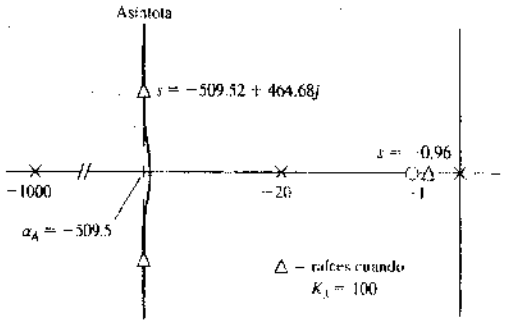


FIGURA 7.46
Dibujo del lugar de las raíces.

Tabla 7.6 Especificaciones del sistema de control de una unidad de disco y comportamiento del diseño real

Medida del comportamiento	Valor deseado	Respuesta real
Porcentaje de sobreelongación	Menor que 5%	0%
Tiempo de asentamiento	Menor que 250 ms	20 ms
Respuesta máxima a una perturbación unitaria	Menor que 5×10^{-3}	2×10^{-3}

como se refleja en la Figura 7.46. En ella se muestra cómo se puede dibujar rápidamente el lugar de las raíces. Se utiliza MATLAB para determinar los valores de las raíces para varios valores de K_D. Cuando $K_D = 91.3$, se obtienen las raíces que se muestran en la citada figura. En este caso, al obtener la respuesta del sistema utilizando MATLAB, se alcanzan las medidas de la respuesta real, recogidas en la Tabla 7.6. Tal como se diseñó, el sistema cumple todas las especificaciones. El sistema tiene un tiempo de asentamiento de 20 ms donde «prácticamente» alcanza el valor final. En realidad, el sistema después de alcanzar rápidamente el 97% del valor final continúa muy lentamente hacia el valor final.

7.12. RESUMEN

La estabilidad relativa y el comportamiento de la respuesta transitoria de un sistema de control de lazo cerrado están directamente relacionados con la localización de las raíces del lazo cerrado de la ecuación característica. Por tanto, se ha estudiado el movimiento de las raíces características en el plano s a medida que se varían los parámetros del sistema utilizando el método del lugar de las raíces. Este método, que es una técnica gráfica, puede usarse para obtener un dibujo aproximado con el objeto de analizar el diseño inicial de un sistema y determinar las alteraciones adecuadas de la estructura del sistema y los valores de sus parámetros. Generalmente se emplea un computador para calcular diversas raíces en puntos importantes del lugar de las raíces. En la Tabla 7.7 se muestra un resumen de 15 diagramas típicos de lugares de las raíces.

Además, este método se hizo extensivo al diseño de varios parámetros para un sistema de control de lazo cerrado. Después se estudió la sensibilidad de las raíces características para variaciones no deseadas de los parámetros, definiendo una medida de la sensibilidad de la raíz. Es evidente que el método estudiado es poderoso y útil para el análisis y diseño de sistemas de control modernos y continuará siendo uno de los procedimientos más importantes de la ingeniería de control.

Tabla 7-7 Lugares de las raíces para funciones de transferencias típicas

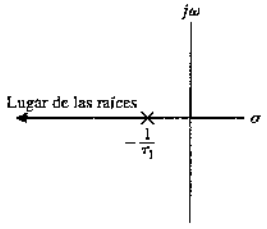
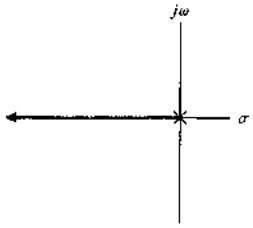
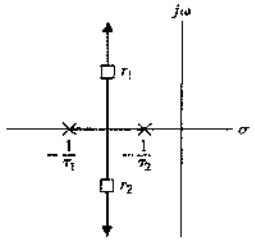
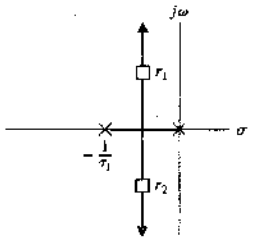
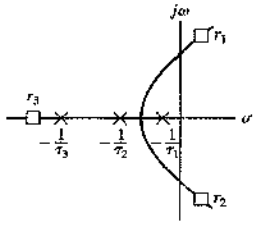
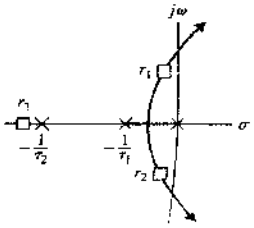
$G(s)$	Lugar de las raíces	$G(s)$	Lugar de las raíces
1. $\dfrac{K}{s\tau_1 + 1}$		4. $\dfrac{K}{s}$	
2. $\dfrac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$		5. $\dfrac{K}{s(s\tau_1 + 1)}$	
3. $\dfrac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)}$		6. $\dfrac{K}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$	

Tabla 7-7 (Continuación)

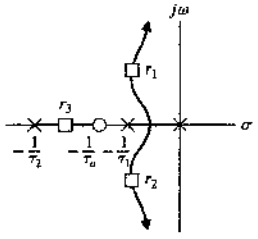
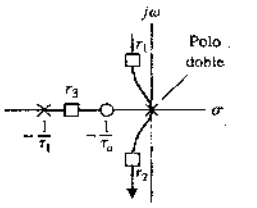
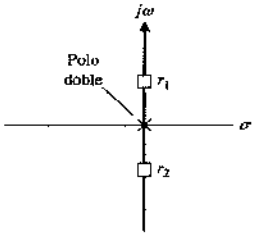
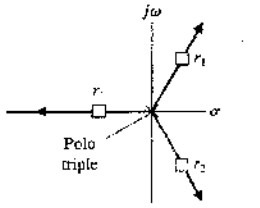
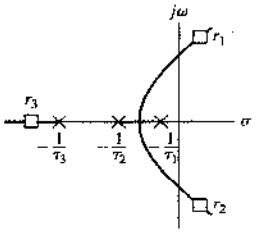
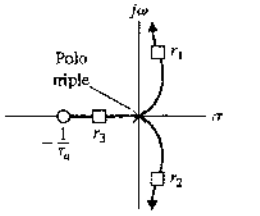
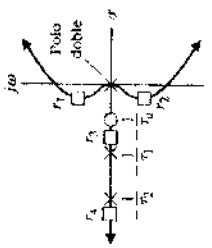
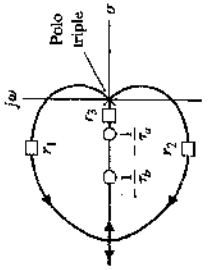
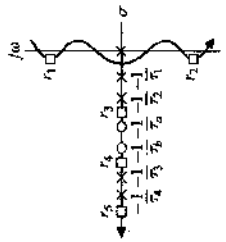
$G(s)$	Lugar de las raíces	$G(s)$	Lugar de las raíces
7. $\dfrac{K(s\tau_a + 1)}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$		10. $\dfrac{K(s\tau_a + 1)}{s^2(s\tau_1 + 1)}$ $\tau_a > \tau_1$	
8. $\dfrac{K}{s^2}$		11. $\dfrac{K}{s^3}$	
9. $\dfrac{K}{s^2(s\tau_1 + 1)}$		12. $\dfrac{K(s\tau_a + 1)}{s^3}$	

Tabla 7.7 (Continuación)

	$G(s)$	Lugar de las raíces
15.	$\dfrac{K(s\tau_a - 1)}{s^2(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$	
13.	$\dfrac{K(s\tau_a + 1)(s\tau_b + 1)}{s^3}$	
14.	$\dfrac{K(s\tau_a + 1)(s\tau_b + 1)}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)(s\tau_4 + 1)}$	

EJERCICIOS

E7.1. Considérese un dispositivo consistente en una pelota que rueda sobre el borde interior de un aro [11]. Este modelo es semejante al problema del combustible líquido que se agita en un cohete. Como se muestra en la Figura E7.1, el aro rota libremente sobre el eje horizontal. La posición angular del aro se puede controlar por medio del par de torsión T que se le aplica, proveniente de un motor acoplado al eje que mueve el aro. Si se emplea una realimentación negativa, la ecuación característica del sistema es

$$1 + \frac{Ks(s+4)}{s^2 + 2s + 2} = 0$$

(a) Dibújese el lugar de las raíces. (b) Calcúlese la ganancia cuando ambas raíces son iguales. (c) Calcúlense dichas raíces iguales. (d) Calcúlese el tiempo de asentamiento del sistema cuando las raíces son iguales.

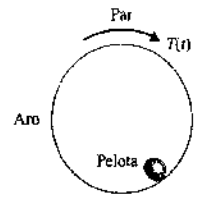


FIGURA E7.1. Aro girado mediante un motor.

E7.2. Una grabadora de cintas tiene un sistema de control de velocidad tal que $H(s) = 1$ con una realimentación negativa y

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+4s+5)}$$

(a) Dibújese un lugar de las raíces para K y demuéstrese que las raíces dominantes son $s = -0.35 \pm j0.80$ cuando $K = 6.5$. (b) Para las raíces dominantes del apartado (a), calcúlese el tiempo de asentamiento y la sobreelongación para una entrada de escalón.

E7.3. El sistema de control para un probador de suspensiones de un automóvil tiene una realimentación negativa unitaria y un proceso [12]

$$G(s) = \frac{K(s^2+4s+8)}{s^2(s+4)}$$

Se desea que las raíces dominantes tengan una ζ igual a 0.5. Empleando el lugar de las raíces, demuéstrese que se requiere una $K = 7.35$ y que las raíces dominantes son $s = -1.3 + j2.2$.

E7.4. Considérese un sistema con realimentación unitaria con

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 + 4s + 5}$$

(a) Calcúlese el ángulo de salida del lugar de las raíces a partir de los polos complejos. (b) Calcúlese el punto de entrada para el lugar de las raíces cuando entra en el eje real.

Respuestas: 225°, −2.4

E7.5. Considérese un sistema con realimentación con una función de transferencia de lazo

$$GH(s) = \frac{s^2 + 2s + 10}{s^4 + 38s^3 + 515s^2 + 2950s + 6000}$$

(a) Calcúlense los puntos de salida sobre el eje real. (b) Calcúlese el centroide asintótico. (c) Calcúlense los valores de K en los puntos de salida.

E7.6. En la Figura E7.6 se muestra una versión de una estación espacial [30]. Para esto, resulta crítico mantener dicha estación en una orientación adecuada hacia el Sol y la Tierra, para generar energía y comunicaciones. El regulador de la orientación se puede representar mediante un sistema con realimentación unitaria con un actuador y un controlador, tal que:

$$G(s) = \frac{25K}{s(s^2 + 24s + 100)}$$

Ilústrese el lugar de las raíces del sistema a medida que K aumenta. Calcúlese el valor de K que dé como resultado un sistema inestable.

Respuesta: $K = 96$

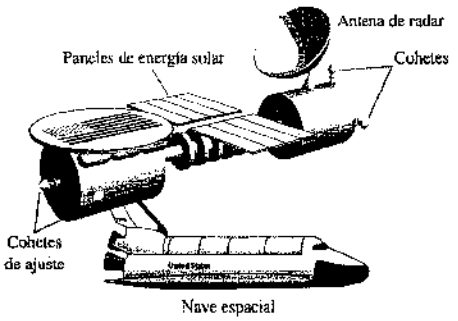


FIGURA E7.6. Estación espacial.

E7.7. El ascensor de un moderno edificio de oficinas viaja a una velocidad máxima de 25 pies por segundo y aun así puede detenerse dentro de un margen de 3 milímetros del piso exterior. La función de transferencia del motor del elevador de realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{K(s + 10)}{s(s + 1)(s + 20)(s + 50)}.$$

Determínese la ganancia K cuando las raíces complejas tienen una ζ igual a 0.8.

E7.8. Dibújese el lugar de las raíces para un sistema con realimentación unitaria con

$$G(s) = \frac{K(s + 1)}{s^2(s + 9)}.$$

(a) Calcúlese la ganancia cuando las tres raíces son reales e iguales. (b) Calcúlense las raíces cuando todas las raíces son iguales como en el apartado (a).

Respuestas: $K = 27$; $s = -3$

E7.9. El telescopio más grande del mundo está situado en Hawai. El espejo primario tiene un diámetro de 10 m y está formado por un mosaico de 36 segmentos hexagonales con la orientación de cada segmento controlada de forma activa. Este sistema de realimentación unitaria para los segmentos del espejo tiene

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 5)}.$$

(a) Calcúlense las asíntotas y dibújense en el plano s. (b) Calcúlese el ángulo de salida desde los polos complejos. (c) Determínese la ganancia cuando dos raíces se encuentran sobre el eje imaginario. (d) Dibújese el lugar de las raíces.

E7.10. Un sistema con realimentación unitaria tiene

$$KG(s) = \frac{K(s + 2)}{s(s + 1)}.$$

(a) Calcúlense los puntos de salida y de entrada en el eje real. (b) Calcúlese la ganancia y las raíces cuando la parte real de las raíces complejas está situada en -2. (c) Dibújese el lugar.

Respuestas: (a) -0.59; -3.41;

(b) $K = 3$, $s = -2 \pm j\sqrt{2}$

E7.11. Un sistema de control de fuerza de un robot con realimentación unitaria tiene una planta [6]

$$KG(s) = \frac{K(s + 2.5)}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 4s + 5)}.$$

(a) Calcúlese la ganancia K que tiene por resultado las raíces dominantes con una razón de amortiguamiento de 0.707. Dibújese el lugar de las raíces. (b) Calcúlese el porcentaje de sobreelongación real y el tiempo de pico para la ganancia K del apartado (a).

E7.12. Un sistema con realimentación unitaria tiene una planta

$$KG(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s^2 + 4s + 8)}.$$

(a) Dibújese el lugar de las raíces para $K > 0$. (b) Calcúlense las raíces cuando $K = 10$ y 20. (c) Calcúlense el tiempo de subida 0-100%, porcentaje de sobreelongación y tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) del sistema para una entrada de escalón unitario cuando $K = 10$ y 20.

E7.13. Un sistema con realimentación unitaria tiene un proceso

$$G(s) = \frac{4(s + z)}{s(s + 1)(s + 3)}.$$

(a) Dibújese el lugar de las raíces cuando z varía de 0 a 100. (b) Utilizando el lugar de las raíces, estímense el porcentaje de sobreelongación y el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) del sistema en $z = 0.6$, 2 y 4 para una entrada de escalón. (c) Determínense la sobreelongación y el tiempo de asentamiento reales en $z = 0.6$, 2 y 4.

E7.14. Un sistema con realimentación unitaria tiene un proceso

$$G(s) = \frac{K(s + 10)}{s(s + 5)}.$$

(a) Determínense los puntos de salida y de entrada del lugar de las raíces y dibújese el lugar de las raíces para $K > 0$. (b) Determínese la ganancia K cuando las dos raíces características tienen un ζ de $1/\sqrt{2}$. (c) Calcúlense las raíces.

E7.15. (a) Dibújese el lugar de las raíces para

$$GH(s) = \frac{K(s + 10)(s + 2)}{s^3}.$$

(b) Calcúlese el intervalo de K para el cual el sistema es estable. (c) Predígase el error en estado estacionario del sistema para una entrada en rampa.

Respuestas: (a) $K > 1.67$; (b) $e_{ss} = 0$.

E7.16. Un sistema con realimentación unitaria negativa tiene una función de transferencia de la planta

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT}}{s + 1},$$

donde $T = 0.1$ segundos. Demuéstrese que una aproximación para el tiempo de retardo es

$$e^{-sT} \simeq \frac{\left(\frac{2}{T} - s\right)}{\left(\frac{2}{T} + s\right)}.$$

Utilizando

$$e^{-0.1s} = \frac{20 - s}{20 + s},$$

obténgase el lugar de las raíces para el sistema para $K > 0$. Determínese el intervalo de K para el cual el sistema es estable.

E7.17. Un sistema de control, como el mostrado en la Figura E7.17, tiene una planta

$$G(s) = \frac{1}{s(s - 1)}.$$

(a) Cuando $G_c(s) = K$, demuéstrese dibujando el lugar de las raíces que el sistema es siempre inestable. (b) Cuando

$$G_c(s) = \frac{K(s + 2)}{(s + 20)},$$

dibújese el lugar de las raíces y determínese el intervalo de K para el cual el sistema es estable. Determínense el valor de K y las raíces complejas cuando dos raíces se encuentran sobre el eje $j\omega$.

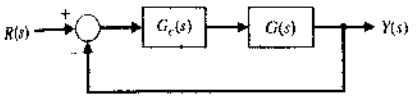


FIGURA E7.17. Sistema realimentado.

E7.18. Un sistema con realimentación negativa unitaria de lazo cerrado se utiliza para controlar la guiñada del avión de combate A-6 Intruder. Cuando

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 3)(s^2 + 2s + 2)},$$

determínese (a) el punto de salida del lugar de las raíces y (b) el valor de las raíces sobre el eje $j\omega$ y la ganancia requerida para esas raíces. Dibújese el lugar de las raíces.

Respuestas: (a) Punto de salida: $s = -2.29$; (b) eje $j\omega$: $s = \pm j1.09$, $K = 8$

E7.19. Un sistema con realimentación unitaria tiene una planta

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 3)(s^2 + 6s + 64)}.$$

(a) Determínese el ángulo de salida del lugar de las raíces en los polos complejos. (b) Dibújese el lugar de las raíces. (c) Determínese la ganancia K cuando las raíces están en el eje $j\omega$ y determínese la situación de estas raíces.

E7.20. Un sistema con realimentación unitaria tiene una planta

$$G(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s - 1)(s + 4)}.$$

(a) Determínese el intervalo de K para la estabilidad. (b) Dibújese el lugar de las raíces. (c) Determínese el máximo ζ de las raíces complejas estables.

Respuestas: (a) $K > 6$; (b) $\zeta = 0.2$.

E7.21. Un sistema con realimentación unitaria tiene una planta

$$G(s) = \frac{Ks}{s^3 + 5s^2 + 10}.$$

Dibújese el lugar de las raíces. Determínese la ganancia K cuando las raíces complejas de la ecuación característica tienen un ζ aproximadamente igual a 0.66.

E7.22. Un misil de alto rendimiento para lanzar un satélite tiene un sistema de realimentación unitaria con una función de transferencia de la planta

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 20)(s + 1)}{(s^2 - 2)(s + 10)}.$$

Dibújese el lugar de las raíces cuando K varía desde $0 < K < \infty$.

E7.23. Un sistema con realimentación unitaria tiene una planta

$$G(s) = \frac{4(s^2 + 1)}{s(s + a)}.$$

Dibújese el lugar de las raíces para $0 \leq a < \infty$.

E7.24. Considérese el sistema representado en variables de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0] \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = [0].$$

Determínese la ecuación característica y después dibújese el lugar de las raíces cuando $0 < k < \infty$.

E7.25. La Figura E7.25 muestra un sistema realimentado de lazo cerrado. ¿Para qué intervalo de valores del parámetro K el sistema es estable? Dibújese el lugar de las raíces cuando $0 < K < \infty$.

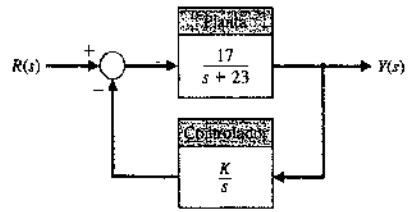


FIGURA E7.25. Sistema de realimentación no unitaria con parámetro K.

PROBLEMAS

P7.1. Dibújese el lugar de las raíces para las siguientes funciones de transferencia de lazo abierto del sistema de la Figura P7.1 cuando $0 < K < \infty$:

(a) $GH(s) = \dfrac{K}{s(s+14)(s+5)}$

(b) $GH(s) = \dfrac{K}{(s^2+2s+2)(s+2)}$

(c) $GH(s) = \dfrac{K(s+6)}{s(s+2)(s+7)}$

(d) $GH(s) = \dfrac{K(s^2+4s+8)}{s^2(s+4)}$

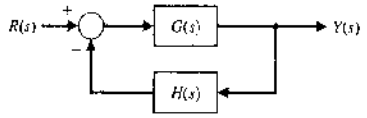


FIGURA P7.1

P7.2. En el Problema 6.7 se presentó el modelo lineal de un detector de fase. Dibújese el lugar de las raíces en función de la ganancia $K_a = K_0K$. Determínese el valor de K_a que se obtiene si las raíces complejas tienen una relación de amortiguamiento igual a 0.60 [13].

P7.3. Un sistema con realimentación unitaria tiene

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+5)}.$$

Determínese (a) el punto de salida del eje real y la ganancia K para ese punto, (b) la ganancia y las raíces cuando las dos raíces se encuentran sobre el eje imaginario y (c) las raíces cuando $K = 6$. (d) Dibújese el lugar de las raíces.

P7.4. En el Problema 4.5 se presentó el análisis de una gran antena. Represéntese gráficamente el lugar de las raíces del sistema cuando $0 < k_a < \infty$. Determínese la ganancia máxima permisible del amplificador para un sistema estable.

P7.5. El control automático de los helicópteros es necesario pues, a diferencia de los aeroplanos con alas fijas que tienen un buen grado de estabilidad inherente, el helicóptero es bastante inestable. En la Figura P7.5 se muestra un sistema de control para helicópteros que emplea un lazo de control automático más un control de palanca para el piloto. Cuando el piloto no usa la palanca de control, puede considerarse que el interruptor está abierto. La dinámica del helicóptero se representa por la función de transferencia

$$G_2(s) = \frac{25(s+0.03)}{(s+0.4)(s^2+0.36s+0.16)}.$$

(a) Con el lazo de control del piloto abierto (controles manuales desconectados), represéntese gráficamente el lugar de las raíces para el lazo de estabilización automática. Determínese la ganancia K_2 que produzca un amortiguamiento para las raíces complejas igual a $\zeta = 0.707$. (b) Para la ganancia K_2 obtenida en el apartado (a), determínese el error en estado estacionario debido a una ráfaga de viento $T_d(s) = 1/s$. (c) Agregando el lazo del piloto, dibújese el lugar de las raíces a medida que K_1 varía desde cero hasta ∞ cuando K_2 se hace igual al valor calculado en (a). (d) Calcúlese de nuevo el error en estado estacionario del apartado (b) cuando K_1 es igual a un valor adecuado, basado en el lugar de las raíces.

P7.6. En la Figura P7.6 se muestra un sistema de control de posición para un vehículo satélite en la atmósfera terrestre. Las funciones de transferencia del sistema son

$$G(s) = \frac{K(s+0.20)}{(s+0.90)(s-0.60)(s-0.10)}$$

y

$$G_c(s) = \frac{(s+2+j1.5)(s+2-j1.5)}{(s+4.0)}.$$

(a) Dibújese el lugar de las raíces a medida que K varía desde 0 hasta ∞. (b) Determínese la ganancia K que dé como resultado un sistema con un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) menor que 12 segundos y una razón de amortiguamiento para las raíces complejas mayor que 0.50.

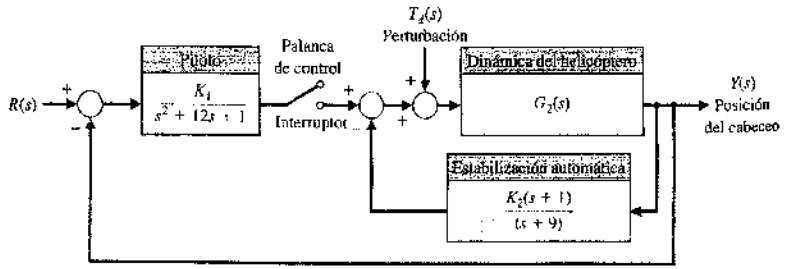


FIGURA P7.5
Control de helicóptero.

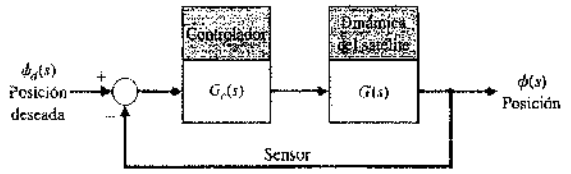


FIGURA P7.6
Control de posición de un satélite.

P7.7. En la Figura P7.7 se muestra un sistema de control de velocidad para un sistema de energía aislado. La válvula controla la entrada del flujo de vapor en la turbina con el objeto de tener en cuenta los cambios de carga, $\Delta L(s)$, dentro de la red de distribución de energía. La velocidad de equilibrio deseada da como resultado una frecuencia del generador igual a 60 cps. La inercia de rotación efectiva, J, es igual a 4000 y la constante de fricción, b, es igual a 0.75. El factor de regulación de la velocidad en estado estacionario, R, se representa por la ecuación $R \simeq (\omega_0 - \omega_r)/\Delta L$, donde ω_r es igual a la velocidad en la carga nominal y ω_0 es igual a la velocidad sin carga. Evidentemente, se desea obtener una R muy pequeña, generalmente menor que 0.10. (a) Usando las técnicas del lugar de las raíces, determínese la regulación, R, alcanzable cuando la razón de amortiguamiento de las raíces del sistema debe ser mayor que 0.60. (b) Verifíquese que la regulación de la velocidad en estado estacionario para un cambio del par de la carga, $\Delta L(s) = \Delta L/s$, es, de hecho, aproximadamente igual a $R\Delta L$ cuando $R \leq 0.1$.

P7.8. Considérese de nuevo el sistema de control de energía del Problema 7.7 cuando la turbina de vapor se reemplaza por una hidroturbina. Para las hidroturbinas, la gran inercia del agua empleada como fuente de energía produce una constante de tiempo considerablemente grande. La función de transferencia de una hidroturbina puede aproximarse por

$$G_c(s) = \frac{-\tau s + 1}{(\tau/2)s + 1},$$

donde $\tau = 1$ segundo. Con el resto del sistema igual que en el Problema 7.7, repítanse los apartados (a) y (b) del Problema 7.7.

P7.9. Lograr el control eficiente y seguro del espaciamiento de vehículos guiados con control automático es un aspecto importante del uso futuro de tales vehículos en una planta de manufacturas [14, 15]. Es también importante eliminar en estos sistemas los efectos de perturbaciones (como aceite en el suelo), y mantener un espaciamiento preciso entre vehículos que se muevan sobre rieles. El sistema se puede representar por el diagrama de bloques de la Figura P7.9. La dinámica del vehículo se puede representar por la expresión:

$$G(s) = \frac{(s+0.1)(s^2+2s+289)}{s(s-0.4)(s+0.8)(s^2+1.45s+361)}.$$

(a) Dibújese el lugar de las raíces del sistema. (b) Determínense todas las raíces cuando la ganancia del lazo $K = K_1K_2$ es igual a 4000.

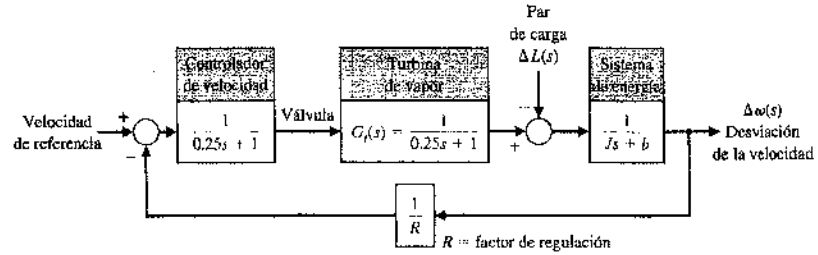


FIGURA P7.7
Sistema de control de energía.

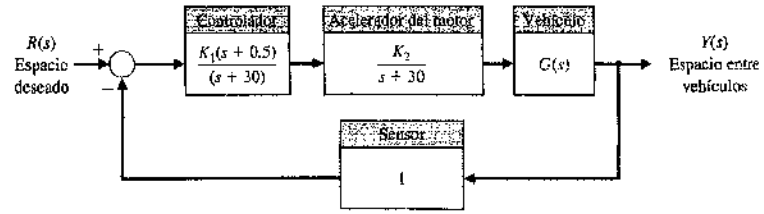
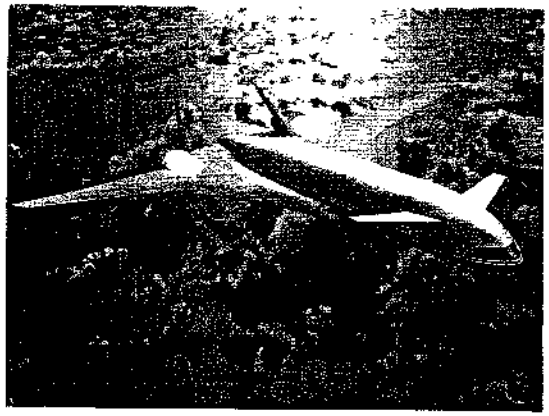
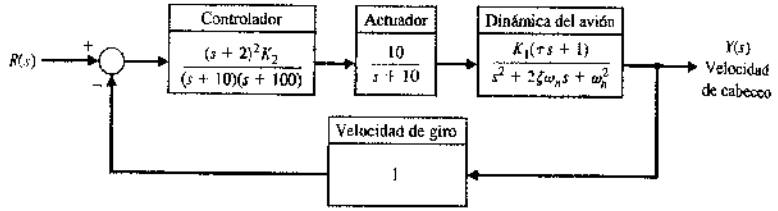


FIGURA P7.9
Control de un vehículo girado.



(a)



(b)

FIGURA P7.10
(a) Un avión a reacción de pasajeros del futuro (™ y © Boeing. Utilizado bajo licencia.) (b) Sistema de control.

P7.10. Los nuevos conceptos en el diseño de los aviones de pasajeros permitirán cruzar el Pacífico sin escalas y con la eficacia de hacerlo de forma económica [16, 31]. Estos nuevos diseños requerirán la utilización de materiales ligeros y resistentes a la temperatura y sistemas de control avanzado. El control del ruido es un tema importante en el diseño de aviones modernos debido a que en la mayoría de los aeropuertos hay unos requerimientos estrictos con el nivel de ruidos. La Figura P7.10(a) muestra el Boeing Sonic Cruiser. Tiene cabida para llevar de 200 a 250 pasajeros y volar por debajo de la velocidad del sonido.

El sistema de control de vuelo requiere un manejo de alta calidad y condiciones de vuelo confortables. Un sistema de control automático se puede diseñar para la próxima generación de aviones de pasajeros.

Las características deseadas de las raíces dominantes del sistema de control que se muestra en la Figura P7.10(b) tienen una $\zeta = 0.707$. Las características del avión son $\omega_n = 2.5$, $\zeta = 0.30$ y $\tau = 0.1$. Sin embargo, el factor de ganancia K_1 variará en el intervalo de 0.02 en condiciones de vuelo con peso medio a 0.20 en condiciones de descenso con peso ligero. (a) Dibújese el lugar de las raíces como una función de la ganancia del lazo K_1K_2. (b) Determínese la ganancia K_2 necesaria para obtener raíces con $\zeta = 0.707$ cuando el avión se mantiene en condiciones promedio de vuelo. (c) Con la ganancia K_2 calculada en el apartado (b), determínese la ζ de las raíces cuando la ganancia K_1 provenga de la condición de descenso ligero.

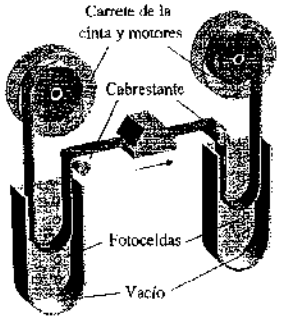
P7.11. Un sistema de computador requiere un sistema de transporte de cinta magnética de alto rendimiento [17]. Sin embargo, las condiciones ambientales impuestas en el sistema dan como resultado una prueba a fondo del diseño de ingeniería de control. En la Figura P7.11 se muestra un sistema de motor de cc de orden directa para el sistema de carrete de cinta magnética, donde r es el radio del carrete y J es la inercia del carrete y del rotor. Se necesita una inversión completa, en 6 ms, de la dirección del carrete de la cinta; dicho carrete debe obedecer una orden de escalón en 3 ms o menos. La cinta se opera normalmente a una velocidad de 100 in/s. El motor y los componentes seleccionados para este sistema tienen las siguientes características:

$K_p = 0.40$ $\quad r = 0.2$

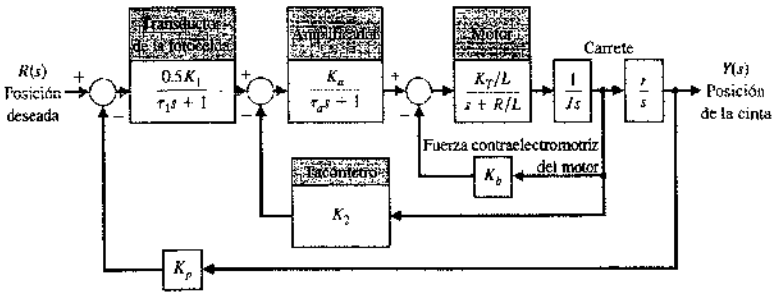
$K_a = 1$ $\quad K_t = 2.0$

$\tau_t = \tau_a = 1$ ms $\quad K_2$ es ajustable.

$K_T/LJ = 2.0$



(a)



(b)

FIGURA P7.11
(a) Sistema de control de cintas. (b) Diagrama de bloques.

La inercia del carrete y del rotor del motor es de 2.5×10^{-3} cuando el carrete está vacío y de 5.0×10^{-3} cuando está lleno. Se usa una serie de fotoceldas en un dispositivo para percibir error. La constante de tiempo del motor es $L/R = 0.5$ ms. (a) Dibújese el lugar de las raíces para el sistema cuando $K_2 = 10$, $J = 5.0 \times 10^{-3}$ y $0 < K_a < \infty$. (b) Determínese la ganancia K_a que dé como resultado un sistema bien amortiguado de forma que la ζ de todas las raíces sea mayor o igual que 0.60. (c) Con la K_a determinada en el apartado (b), dibújese un lugar de las raíces para $0 < K_2 < \infty$.

P7.12. Se necesita un sistema preciso de control de velocidad (*véase* la Figura P7.12) para una plataforma usada en pruebas de giroscopio y sistema inercial, en las cuales es necesario proporcionar una variedad de velocidades controladas cuidadosamente. Se utilizó un sistema de par de motor de cc de orden directa para proporcionar (1) un intervalo de velocidad de 0.01°/s a 600°/s, y (2) un error máximo en estado estacionario del 0.1% para una entrada de escalón. El motor empleado evita el uso de un tren de engranajes con su consiguiente contragolpe y fricción. Así mismo, el motor de manejo

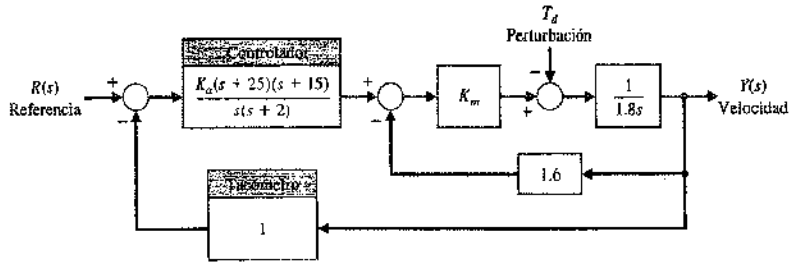


FIGURA P7.12
Control de velocidad.

directo tiene alta capacidad de momento de torsión, alta eficiencia y bajas constantes de tiempo. La constante de ganancia del motor es nominalmente $K_m = 1.8$, pero está sujeta a variaciones hasta del 50%. La ganancia del amplificador K_a es normalmente mayor que 10 y está sujeta a una variación del 10%. (a) Determínese la mínima ganancia del lazo necesaria para satisfacer el requisito del error en estado estacionario. (b) Determínese el valor límite de ganancia para estabilidad. (c) Dibújese el lugar de las raíces a medida que K_a varía desde 0 hasta 8. (d) Determínense las raíces cuando $K_a = 40$, y estímese la respuesta a una entrada de escalón.

P7.13. Un sistema con realimentación unitaria tiene

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s^2+4s+7.84)}$$

(a) Calcúlese el punto de salida en el eje real y la ganancia para este punto. (b) Calcúlese la ganancia para proporcionar dos raíces complejas lo más próximas al eje $j\omega$ con una razón de amortiguamiento de 0.707. (c) ¿Son dominantes las dos raíces del apartado (b)? (d) Determínese el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) del sistema cuando se utiliza la ganancia del apartado (b).

P7.14. La función de transferencia de lazo abierto de un sistema con realimentación negativa de lazo simple es

$$GH(s) = \frac{K(s+2)(s+3)}{s^2(s+1)(s+10)(s+50)}$$

Este sistema se conoce como sistema **condicionalmente estable**, pues hay estabilidad sólo para un intervalo de la ganancia K como sigue: $k_1 < K < k_2$. Usando el criterio de Routh-Hurwitz y el método del lugar de las raíces, determínese el intervalo de la ganancia para la cual el sistema es estable. Dibújese el lugar de las raíces para $0 < K < \infty$.

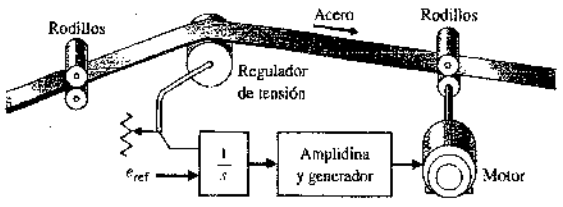
P7.15. Considérese nuevamente la estabilidad y conducción de un piloto y una motocicleta, como se planteó en el Problema 6.13. La dinámica del piloto y la motocicleta se puede representar por la función de transferencia de lazo abierto

$$GH(s) = \frac{K(s^3 + 30s + 625)}{s(s+20)(s^2+20s+200)(s^2+60s+3400)}$$

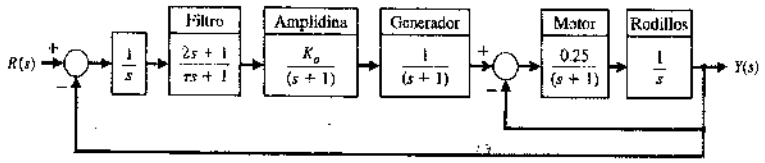
Dibújese el lugar de las raíces para el sistema. Determínese la ζ de las raíces dominantes cuando $K = 3 \times 10^5$.

P7.16. Los sistemas de control para mantener constante la tensión de la cinta de acero en una laminadora en caliente se conocen como regulatores de tensión. En la Figura P7.16 se muestra un sistema típico. El regulador de tensión es un brazo de 2 a 3 pies de largo con un rodillo en el extremo, y se sube para presionar contra la cinta por medio de un motor [18]. La velocidad típica de la cinta al pasar por el regulador de tensión es de 2000 ft/min. Se compara un voltaje proporcional a la posición del regulador de tensión con un voltaje de referencia y se integra, suponiéndose que un cambio en la posición del regulador de tensión es proporcional al cambio en la tensión de la cinta de acero. La constante de tiempo del filtro, τ, es despreciable con relación a otras constantes de tiempo del sistema. (a) Dibújese el lugar de las raíces para el sistema de control en $0 < K_a < \infty$. (b) Determínese la ganancia K_a que dé como resultado un sistema cuyas raíces tengan una razón de amortiguamiento de $\zeta = 0.707$ o mayor. (c) Determínese el efecto de τ a medida que aumenta desde una cantidad despreciable.

P7.17. Considérese como un problema de diseño el amortiguador de vibración analizado en los Problemas 2.2 y 2.10. Usando el método del lugar de las raíces, determínese el efecto de los parámetros M_2 y k_{12}. Determínense los valores específicos de los parámetros M_2 y k_{12} de forma que la masa M_1 vibre cuando $F(t) = a$ sen $\omega_d t$. Supóngase que $M_1 = 1$, $a = 1$ y $b = 1$. Supóngase también que $k_{12} < 1$ y que el término k_{12}^2 puede despreciarse.



(a)



(b)

FIGURA P7.16
Sistema de control de una laminadora de acero.

P7.18. En la Figura P7.18 se muestra un sistema de control con realimentación. El filtro $G_f(s)$ frecuentemente se conoce como compensador, y el problema de diseño es la selección de los parámetros α y β. Usando el método del lugar de las raíces, determínese el efecto de la variación de los parámetros. Selecciónese un filtro adecuado de forma que el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) sea menor que 4 segundos y la razón de amortiguamiento de las raíces dominantes sea mayor que 0.60.

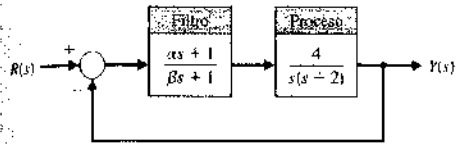


FIGURA P7.18. Diseño del filtro

P7.19. En años recientes se han utilizado muchos sistemas de control automático para vehículos dirigidos en fábricas. Uno de estos sistemas usa un cable guía introducido en el suelo para guiar al vehículo a lo largo del carril deseado [10, 15]. Un detector de error se compone de dos bobinas montadas en el frente del automóvil que percibe la acción de un campo magnético producido por la corriente en el cable guía. En la Figura P7.19(a) se muestra un vehículo guiado en una fábrica. Se tiene que

$$G(s) = \frac{K_a(s^2 + 3.6s + 81)}{s(s+1)(s+5)}$$

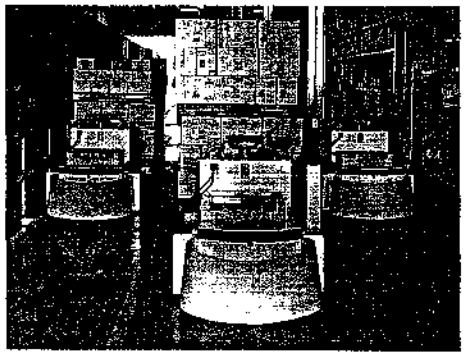
cuando K_a es igual a la ganancia de amplificador. (a) Dibújese el lugar de las raíces y determínese una ganancia adecuada K_a de forma que la relación de amortiguamiento de las raíces complejas sea de 0.707. (b) Determínese la sensibilidad de la raíz del sistema para la raíz compleja r_1 en función de (1) K_a y (2) del polo de $G(s)$, $s = -1$.

P7.20. Determínese la sensibilidad de la raíz para las raíces dominantes del diseño en el Problema 7.18, considerando la ganancia $K = 4\alpha/\beta$ y el polo $s = -2$.

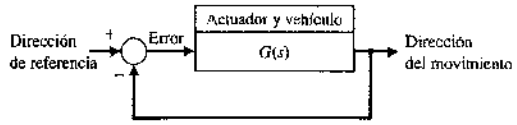
P7.21. Determínese la sensibilidad de la raíz para las raíces dominantes en el sistema de energía del Problema 7.7. Calcúlese la sensibilidad para las variaciones de (a) los polos en $s = -4$ y (b) la ganancia de realimentación, $1/R$.

P7.22. Determínese la sensibilidad de la raíz para las raíces dominantes del Problema 7.1(a) cuando K es de tal forma que la razón de amortiguamiento de las raíces sin perturbación es de 0.707. Calcúlese y compárese la sensibilidad en función de los polos y ceros de $GH(s)$.

P7.23. Repítase el Problema 7.22 para la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$ del Problema 7.1(c).



(a)



(b)

FIGURA P7.19
(a) Vehículo guiado de forma automática. (Fotografía cortesía de Control Engineering Corporation.) (b) Diagrama de bloques.

P7.24. Para sistemas de grado relativamente alto, la forma del lugar de las raíces frecuentemente puede adoptar un patrón inesperado. En la Figura P7.24 se muestran los lugares de las raíces para cuatro sistemas de realimentación diferentes de tercer orden o mayor. Se muestran los polos y ceros del lazo abierto de $KF(s)$ y se presenta la forma de los lugares de las raíces a medida que varía K desde cero hasta infinito. Verifíquense los diagramas de la Figura P7.24, construyendo los lugares de las raíces.

P7.25. Los circuitos electrónicos integrados de estado sólido están compuestos de elementos distribuidos R y C. Por tanto, deben investigarse los circuitos electrónicos de realimentación en forma de circuitos integrados obteniendo la función de transferencia de las redes RC distribuidas. Se ha demostrado que la pendiente de la curva de atenuación de una de estas redes es $10n$ dB/década, donde n es el orden del filtro RC [13]. Esta atenuación está en contraste con la normal de $20n$ dB/década para los lazos de parámetros discretos. (El concepto de pendiente de una curva de atenuación se trata en el Capítulo 8. Si el lector no está familiarizado con dicho concepto, este problema puede examinarse de nuevo después de estudiar dicho capítulo.) Surge un caso de interés cuando se presenta la red RC distribuida en una trayectoria de realimentación de resistencias en serie de un amplificador de transistores. Entonces la función de transferencia del lazo puede escribirse como

$$GH(s) = \frac{K(s-1)(s+3)^{1/2}}{(s+1)(s+2)^{1/2}}.$$

(a) Usando el método del lugar de las raíces, determínese el lugar de las raíces para variaciones de K desde cero hasta infinito. (b) Calcúlese la ganancia en la estabilidad límite y la frecuencia de oscilación para esta ganancia.

P7.26. Un sistema de realimentación negativa de lazo simple tiene una función de transferencia de lazo

$$GH(s) = \frac{K(s+2)^2}{s(s^2+1)(s+8)}.$$

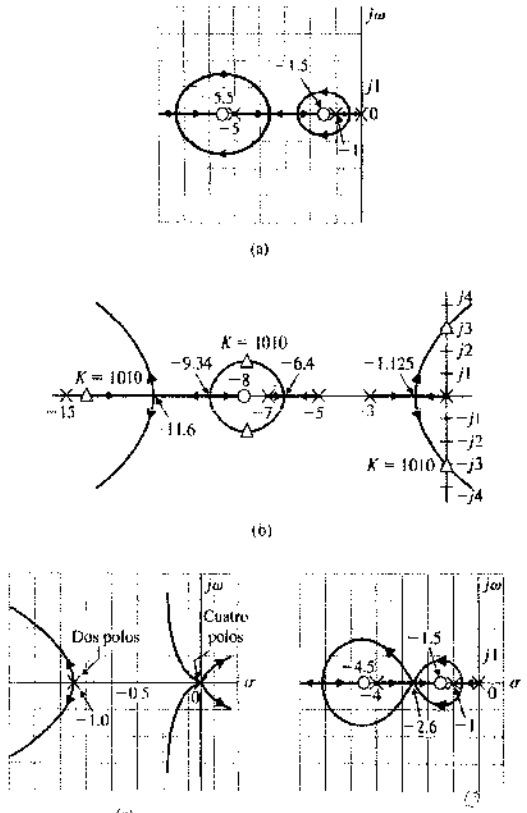


FIGURA P7.24
Lugar de las raíces de cuatro sistemas.

(a) Dibújese el lugar de las raíces para $0 \leq K \leq \infty$ con el fin de indicar sus características significativas. (b) Determínese el intervalo de la ganancia K para el cual el sistema es estable. (c) ¿Para qué valores de K en el intervalo $K \geq 0$ existen raíces puramente imaginarias? ¿Cuáles son los valores de estas raíces? (d) Para una estimación del tiempo de asentamiento, ¿podría justificarse en este caso el uso de la aproximación de las raíces dominantes para una gran magnitud de ganancia ($K > 50$)?

P7.27. Un sistema de realimentación negativa unitaria tiene una función de transferencia

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 0.105625)}{s(s^2+1)}$$

$$= \frac{K(s + j0.325)(s - j0.325)}{s(s^2+1)}.$$

Dibújese el lugar de las raíces en función de K. Calcúlese cuidadosamente dónde entran y salen del eje real los segmentos del lugar de las raíces.

P7.28. Para cumplir los estándares de emisiones actuales en Estados Unidos, las emisiones de hidrocarburos (HC) y de monóxido de carbono (CO) se suelen controlar por medio de un convertidor catalítico colocado en el escape de los automóviles. Los estándares federales para las emisiones de los óxidos de nitrógeno (NO_x) se cumplen mediante técnicas de recirculación de los gases de escape (RGE). Sin embargo, como los estándares de emisión de NO_x se redujeron del límite actual de 2.0 gramos por mil a 1.0 gramos por mil, esas técnicas de recirculación ya no son suficientes.

Se están investigando diversos métodos para satisfacer los estándares impuestos para las tres emisiones, y uno de los más prometedores emplea un catalizador de tres vías (para las emisiones de HC, CO y NO_x), junto con un sistema de control del motor de lazo cerrado. El método consiste en emplear el control del motor en lazo cerrado como el que se muestra en la Figura P7.28 [19, 23]. El sensor de gases de escape proporciona una indicación del enriquecimiento o empobrecimiento en el escape, que se compara con un nivel de referencia. La señal de la diferencia se procesa en el controlador, cuya salida regula el nivel de vacío en el carburador, para alcanzar la mejor relación aire-combustible, de manera que se tenga una operación adecuada del convertidor catalítico. La función de transferencia de lazo abierto está representada por

$$GH(s) = \frac{Ks^2 + 12s + 20}{s^3 + 10s^2 + 25s}.$$

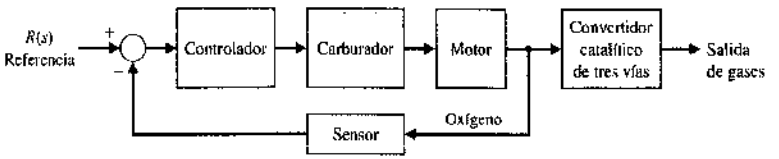


FIGURA P7.28
Control del motor de un automóvil.

Calcúlese el lugar de las raíces como una función de K. Calcúlese cuidadosamente en dónde entran y salen del eje real los segmentos del lugar de las raíces. Determínense las raíces cuando $K = 2$. Predígase la respuesta del sistema a un escalón cuando $K = 2$.

P7.29. Un sistema de control con realimentación unitaria tiene una función de transferencia

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 6s + 12)}{s^2(s+6)}.$$

Se desea que las raíces dominantes tengan una razón de amortiguamiento igual a 0.707. Calcúlese la ganancia K cuando se satisface esta condición. Demuéstrese que las raíces complejas son $s = -2.3 \pm j2.3$ en esta ganancia.

P7.30. La Figura P7.30 muestra una red RLC. Los valores nominales (normalizados) de los elementos de la red son $L = C = 1$ y $R = 2.5$. Demuéstrese que la sensibilidad de las dos raíces de la impedancia de entrada $Z(s)$ para un cambio en R es diferente por un factor de 4.

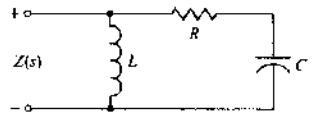


FIGURA P7.30. Circuito RLC.

P7.31. El desarrollo de aviones y misiles de alta velocidad requiere información acerca de los parámetros aerodinámicos que prevalecen en altas velocidades. Para probar tales parámetros, se emplean túneles de viento que operan comprimiendo aire a presiones muy elevadas y liberándolo a través de una válvula para crear viento. Como la presión del aire disminuye a medida que éste escapa, es necesario abrir cada vez más la válvula con el objeto de mantener una velocidad del viento constante. Por tanto, se requiere un sistema de control de ajuste de la válvula para mantener una velocidad constante del viento. La función de transferencia de lazo abierto para un sistema con realimentación unitaria es:

$$GH(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+0.16)(s+p)(s+\bar{p})},$$

donde $p = -7.3 + 9.7831j$. Dibújese el lugar de las raíces y muéstrese la localización de las raíces para $K = 326$ y $K = 1350$.

P7.32. Se dispone de un robot adecuado para realizar guardias durante la noche. Este guardia nunca duerme y puede patrullar incansablemente por grandes almacenes y zonas exteriores. El sistema de control de dirección para el robot móvil tiene una realimentación unitaria con

$$G(s) = \frac{K(s + 1)(s + 5)}{s(s + 1.5)(s + 2)}$$

(a) Calcúlese K para todos los puntos de salida y de entrada en el eje real. (b) Calcúlese K cuando la razón de amortiguamiento de las raíces complejas es 0.707. (c) Calcúlese el valor mínimo de la razón de amortiguamiento para las raíces complejas y la ganancia K asociada. (d) Calcúlese la sobreelongación y el tiempo de asentamiento (dentro del 2% del valor final) para una entrada de escalón unitario para la ganancia, K, determinada en los apartados (b) y (c).

P7.33. El Bell-Boeing V-22 Osprey Tiltrotor es tanto un avión como un helicóptero. Su ventaja es la capacidad de girar sus motores 90° desde una posición vertical para aterrizajes y despegues como se muestra en la Figura P7.33(a), y luego cambiar los motores a una posición horizontal para volar como un avión [20]. La Figura P7.33(b) muestra el sistema de control de altitud en el modo de helicóptero. (a) Determínese el lugar de las raíces cuando K varía y determínese su intervalo para que sea un sistema estable. (b) Para $K = 280$, calcúlese la $y(t)$ real para una entrada de escalón unitario $r(t)$, el porcentaje de sobreelongación y el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%). (c) Cuando $K = 280$ y $r(t) = 0$, calcúlese $y(t)$ para una perturbación de escalón unitario, $D(s) = 1/s$. (d) Añádase un prefiltro entre $R(s)$ y el punto de suma tal que

$$G_p(s) = \frac{0.5}{s^2 + 1.5s + 0.5},$$

y repítase el apartado (b).

P7.34. El control de combustible para un automóvil utiliza una bomba diesel que está sujeta a variaciones de parámetros. Una realimentación unitaria tiene la planta

$$G(s) = \frac{K(s + 1.5)}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)(s + 10)}$$

(a) Dibújese el lugar de las raíces cuando K varía desde 0 hasta 2000. (b) Calcúlense las raíces cuando K vale 400, 500 y 600. (c) Predígase cuánto variará el porcentaje de sobreelongación para un escalón para la ganancia K, suponiendo raíces dominantes. (d) Calcúlese la respuesta temporal real para una entrada de escalón para las tres ganancias y compárese la sobreelongación real con la predicha.

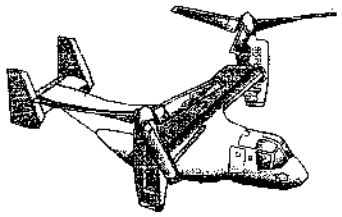
P7.35. Una grúa electrohidráulica potente se puede utilizar para levantar palets que pesan varias toneladas por encima de andamios de 35 pies en un lugar de construcción. El sistema con realimentación unitaria negativa tiene una función de transferencia de la planta

$$G(s) = \frac{K(s + 1)^2}{s(s^2 + 1)}.$$

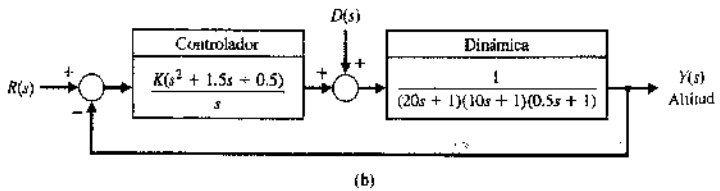
(a) Dibújese el lugar de las raíces para $K > 0$. (b) Calcúlese la ganancia K cuando las dos raíces complejas tienen una ζ de 0.707, y calcúlense las tres raíces. (c) Calcúlese el punto de entrada del lugar de las raíces en el eje real. (d) estímese la sobreelongación esperada para una entrada de escalón, y compárese con la sobreelongación real calculada con un programa de computador.

P7.36. Un microrrobot con un manejador se ha diseñado para probar partículas muy pequeñas, tales como las células vivas. [6]. El sistema con realimentación negativa unitaria tiene una función de transferencia

$$G(s) = \frac{K(s + 1)(s + 2)(s + 3)}{s^3(s + 1)}.$$



(a)



(b)

FIGURA P7.33
(a) Avión Osprey Tiltrotor.
(b) Sistema de control.

(a) Dibújese el lugar de las raíces para $K > 0$. (b) Calcúlese la ganancia y las raíces cuando la ecuación característica tiene dos raíces imaginarias. (c) Calcúlense las raíces características cuando $K = 20$ y $K = 100$. (d) Para $K = 20$, estímese el porcentaje de sobreelongación para una entrada de escalón y compárese con la sobreelongación real calculada a partir de un programa de computador.

P7.37. Identifíquense los parámetros K, a y b del sistema que se muestra en la Figura P7.37. El sistema está sujeto a una entrada de escalón unitario, y la respuesta de la salida tiene una sobreelongación pero al final alcanza el valor final de 1. Cuando el sistema de lazo cerrado está sujeto a una entrada de rampa, la respuesta de la salida sigue a la entrada de rampa con un error en estado estacionario finito. Cuando la ganancia es el doble, $2K$, la respuesta de la salida para una entrada impulsional es una sinusoide pura con un periodo de 0.314 segundos. Determínense K, a y b.

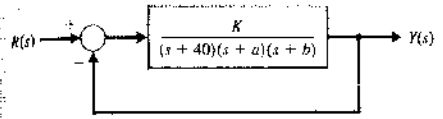


FIGURA P7.37. Sistema realimentado.

P7.38. Un sistema con realimentación unitaria tiene

$$G(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s - 3)}.$$

Este sistema es inestable en lazo abierto. (a) Calcúlese el intervalo de K para que el sistema en lazo cerrado sea estable. (b) Dibújese el lugar de las raíces. (c) Calcúlense las raíces para $K = 10$. (d) Para $K = 10$, predígase, utilizando la Figura 5.13, el porcentaje de sobreelongación para una entrada de escalón. (e) Determínese la sobreelongación real dibujando la respuesta.

P7.39. Los trenes de alta velocidad para las vías férreas de Estados Unidos deben permitir dar giros y vueltas en su recorrido. En los trenes convencionales, los ejes se fijan en armazones de acero denominados vagones. Los vagones giran cuando el tren toma una curva, pero los ejes fijos permanecen paralelos unos con otros, incluso aunque el eje delantero quiera ir en una dirección distinta a la del eje trasero [24]. Si el tren va rápido puede saltar las vías. Una solución consiste en utilizar ejes que giren independientemente. Para contrabalancear las fuertes fuerzas centrífugas en una curva, el tren tiene además un sistema hidráulico computarizado que inclina cada vagón cuando da la vuelta o gira. Los sensores de a bordo calculan la velocidad del tren y la intensidad de la curva y envían esta información a las bombas hidráulicas que se encuentran debajo del suelo de cada vagón. Las bombas inclinan el vagón por encima de ocho grados, provocando una inclinación dentro de la curva al igual que un coche de carreras sobre una pista peraltada.

La Figura P7.39 muestra el sistema de control de inclinación. Dibújese el lugar de las raíces y calcúlese el valor de K cuando las raíces complejas tienen el máximo amortiguamiento. Predígase la respuesta de este sistema para una entrada de escalón $R(s)$.

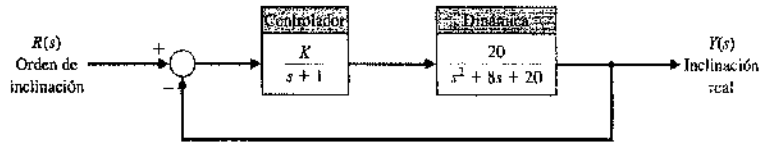
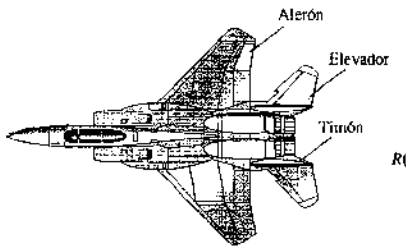


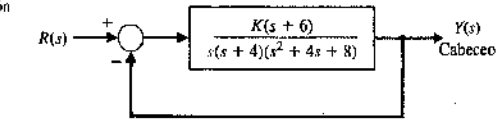
FIGURA P7.39
Control de inclinación para un tren de alta velocidad.

PROBLEMAS AVANZADOS

PA7.1. La Figura PA7.1(a) muestra la vista superior de un avión a reacción de alto rendimiento [20]. Dibújese el lugar de las raíces y calcúlese la ganancia K para que la ζ de los polos complejos cercanos al eje $j\omega$ sea la máxima alcanzable. Calcúlense las raíces para esta K y predígase la respuesta para una entrada de escalón. Calcúlese la respuesta real y compáresela con la predicha.



(a)



(b)

FIGURA PA7.1
(a) Avión de alto rendimiento.
(b) Sistema de control de cabeceo.

PA7.2. Un tren de alta velocidad levitado magnéticamente «vuela» sobre un hueco de aire sobre su sistema de rieles [24]. El sistema de control del hueco de aire tiene un sistema realimentado unitario con una planta

$$G(s) = \frac{K(s+1)(s-3)}{s(s-1)(s+4)(s+8)}.$$

El objetivo es seleccionar K para que la respuesta a una entrada de escalón unitario esté razonablemente amortiguada y el tiempo de asentamiento sea menor que 3 segundos. Dibújese el lugar de las raíces y selecciónese K para que todas las raíces complejas tengan una ζ mayor que 0.6. Calcúlese la respuesta real para la K seleccionada y el porcentaje de sobreelongación.

PA7.3. Un equipo portátil de discos compactos requiere un buen rechazo a perturbaciones y una posición precisa del sensor del lector óptico. El sistema de control de posición utiliza una realimentación unitaria y una función de transferencia de la planta

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+p)}.$$

El parámetro p se puede elegir seleccionando un motor de cc adecuado. Dibújese el lugar de las raíces como una función de p. Selecciónese p para que el coeficiente de amortiguamiento ζ de las raíces complejas de la ecuación característica sea aproximadamente $1/\sqrt{2}$.

PA7.4. Un sistema de control manipulador remoto tiene realimentación unitaria y una planta

$$G(s) = \frac{(s+\alpha)}{s^3 + (1+\alpha)s^2 + (\alpha-1)s + 1 - \alpha}.$$

Se desea que el error de posición en estado estacionario para una entrada de escalón sea menor o igual que el 10% de la magnitud de la entrada. Dibújese el lugar de las raíces como una función del parámetro α. Calcúlese el intervalo de α requerido para el error en estado estacionario deseado. Localícense las raíces para el valor permitido de α a fin de alcanzar el error en estado estacionario requerido y estímese la respuesta a un escalón del sistema.

PA7.5. Un sistema de realimentación unitaria tiene una planta

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 10s^2 + 7s - 18}.$$

(a) Dibújese el lugar de las raíces y calcúlese K para un sistema estable con raíces complejas con ζ igual a $1/\sqrt{2}$.
(b) Calcúlese la sensibilidad de las raíces complejas del apartado (a).
(c) Calcúlese el porcentaje de cambio en K (aumento o disminución) para que las raíces se encuentren en el eje $j\omega$.

PA7.6. Un sistema de realimentación unitaria tiene una planta

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 5)}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

Dibújese el lugar de las raíces para $K > 0$ y selecciónese un valor par K que proporcione una respuesta cerrada a escalón con un tiempo de asentamiento menor que 2 segundos.

PA7.7. La Figura PA7.7 muestra un sistema realimentado con realimentación positiva. El lugar de las raíces para $K > 0$ debe cumplir la condición

$$KG(s) = 1 \angle \pm k360^\circ$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Dibújese el lugar de las raíces para $0 < K < \infty$.

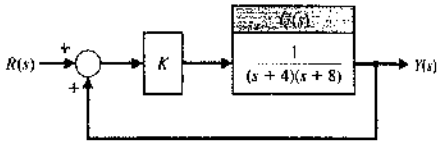


FIGURA PA7.7. Sistema de lazo cerrado con realimentación positiva.

PA7.8. La Figura PA7.8 muestra un sistema de control de posición para un control de cc. Obténgase el lugar de las raíces para la constante de realimentación de velocidad K, y selecciónese K para que todas las raíces de la ecuación característica sean reales (dos son iguales y reales). Estímese la respuesta a un escalón del sistema para la K seleccionada. Compárese la respuesta estimada con la real.

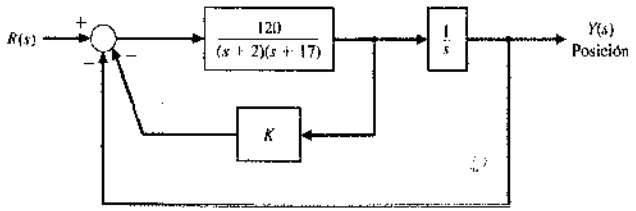


FIGURA PA7.8
Sistema de control de posición con realimentación de velocidad.

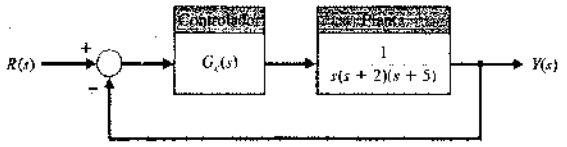


FIGURA PA7.9
Sistema de control con realimentación unitaria.

PA7.9. La Figura PA7.9 muestra un sistema de control. Dibújese el lugar de las raíces para las funciones de transferencia $G_c(s)$ siguientes:

(a) $G_c(s) = K$

(b) $G_c(s) = K(s+1)$

(c) $G_c(s) = \dfrac{K(s+1)}{(s+10)}$

(d) $G_c(s) = \dfrac{K(s+1)(s+3)}{(s+10)}$

PA7.10. La Figura PA7.10 muestra un sistema realimentado. Dibújese el lugar de las raíces cuando K varía ($K \geq 0$). Calcúlese un valor para K que proporcione una respuesta a un escalón con una sobreelongación menor del 5% y un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) menor que 2.5 segundos.

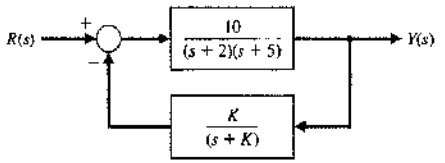


FIGURA PA7.10
Sistema de control con realimentación no unitaria.

PA7.11. Considérese nuevamente el diseño del robot motorista descrito en el problema de diseño 6.6. Dibújese el lugar de las raíces para $K > 0$ y selecciónese un valor para K que dé como resultado un comportamiento estacionario cuando aparezca perturbaciones.

PA7.12. La Figura PA7.12 muestra un sistema de control. Dibújese el lugar de las raíces y selecciónese una ganancia K para que la respuesta a un escalón del sistema tenga una sobreelongación menor del 20% y un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) inferior a 5 segundos.

PA7.13. La Figura PA7.13 muestra un sistema de control con un controlador PI. (a) Sea $K_I/K_P = 0.2$ y determínese K_P para que las raíces complejas tengan la máxima razón de amortiguamiento. (b) Predígase la respuesta a un escalón del sistema con K_P fijada al valor calculado en el apartado (a).

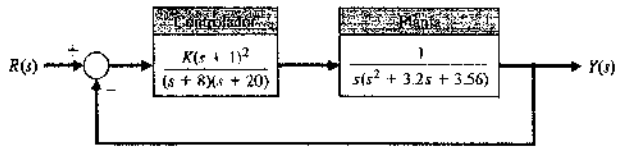


FIGURA PA7.12
Sistema de control con parámetro K.

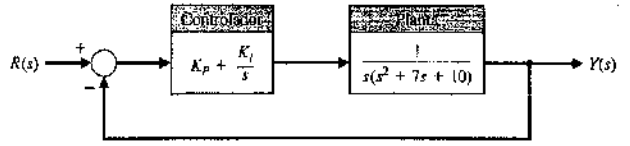


FIGURA PA7.13
Sistema de control con un controlador PI.

PROBLEMAS DE DISEÑO

PDC7.1. El sistema formado por un motor y un sistema de corredera utiliza la salida de un tacómetro montado sobre el eje del motor tal como se muestra en la Figura PDC4.1 (opción conmutador-cerrado). El voltaje de salida del tacómetro es $v_T = K_t\dot{\theta}$. Utilícese la realimentación de velocidad con la ganancia ajustable K_1. Selecciónense los mejores valores para la ganancia K_1 y la ganancia del amplificador K_a para que la respuesta transitoria a una entrada de escalón tenga una sobreelongación menor del 5% y un tiempo de asentamiento (dentro del 2% del valor final) menor que 300 ms.

PD7.1. La Figura PD7.1(a) muestra un avión de alto rendimiento que utiliza alerones, timón y elevador para manejarse en una trayectoria de vuelo de tres dimensiones [20]. El sistema de control de velocidad de cabeceo para un avión de combate a 10 000 m y 0.9 Mach se puede representar por el sistema de la Figura PD7.1(b), donde

$$G(s) = \frac{-18(s + 0.015)(s + 0.45)}{(s^2 + 1.2s + 12)(s^2 + 0.01s + 0.0025)}.$$

(a) Dibújese el lugar de las raíces cuando el controlador es una ganancia, tal que $G_c(s) = K$, y calcúlese K cuando ζ para las raíces con $\omega_n > 2$ es mayor que 0.15 (búsquese un máximo de ζ). (b) Dibújese la respuesta $q(t)$, para una entrada de escalón $r(t)$ con la K del apartado (a). (c) Un diseñador sugiere un controlador con acción anticipada, $G_c(s) = K_1 + K_2 s = K(s + 2)$. Dibújese el lugar de las raíces para este sistema cuando K varía y calcúlese una K para que la ζ de todas las raíces del lazo cerrado sea >0.8. (d) Dibújese la respuesta, $q(t)$, para una entrada escalón $r(t)$ para la K del apartado (c).

PD7.2. La Figura P7.33(a) muestra un helicóptero grande que utiliza dos de rotores en tándem que giran en direcciones opuestas. El controlador ajusta el ángulo de inclinación del rotor principal y de este modo el movimiento de avance como se muestra en la Figura PD7.2. La dinámica del helicóptero está representada por

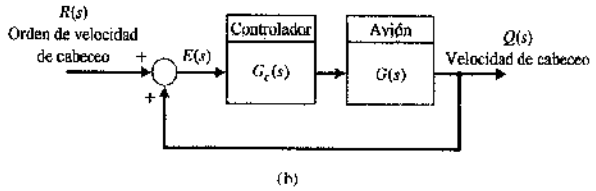
$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 4.5s + 9}$$

y el controlador seleccionado es

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K(s + 1)}{s}.$$

(a) Dibújese el lugar de las raíces del sistema y determínese el valor de K cuando la ζ de las raíces complejas es igual a 0.6. (b) Dibújese la respuesta del sistema para una entrada de escalón $r(t)$ y calcúlese el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) y la sobreelongación para el sistema del apartado (a). ¿Cuál es el error en estado estacionario para una entrada de escalón? (c) Repítanse los apartados (a) y (b) cuando la ζ de las raíces complejas es 0.41. Compárense los resultados con los obtenidos en los apartados (a) y (b).

(a)



(b)

FIGURA PD7.1
(a) Avión de alto rendimiento. (b) Sistema de control de la velocidad de cabeceo.

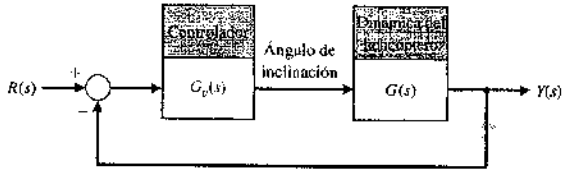


FIGURA PA7.2
Control de velocidad de un helicóptero con dos rotores.

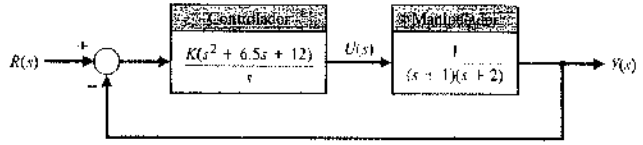


FIGURA PD7.3
Sistema de control de vehículo robot de Marte.

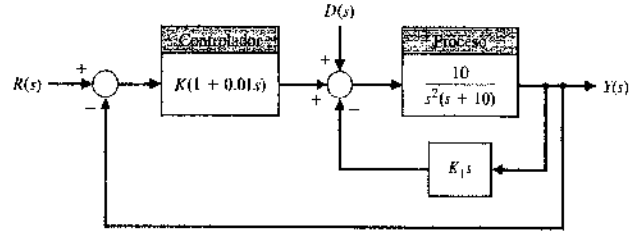


FIGURA PD7.4
Soldadura controlada de manera remota

PD7.3. El vehículo explorador ha sido diseñado para maniobrar a 0.25 mph sobre el terreno de Marte. Como Marte se encuentra a 189 millones de millas de la Tierra y se necesitarían 40 minutos cada vez que se quisiera comunicar con la Tierra [22, 27], el vehículo explorador debe actuar de manera independiente y con fiabilidad. Su estructura se asemeja a un híbrido entre un pequeño camión plano y un todoterreno. El vehículo explorador se construirá con tres secciones articuladas, cada una con sus propios dos soportes de ejes independientes con ruedas cónicas de un metro. Un par de brazos para la recogida de muestras —uno para cortar y taladrar y el otro para manipular objetos pequeños— que salen de su parte frontal como mordazas. El control de los brazos se puede representar por el sistema que se muestra en la Figura PD7.3. (a) Dibújese el lugar de las raíces para K e identifíquense las raíces para $K = 4.1$ y 41. (b) Determínese la ganancia K que da como resultado una sobreelongación de aproximadamente un 1% para un escalón. (c) Determínese la ganancia que minimiza el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) mientras se mantiene una sobreelongación menor del 1%.

PD7.4. Un soplete de soldadura se controla remotamente para alcanzar una precisión alta mientras se opera en entornos cambiantes y peligrosos [21]. La Figura PD7.4 muestra un modelo del control de posición del brazo de soldadura con la perturbación representando los cambios en su entorno. (a) Con $D(s) = 0$, selecciónense K_1 y K para proporcionar un comportamiento del sistema de control de posición de alta calidad. Selecciónese un conjunto de criterios de comportamiento, y examínense los resultados del diseño. (b) Para el sistema del apartado (a), supóngase $R(s) = 0$ y determínese el efecto de un escalón unitario $D(s) = 1/s$ obteniendo $y(t)$.

PD7.5. Un avión a reacción de alto rendimiento con un sistema de control de piloto automático tiene una realimentación unitaria y un sistema de control, tal como muestra la Figura PD7.5. Dibújese el lugar de las raíces, y predígase la respuesta a un escalón del sistema. Determínese la respuesta real del sistema y compáresela con la respuesta predicha.

PD7.6. Un sistema para ayudar y controlar el caminar de una persona parcialmente discapacitada podría utilizar un control automático del movimiento de caminar [25]. La Figura PD7.6 muestra un modelo de un sistema que es inestable en lazo abierto. Utilizando el lugar de las raíces, selecciónese K para alcanzar la máxima ζ en las raíces complejas. Predígase la respuesta a un escalón del sistema y compáresela con la respuesta real a un escalón.

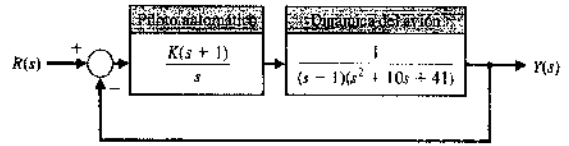


FIGURA PD7.5
Avión a reacción de alto rendimiento.

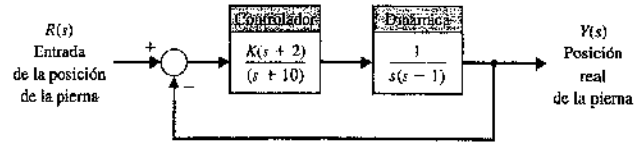


FIGURA PD7.6
Control automático del movimiento al caminar.

PD7.7. La mayoría de los amplificadores operacionales comerciales se diseñan para que sean estables con ganancia unitaria [26]. Es decir, son estables cuando se utilizan en una configuración de ganancia unitaria. Uno de estos amplificadores tiene una ganancia de cc de 10^5 y un ancho de banda de 10 kHz. El amplificador, $G(s)$, se conecta en un circuito eléctrico como se muestra en la Figura PD7.7(a). El amplificador se representa por el modelo que se muestra en la Figura PD7.7(b), donde $K_a = 10^5$. Dibújese el lugar de las raíces del sistema para K. Calcúlese el valor mínimo de la ganancia de cc del amplificador en lazo cerrado para la estabilidad. Selecciónese la ganancia de cc y las resistencias R_1 y R_2.

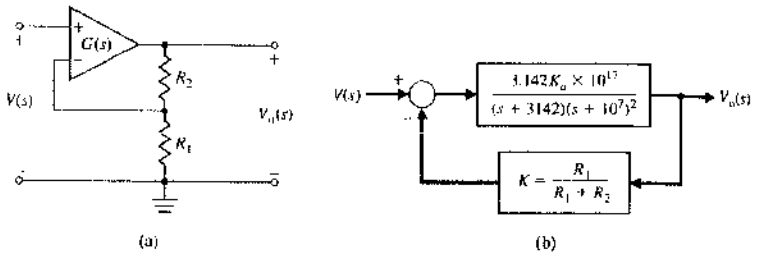


FIGURA PD7.7
(a) Circuito amplificador operacional.
(b) Sistema de control.

PD7.8. La Figura PD7.8(a) muestra el brazo de un robot actuado en la unión del codo, y la Figura PD7.8(b) muestra el sistema de control para el actuador. Dibújese el lugar de las raíces para $K \geq 0$. Selecciónese $G_p(s)$ para que el error en estado estacionario para una entrada de escalón sea igual a cero. Utilizando la $G_p(s)$ seleccionada, dibújese $y(t)$ para K igual a 1, 1.5 y 2.85. Determínese el tiempo de subida, el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) y el porcentaje de sobreelongación para las tres ganancias. Se desea limitar la sobreelongación para que sea menor que el 6% mientras se alcanza el menor tiempo de subida posible. Selecciónese el mejor sistema para $1 \leq K \leq 2.85$.

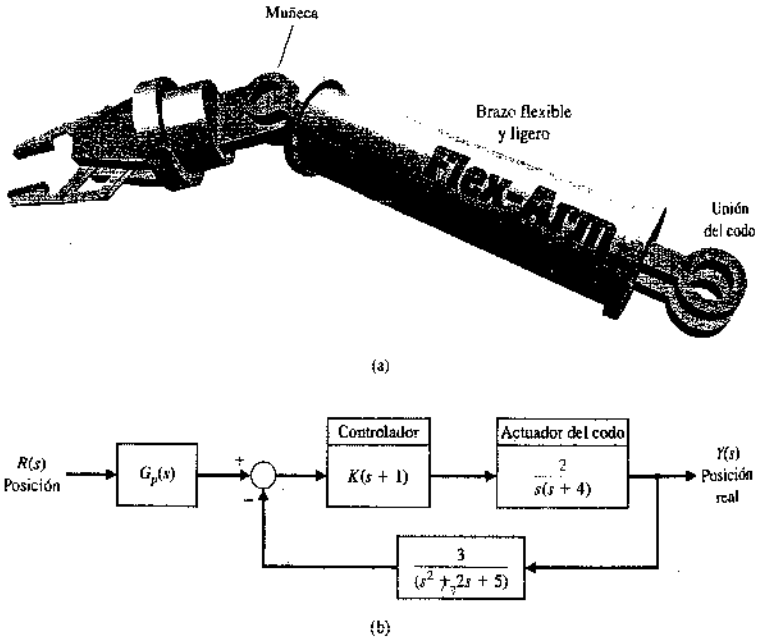


FIGURA PD7.8
(a) Brazo de robot actuado en la unión del codo. (b) Sistema de control.

PD7.9. Un automóvil con tracción a las cuatro ruedas tiene muchos beneficios. El sistema proporciona al conductor un mayor grado de control sobre el automóvil. El conductor consigue así un vehículo mucho más adaptado a una amplia variedad de condiciones. También previene el derrape, que es el balanceo de la parte trasera durante movimientos rápidos. Además, el sistema de tracción a las cuatro ruedas aumenta la maniobrabilidad del coche. Esto permite al conductor aparcar el coche en sitios muy ajustados. Añadiendo sistemas de operación computarizados en lazo cerrado a un coche se puede evitar el deslizamiento fuera de control en carreteras heladas y mojadas.

El sistema funciona moviendo las ruedas traseras en relación con el ángulo de dirección de las ruedas delanteras. El sistema de control toma información del ángulo de dirección de las ruedas delanteras y se la pasa al actuador en la parte trasera. Este actuador mueve entonces de forma apropiada las ruedas traseras.

Cuando a las ruedas traseras se les da un ángulo de dirección relativo al ángulo de dirección de las ruedas delanteras, el vehículo puede variar su respuesta de aceleración lateral de acuerdo con la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = K\frac{1 + (1 + \lambda)T_1 s + (1 + \lambda)T_2 s^2}{s[1 + (2\zeta/\omega_n)s + (1/\omega_n^2)s^2]},$$

donde $\lambda = 2q/(1 - q)$, y q es la razón del ángulo de la rueda trasera al ángulo de dirección de la rueda delantera [14]. Se supone que $T_1 = T_2 = 1$ segundo y $\omega_n = 4$. Diséñese un sistema con realimentación unitaria para $G(s)$, seleccionando un conjunto adecuado de parámetros (λ, K, ζ) para que la respuesta del control de dirección sea rápida y alcance unas características de sobreelongación modestas. Además, q debe estar entre 0 y 1.

PD7.10. La Figura PD7.10(a) muestra el control del manejo de una grúa piloto. El carrito se mueve mediante una entrada $F(t)$ para controlar $x(t)$ y $\phi(t)$ [13]. La Figura PD7.10(b) muestra el modelo del control del manejo de una grúa. Diséñese un controlador para lograr el control de las variables deseadas cuando $G_c(s) = K$.

PD7.11. La Figura PD7.11(a) muestra un vehículo explorador diseñado para ser utilizado en otros planetas y lunas [21]. La Figura PD7.11(b) muestra el diagrama de bloques del control de dirección, donde

$$G(s) = \frac{(s + 1.5)}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)(s + 10)}$$

(a) Cuando $G_c(s) = K$, dibújese el lugar de las raíces cuando K varía desde 0 hasta 1000. Calcúlense las raíces para K igual a 100, 300 y 600. (b) Predígase la sobreelongación, el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%), y el error en estado estacionario para una entrada de escalón, suponiendo raíces dominantes. (c) Determínese la respuesta temporal real para una entrada de escalón para los tres valores de la ganancia, y compárense los resultados reales con los predichos.

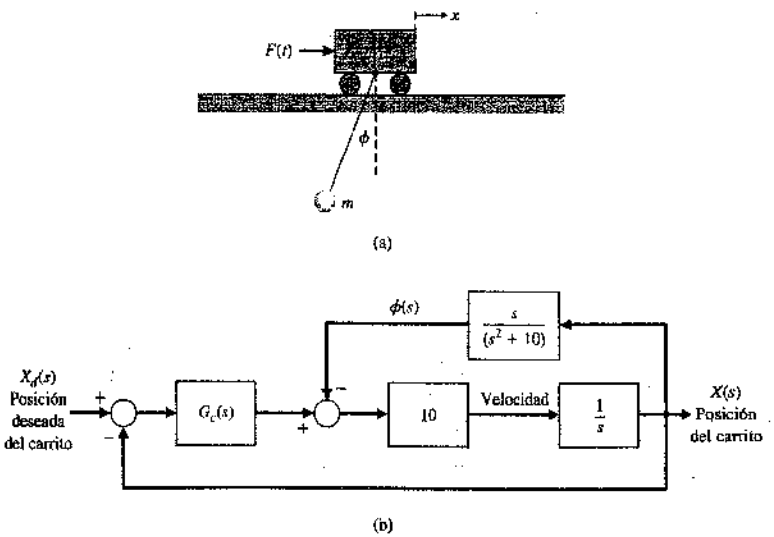
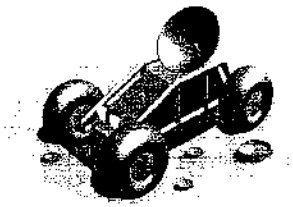
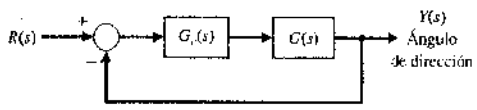


FIGURA PD7.10
(a) Sistema de control de una grúa piloto.
(b) Diagrama de bloques.



(a)

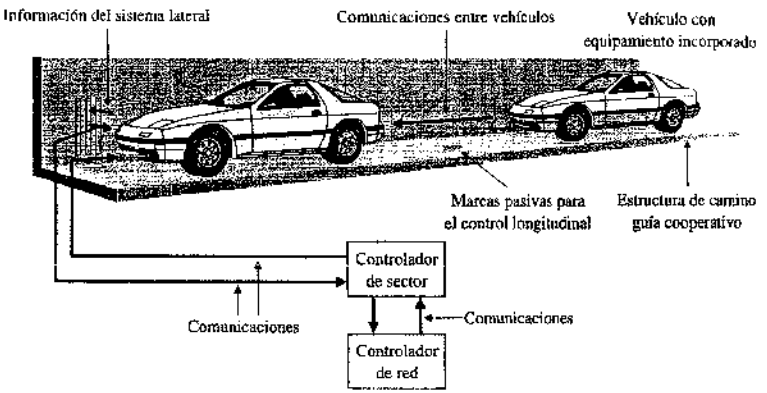


(b)

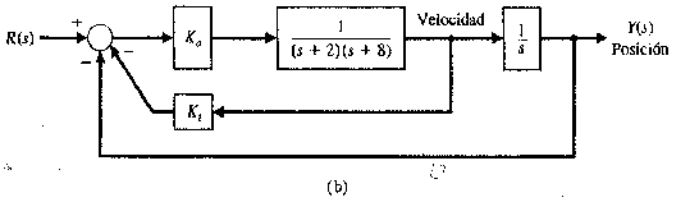
FIGURA PD7.11. (a) Vehículo explorador planetario. (b) Sistema de control de dirección.

PD7.12. Los sistemas electrónicos actualmente equivalen aproximadamente al 6% del valor del coche. Esa cifra se eleva al 20% cuando se incorporan frenos antideslizantes, suspensiones activas y otras tecnologías dependientes del computador. Una gran parte de la potencia de cálculo añadida se utilizará para las nuevas tecnologías en coches y carreteras inteligentes o IVHS (sistemas inteligentes vehículos/autopistas) [14]. Este término se refiere a una diversidad de suministros de electrónica que proporcionan información en tiempo real en accidentes, atascos, cambios de rutas y servicios de asistencia en carretera a los conductores y a los controladores de tráfico. IVHS también abarca dispositivos que harían a los vehículos más autónomos: sistemas para evitar colisiones y tecnología de seguimiento de trayectorias que alerten a los conductores a impedir desastres o permitir que el coche pueda conducir por sí solo.

En la Figura PD7.12(a) se muestra un ejemplo de un sistema de autopista automatizado. En la figura PD7.12(b) se muestra un sistema de control de posición para mantener la distancia entre vehículos. Selecciónense K_a y K_t de forma que el error en estado estacionario para una entrada en rampa sea menor que el 25% de la magnitud de entrada, A, de la rampa $R(s) = A/s^2$. La respuesta a una orden en escalón debería tener una sobreelongación menor que el 3% y un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) menor que 1.5 segundos.



(a)



(b)

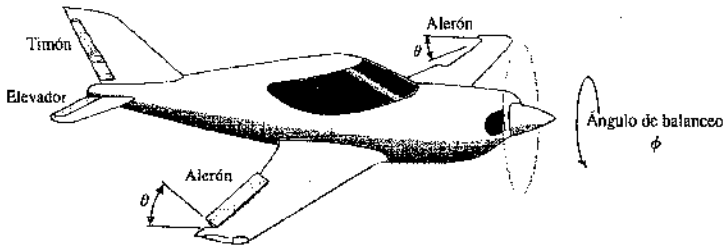
FIGURA PD7.12
(a) Sistema de autopista automatizada.
(b) Sistema de control de distancia de vehículos.

PD7.13. El control automático de un aeroplano es un ejemplo que requiere métodos de realimentación con múltiples variables. En este sistema, la altitud de un avión se controla mediante tres conjuntos de elevadores de superficie, un timón y alerones, tal como se muestra en la Figura PD7.13(a). Manipulando estas superficies, un piloto puede colocar al avión sobre una trayectoria de vuelo deseada [20].

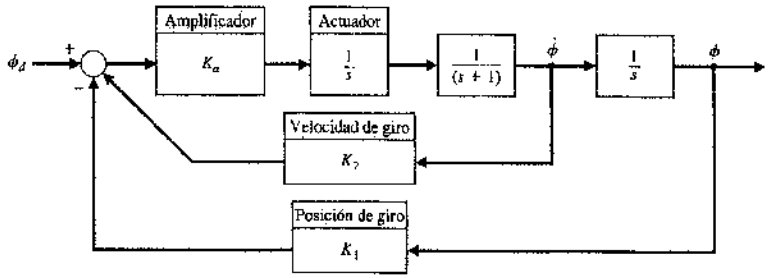
Un autopiloto, que se considerará aquí, es un sistema de control automático que controla el ángulo de balanceo ϕ ajustando las superficies de los alerones. La deflexión de las superficies de los alerones en un ángulo θ genera un par debido a la presión del aire sobre estas superficies. Esto origina un movimiento de balanceo del avión. Las superficies de los alerones se controlan mediante un actuador hidráulico con una función de transferencia $1/s$.

El ángulo real de cabeceo ϕ se mide y se compara con la entrada. La diferencia entre el ángulo de cabeceo deseado ϕ_d y el ángulo real ϕ moverá al actuador hidráulico, que a su vez ajusta la deflexión de las superficies de los alerones.

En la Figura PD7.13(b) se muestra el diagrama de bloques de un modelo simplificado donde el movimiento de cabeceo se puede considerar independiente. Supóngase que $K_1 = 1$ y que el ángulo de cabeceo ϕ se realimenta utilizando un sensor de velocidad. La respuesta escalón deseada tiene una sobreelongación menor que el 10% y un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) menor que 9 segundos. Selecciónense los parámetros K_a y K_2.



(a)



(b)

FIGURA PD7.13. (a) Avión con un conjunto de alerones. (b) Diagrama de bloques para controlar la velocidad de balanceo del avión.

PROBLEMAS CON MATLAB

PM7.1. Utilizando la función rlocus, obténganse los lugares de las raíces para las siguientes funciones de transferencia del sistema que se muestra en la Figura PM7.1 cuando $0 < K < \infty$:

(a) $G(s) = \dfrac{10}{s^3 - 14s^2 + 43s + 30}$

(b) $G(s) = \dfrac{s + 20}{s^2 + 5s + 20}$

(c) $G(s) = \dfrac{s^2 + s + 1}{s(s^2 + 5s + 10)}$

(d) $G(s) = \dfrac{s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 8s^2 + 6s + 4}{s^6 + 2s^5 + 2s^4 + s^3 + s^2 + 10s + 1}$

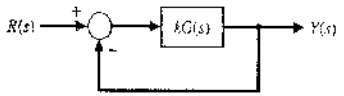


FIGURA PM7.1. Sistema realimentado de lazo simple con parámetro K.

PM7.2. Un sistema con realimentación negativa unitaria tiene la función de transferencia de lazo abierto

$$KG(s) = K\frac{(s^2 - 2s + 2)}{s(s^2 + 3s + 2)}.$$

Utilizando MATLAB, dibújese el lugar de las raíces y muéstrese con la función rlocfind que el valor máximo de K para un sistema estable es $K = 0.79$.

PM7.3. Calcúlese el desarrollo en fracciones simples de

$$Y(s) = \frac{s + 2}{s(s^2 + 6s + 5)}$$

y verifíquese el resultado con MATLAB utilizando la función residue.

PM7.4. Un sistema con realimentación negativa unitaria tiene la función de transferencia de lazo abierto

$$G(s) = \frac{(1 - p)s - p}{s^2 + 3s + 6}.$$

Utilizando MATLAB, obténgase el lugar de las raíces cuando p varía, $0 < p < \infty$. ¿Para qué valores de p el lazo cerrado es estable?

PM7.5. Considérese el sistema realimentado que se muestra en la Figura PM7.1, donde

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2}.$$

¿Para qué valor de K los polos dominantes en lazo cerrado tienen $\zeta = 0.707$?

PM7.6. Considérese el sistema de control realimentado de la Figura PM7.6. Se tienen tres controladores potenciales para este sistema:

1. $G_c(s) = K$ (controlador proporcional)
2. $G_c(s) = K/s$ (controlador integral)
3. $G_c(s) = K(1 + 1/s)$ [controlador proporcional integral (PI)]

Las especificaciones de diseño son $T_s \leq 10$ segundos y P.O. $\leq 10\%$ para una entrada de escalón unitario.

(a) Para el controlador proporcional, dibújese el lugar de las raíces utilizando MATLAB para $0 < K < \infty$, y determínese el valor de K para que se satisfagan las especificaciones de diseño.
(b) Repítase el apartado (a) para el controlador integral.
(c) Repítase el apartado (a) para el controlador PI.
(d) Dibújense las respuestas a un escalón unitario para los sistemas de lazo cerrado diseñados en los apartados (a)-(c).
(e) Compárense y contrástense los tres controladores obtenidos en los apartados (a)-(c); céntrese en los errores de estado estacionario y en el comportamiento del transitorio.

PM7.7. Considérese el sistema de control de posición en un solo eje de una nave que se muestra en la Figura PM7.7. El controlador utilizado se conoce con el nombre de controlador proporcional derivativo (PD). Supóngase que se requiere la razón $K_1/K_2 = 5$. Por tanto, utilizando los métodos del lugar de las raíces de MATLAB, calcúlense los valores de K_2/J y K_1/J para que el tiempo de asentamiento, T_s, sea inferior o igual a 4 segundos, y el pico de sobreelongación, P.O., sea menor o igual al 10% para una entrada de escalón unitario. Utilícese un criterio del 2% para determinar el tiempo de asentamiento.

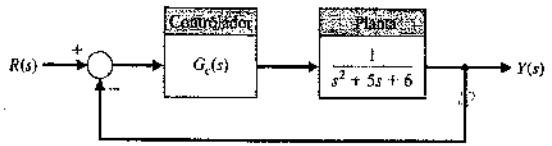


FIGURA PM7.6
Sistema realimentado de lazo simple con controlador $G_c(s)$

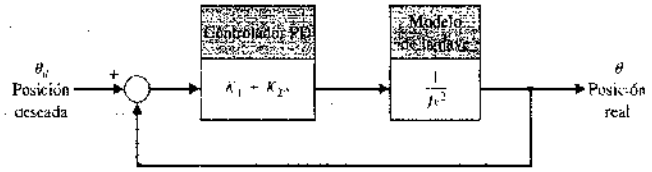


FIGURA PM7.7
Sistema de control de posición de una nave con un controlador proporcional derivativo.

PM7.8. Considérese el sistema de control realimentado de la Figura PM7.8. Utilizando MATLAB, dibújese el lugar de las raíces para $0 < K < \infty$. Calcúlese el valor de K que dé como resultado una razón de amortiguamiento para los polos en lazo cerrado igual a 0.707.

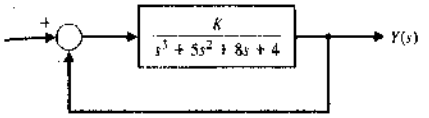


FIGURA PM7.8. Sistema con realimentación unitaria con parámetro K.

PM7.9. Considérese el sistema representado en variables de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -2 - k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad -9 \quad 12] \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = [0].$$

(a) Determínese la ecuación característica. (b) Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz, determínense los valores de k para los cuales el sistema es estable. (c) Utilizando MATLAB, dibújese el lugar de las raíces y compárense los resultado con los obtenidos en (b).

TÉRMINOS Y CONCEPTOS

Ángulo de las asíntotas. Ángulo que la asíntota forma con respecto al eje real, ϕ_A.

Ángulo de salida. Ángulo en el cual un lugar deja un polo complejo en el plano s.

Asíntota. Trayectoria que el lugar de las raíces sigue cuando el parámetro se hace muy grande y se aproxima a infinito. El número de asíntotas es igual al número de polos menos el número de ceros.

Asíntota centroide. Centro de las asíntotas lineales, σ_A.

Contornos de raíces. Familia del lugar que representa el efecto de variar dos parámetros sobre las raíces de la ecuación característica.

Controlador PID. Controlador ampliamente utilizado en la industria de la forma $G_c(s) = K_p + \dfrac{K_I}{s} + K_D s$, donde K_p es la ganancia proporcional, K_I la ganancia integral y K_D la ganancia derivativa.

Controlador proporcional + derivativo (PD). Controlador de dos términos de la forma $G_c(s) = K_p + K_D s$, donde K_p es la ganancia proporcional y K_D la ganancia derivativa.

Controlador proporcional + integral (PI). Controlador de dos términos de la forma $G_c(s) = K_p + \dfrac{K_I}{s}$, donde K_p es la ganancia proporcional y K_I la ganancia integral.

Diseño de parámetro. Método de selección de uno o dos parámetros utilizando el método del lugar de las raíces.

Lugar. Camino o trayectoria que se traza cuando cambia un parámetro.

Lugar de las raíces. Lugar o camino de las raíces trazado sobre el plano s cuando se varía un parámetro.

Método del lugar de las raíces. Método para determinar el lugar de las raíces de la ecuación característica $1 + KP(s)$ cuando K varía de 0 a infinito.

Número de lugares separados. Igual al número de polos de la función de transferencia, suponiendo que el número de polos es mayor o igual que el número de ceros de la función de transferencia.

Punto de salida. Punto sobre el eje real donde el lugar sale desde el eje real del plano s.

Raíces dominantes. Raíces de la ecuación característica que representan o dominan la respuesta transitoria de lazo cerrado.

Segmentos del lugar de las raíces sobre el eje real. Lugar de las raíces situado en una sección del eje real a la izquierda de un número impar de polos y ceros.

Sensibilidad de las raíces. Sensibilidad de las raíces cuando un parámetro cambia su valor normal. La sensibilidad de las raíces es el cambio incremental en la raíz dividido entre el cambio proporcional del parámetro.

Sensibilidad logarítmica. Medida de la sensibilidad del comportamiento del sistema a cambios de parámetros específicos, dada por $S_K^T(s) = \dfrac{\partial T(s)/T(s)}{\partial K/K}$, donde $T(s)$ es la función de transferencia del sistema y K es el parámetro de interés.

CAPÍTULO 8

Métodos de respuesta de frecuencia

8.1. Introducción 433
8.2. Gráficas de la respuesta en frecuencia 435
8.3. Un ejemplo del trazado del diagrama de Bode 452
8.4. Medidas de la respuesta en frecuencia 456
8.5. Especificaciones de comportamiento en el dominio de la frecuencia 458
8.6. Diagrama de magnitud logarítmica y de fase 461
8.7. Ejemplo de diseño: Sistema de control de una máquina de estampación 461
8.8. Métodos de respuesta en frecuencia utilizando MATLAB 465
8.9. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 471
8.10. Resumen 472

SINOPSIS

En los capítulos anteriores se estudió el uso de señales de prueba tales como una entrada escalón y una entrada rampa. En este tema se considera la respuesta en estado estacionario de un sistema frente a una entrada sinusoidal. Se verá que la respuesta de un sistema lineal de coeficientes constantes a una entrada sinusoidal es una señal sinusoidal de la misma frecuencia que la entrada. Sin embargo, la magnitud y la fase de la señal de salida difieren de las de la señal de entrada, siendo tal diferencia una función de la frecuencia de entrada. Por lo tanto, se estudiará la respuesta en estado estacionario de un sistema a una entrada sinusoidal cuando la frecuencia varía.

Se examinará la función de transferencia $G(s)$ cuando $s = j\omega$ y se desarrollarán métodos que muestran gráficamente el número complejo $G(j\omega)$ cuando ω varía. El diagrama de Bode es una de las herramientas básicas más potentes para analizar y diseñar sistemas de control, y este tema se tratará en este capítulo. También se considerarán diagramas polares y diagramas de magnitud logarítmica y fase. Se desarrollarán distintas medidas de comportamiento en el dominio temporal en función de la respuesta en frecuencia del sistema; además se introduce el concepto de ancho de banda del sistema. El capítulo finaliza con un análisis de la respuesta en frecuencia del Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco.

8.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se describió la respuesta y el comportamiento de un sistema en función de la variable compleja de frecuencia s y la localización de los polos y ceros en el plano s. Un camino alternativo muy práctico e importante para el análisis y diseño de un sistema es el método de la **respuesta en frecuencia**.

La respuesta en frecuencia de un sistema se define como la respuesta del sistema en el estado estacionario a una señal sinusoidal de entrada. La sinusoide es una señal de entrada única. La señal de salida resultante para un sistema lineal de una señal que las señales a través del sistema es sinusoidales en el estado estacionario difiere de la forma de onda de entrada solamente en amplitud y ángulo de fase.

Por ejemplo, se considera el sistema $Y(s) = T(s)R(s)$ con $r(t) = A \operatorname{sen} \omega t$. Se tiene

$$R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

y

$$T(s) = \frac{m(s)}{q(s)} = \frac{m(s)}{\prod_{i=1}^{n} (s + p_i)},$$

donde se supone que p_i son polos distintos. Entonces, en fracciones parciales, se tiene

$$Y(s) = \frac{k_1}{s + p_1} + \cdots + \frac{k_n}{s + p_n} + \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2}.$$

Tomando la transformada de Laplace inversa se obtiene

$$y(t) = k_1 e^{-p_1 t} + \cdots + k_n e^{-p_n t} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2}\right\},$$

donde α y β son constantes que dependen del problema. Si el sistema es estable, entonces todos los p_i tienen parte real distinta de cero y positiva y

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{t \to \infty} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2}\right\},$$

puesto que cada término exponencial $k_i e^{-p_i t}$ decae a cero cuando $t \to \infty$.

En el límite para $y(t)$, se obtiene, para $t \to \infty$ (el estado estacionario),

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2}\right] \\ &= \frac{1}{\omega}\left|A\omega T(j\omega)\right| \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \\ &= A|T(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \end{aligned} \tag{8.1}$$

donde $\phi = \underline{/T(j\omega)}$.

Por lo tanto, la señal de salida en estado estacionario depende sólo de la magnitud y de la fase de $T(j\omega)$ a una frecuencia ω específica. Obsérvese que la respuesta en estado estacionario, tal y como describe la Ecuación (8.1), es sólo cierta para sistemas $T(s)$ estables.

Una ventaja del método de la respuesta de frecuencia es la fácil disponibilidad de señales de prueba sinusoidales para diversos intervalos de frecuencias y amplitudes. Por esto, se realiza fácilmente la determinación experimental de la respuesta de frecuencia de un sistema y es el método más seguro y sencillo para el análisis experimental de un sistema. Frecuentemente, como se verá en la Sección 8.4, la función de transferencia desconocida de un sistema puede deducirse a partir de su respuesta en frecuencia determinada experimentalmente [1, 2]. Además, el diseño de un sistema en el dominio de la frecuencia proporciona al diseñador un control del ancho de banda y alguna medida de la respuesta del sistema a ruidos y perturbaciones que no son deseados.

Una segunda ventaja de este método es que puede obtenerse la función de transferencia que describe el comportamiento sinusoidal en el estado estacionario de un sistema, reemplazando s por $j\omega$ en la función de transferencia del sistema $T(s)$. La función de transferencia que representa el comportamiento sinusoidal en el estado estacionario de un sistema es, entonces, una función de la variable compleja $j\omega$ y de su propia función compleja $T(j\omega)$ que tiene una magnitud y un ángulo de fase. La magnitud y el ángulo de fase de $T(j\omega)$ se representan fácilmente mediante gráficas que proporcionan un conocimiento significativo para el análisis y diseño de sistemas de control.

La desventaja básica de este método para el análisis y diseño es el vínculo indirecto entre los dominios del tiempo y de la frecuencia. Las correlaciones directas entre las características de la respuesta en frecuencia y las correspondientes características de la respuesta transitoria son algo débiles y, en la práctica, la característica de la respuesta de frecuencia se ajusta usando diversos criterios de diseño que normalmente dan como resultado una respuesta transitoria satisfactoria.

El **par de transformadas de Laplace** se presentó en la Sección 2.4; se escribe como

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \tag{8.2}$$

y

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\,ds, \tag{8.3}$$

donde la variable compleja $s = \sigma + j\omega$. De forma semejante, el **par de transformadas de Fourier** se escribe como

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{8.4}$$

y

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega. \tag{8.5}$$

La transformada de Fourier existe para $f(t)$ cuando

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty.$$

Las transformadas de Fourier y de Laplace están estrechamente relacionadas, como se puede ver al examinar las Ecuaciones (8.2) y (8.4). Cuando la función $f(t)$ se define sólo para $t \geq 0$, como sucede con frecuencia, los límites inferiores en las integrales son los mismos. Entonces las dos ecuaciones difieren solamente en la variable compleja. Por esto, si se sabe que la transformada de Laplace de una función $f_1(t)$ es $F_1(s)$, se puede obtener la transformada de Fourier $F_1(j\omega)$ de esta misma función del tiempo, haciendo $s = j\omega$ en $F_1(s)$ [3].

Nuevamente se puede cuestionar: puesto que las transformadas de Fourier y Laplace están tan estrechamente relacionadas, ¿por qué no usar siempre la transformada de Laplace? ¿Por qué usar la transformada de Fourier? La transformada de Laplace permite investigar en el plano s la localización de los polos y ceros de una función de transferencia $T(s)$, como se vio en el Capítulo 7. Sin embargo, el método de la respuesta de frecuencia permite considerar la función de transferencia $T(j\omega)$ y la relaciona con las características de amplitud y fase del sistema. Esta capacidad para investigar y representar el carácter de un sistema por las ecuaciones y curvas de amplitud y fase es una ventaja para el análisis y diseño de los sistemas de control.

Si se considera la respuesta de frecuencia del sistema de lazo cerrado, se podría tener una entrada $r(t)$ que tenga una transformada de Fourier en el dominio de la frecuencia, como sigue:

$$R(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j\omega t}\,dt.$$

Entonces se puede obtener la respuesta en frecuencia de salida de un sistema de control de lazo simple, sustituyendo $s = j\omega$ en la relación del sistema de lazo cerrado, $Y(s) = T(s)R(s)$, de forma que se tiene

$$Y(j\omega) = T(j\omega)R(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + (j\omega)H(j\omega)}\,R(j\omega). \tag{8.6}$$

Si se utilizara la transformada inversa de Fourier, la respuesta de salida transitoria sería

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega. \tag{8.7}$$

Sin embargo, generalmente es muy difícil calcular esta integral de la transformada inversa para cualquier sistema, excepto para los más simples; puede usarse una integración gráfica. Como alternativa, tal y como se observará en las secciones siguientes, pueden relacionarse varias medidas de la respuesta transitoria con las características de frecuencia y utilizarlas a efectos de diseño.

8.2. GRÁFICAS DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA

La función de transferencia de un sistema $G(s)$ puede describirse en el dominio de la frecuencia por la relación

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = R(\omega) + jX(\omega), \tag{8.8}$$

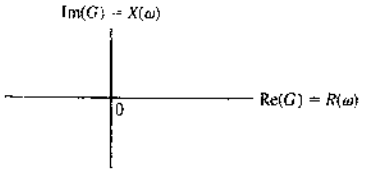


FIGURA 8.1
El plano polar.

donde

$$R(\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] \quad \text{y} \quad X(\omega) = \text{Im}[G(j\omega)].$$

Alternativamente, la función de transferencia puede representarse por una magnitud $|G(j\omega)|$ y una fase $\phi(j\omega)$ como

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(j\omega)} = |G(\omega)|\underline{/\phi(\omega)}, \tag{8.9}$$

donde

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \quad \text{y} \quad |G(\omega)|^2 = [R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2.$$

La representación gráfica de la respuesta de frecuencia del sistema $G(j\omega)$ puede utilizar cualquiera de las Ecuaciones (8.8) o (8.9). La representación **gráfica polar** de la respuesta de frecuencia se obtiene usando la Ecuación (8.8). Como se muestra en la Figura 8.1, las coordenadas de la gráfica polar son las partes real e imaginaria de $G(j\omega)$. Un ejemplo de gráfica polar ilustrará este método.

EJEMPLO 8.1. Respuesta en frecuencia de un filtro *RC*

En la Figura 8.2 se muestra un filtro simple *RC*. Su función de transferencia es

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1}, \tag{8.10}$$

y la función de transferencia sinusoidal en estado estacionario es

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(RC) + 1} = \frac{1}{j(\omega/\omega_1) + 1}, \tag{8.11}$$

donde

$$\omega_1 = \frac{1}{RC}.$$

Entonces la gráfica polar se obtiene mediante la relación

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= R(\omega) + jX(\omega) \\ &= \frac{1 - j(\omega/\omega_1)}{(\omega/\omega_1)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{1 + (\omega/\omega_1)^2} - \frac{j(\omega/\omega_1)}{1 + (\omega/\omega_1)^2}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

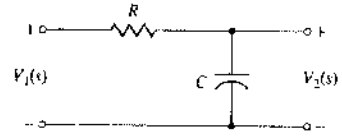


FIGURA 8.2. Un filtro *RC*.

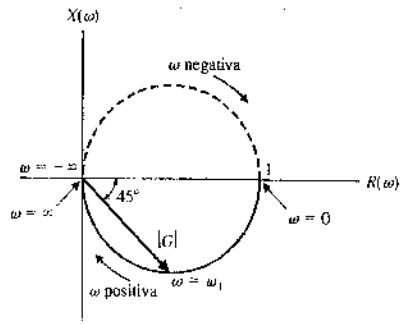


FIGURA 8.3. Diagrama polar de un filtro *RC*.

El primer paso consiste en determinar $R(\omega)$ y $X(\omega)$ en las dos frecuencias, $\omega = 0$ y $\omega = \infty$. En $\omega = 0$, se tiene $R(\omega) = 1$ y $X(\omega) = 0$. En $\omega = \infty$, se tiene $R(\omega) = 0$ y $X(\omega) = 0$. Estos dos puntos se muestran en la Figura 8.3. Además, en esta figura se muestra el lugar geométrico de las partes real e imaginaria, y fácilmente se demuestra que es un círculo con centro en (1/2, 0). Cuando $\omega = \omega_1$, las partes real e imaginaria son iguales y el ángulo $\phi(\omega) = 45°$. La gráfica polar también se puede obtener fácilmente a partir de la Ecuación (8.9) como

$$G(j\omega) = |G(\omega)|\underline{/\phi(\omega)}, \tag{8.13}$$

donde

$$|G(\omega)| = \frac{1}{[1 + (\omega/\omega_1)^2]^{1/2}} \quad \text{y} \quad \phi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega/\omega_1).$$

Evidentemente, cuando $\omega = \omega_1$, la magnitud es $|G(\omega_1)| = 1/\sqrt{2}$ y la fase es $\phi(\omega_1) = -45°$. Así mismo, cuando ω se aproxima a $+\infty$, se tiene $|G(\omega)| \to 0$ y $\phi(\omega) = -90°$. De manera análoga, cuando $\omega = 0$, se tiene $|G(\omega)| = 1$ y $\phi(\omega) = 0$. ■

EJEMPLO 8.2. Diagrama polar de una función de transferencia

El diagrama polar de una función de transferencia será útil para investigar la estabilidad del sistema y se utilizará en el Capítulo 9. Por tanto, en este punto vale la pena estudiar otro ejemplo. Considérese una función de transferencia

$$G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega\tau + 1)} = \frac{K}{j\omega - \omega^2\tau}. \tag{8.14}$$

Entonces la magnitud y el ángulo de fase se escriben como

$$|G(\omega)| = \frac{K}{(\omega^2 + \omega^4\tau^2)^{1/2}} \quad \text{y} \quad \phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{-\omega\tau}\right).$$

El ángulo de fase y la magnitud se calculan fácilmente en las frecuencias $\omega = 0$, $\omega = 1/\tau$ y $\omega = +\infty$. En la Tabla 8.1 se dan los valores de $|G(\omega)|$ y $\phi(\omega)$, y en la Figura 8.4 se muestra el diagrama polar de $G(j\omega)$.

Tabla 8.1

ω	0	$1/2\tau$	$1/\tau$	∞
$\lvert G(\omega)\rvert$	∞	$4K\tau/\sqrt{5}$	$K\tau/\sqrt{2}$	0
$\phi(\omega)$	$-90°$	$-117°$	$-135°$	$-180°$

Una solución alternativa utiliza las partes real e imaginaria de $G(j\omega)$ como

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega - \omega^2\tau} = \frac{K(-j\omega - \omega^2\tau)}{\omega^2 + \omega^4\tau^2} = R(\omega) + jX(\omega), \tag{8.15}$$

donde $R(\omega) = -K\omega^2\tau/M(\omega)$ y $X(\omega) = -j\omega K/M(\omega)$ y $M(\omega) = \omega^2 + \omega^4\tau^2$. Entonces cuando $\omega = +\infty$, se tiene $R(\omega) = 0$ y $X(\omega) = 0$. Cuando $\omega = 0$, se tiene $R(\omega) = -K\tau$ y $X(\omega) = -\infty$. Cuando $\omega = 1/\tau$, se tiene $R(\omega) = -K\tau/2$ y $X(\omega) = -jK\tau/2$, como se muestra en la Figura 8.4.

Otro método para obtener el diagrama polar consiste en evaluar el vector $G(j\omega)$ gráficamente en determinadas frecuencias, ω, a lo largo del eje $s = j\omega$ en el plano s. Si se considera

$$G(s) = \frac{K/\tau}{s(s + 1/\tau)}$$

con los dos polos que se muestran en la Figura 8.5.

Cuando $s = j\omega$, se tiene

$$G(j\omega) = \frac{K/\tau}{j\omega(j\omega + p)},$$

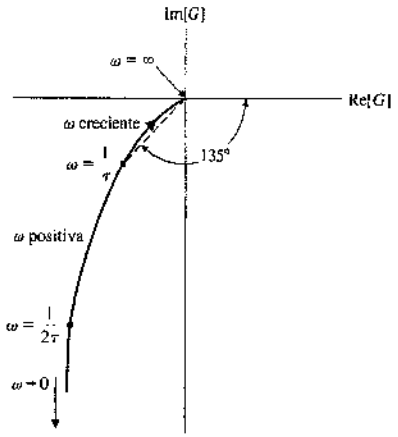


FIGURA 8.4. Diagrama polar de $G(j\omega) = K/j\omega(j\omega\tau + 1)$. Obsérvese que $\omega = \infty$ en el origen.

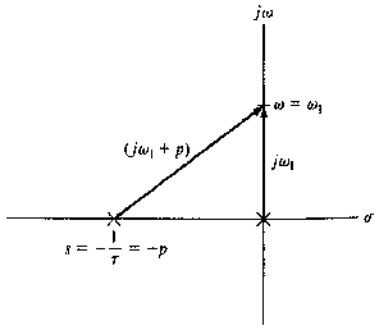


FIGURA 8.5. Dos vectores en el plano s para evaluar $G(j\omega_1)$.

donde $p = 1/\tau$. Tal y como se muestra en la Figura 8.5, la magnitud y la fase de $G(j\omega)$ se puede evaluar en una frecuencia determinada, ω_1, del eje $j\omega$. La magnitud y la fase son, respectivamente,

$$|G(\omega_1)| = \frac{K/\tau}{|j\omega_1||j\omega_1 + p|}$$

y

$$\phi(\omega) = -\underline{/(j\omega_1)} - \underline{/(j\omega_1 + p)} = -90° - \tan^{-1}(\omega_1/p). \quad \blacksquare$$

Hay distintas posibilidades para las coordenadas de una gráfica que represente la respuesta de frecuencia de un sistema. Como hemos visto, podemos elegir el uso de una gráfica polar para representar la respuesta de frecuencia de un sistema [Ecuación (8.8)]. Sin embargo, las limitaciones de las gráficas polares se notan fácilmente. Como se esbozó en los Ejemplos 8.1 y 8.2, la adición de polos y ceros a un sistema existente requiere calcular de nuevo la respuesta de frecuencia. (*Véase* la Tabla 8.1.) Además, el cálculo de la respuesta de frecuencia en esta forma es tedioso y no indica el efecto de los polos o ceros individuales.

Por tanto, la introducción de **gráficas logarítmicas**, frecuentemente conocidas como **gráficas de Bode**, simplifica la determinación de una descripción gráfica de la respuesta de frecuencia. A las gráficas logarítmicas se les da el nombre de Bode en honor de H. W. Bode, quien las utilizó mucho en sus estudios de amplificadores con realimentación [4, 5]. La función de transferencia en el dominio de la frecuencia es

$$G(j\omega) = |G(\omega)|e^{j\phi(\omega)}. \tag{8.16}$$

El logaritmo de la magnitud normalmente se expresa en función del logaritmo de base 10, de forma que se usa

$$\boxed{\text{Ganancia logarítmica} = 20\log_{10}|G(\omega)|,} \tag{8.17}$$

donde las unidades son los decibelios (dB). En la web del MCS se presenta una tabla de conversiones de decibelios. La ganancia logarítmica en dB y el ángulo $\phi(\omega)$ pueden dibujarse frente a la frecuencia ω de diferentes formas. Para un diagrama de Bode, la gráfica de la ganancia logarítmica en dB frente a ω normalmente se representa en un conjunto de ejes y la fase $\phi(\omega)$ frente a ω en otro distinto, como se muestra en la Figura 8.6. Por ejemplo, el diagrama de Bode para la función de transferencia del Ejemplo 8.1 puede obtenerse fácilmente, como se estudia en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8.3. Diagrama de Bode de un filtro *RC*

La función de transferencia del Ejemplo 8.1 es

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(RC) + 1} = \frac{1}{j\omega\tau + 1}, \tag{8.18}$$

donde

$$\tau = RC$$

es la constante de tiempo de la red. La ganancia logarítmica es

$$20\log|G| = 20\log\left(\frac{1}{1 + (\omega\tau)^2}\right)^{1/2} = -10\log(1 + (\omega\tau)^2). \tag{8.19}$$

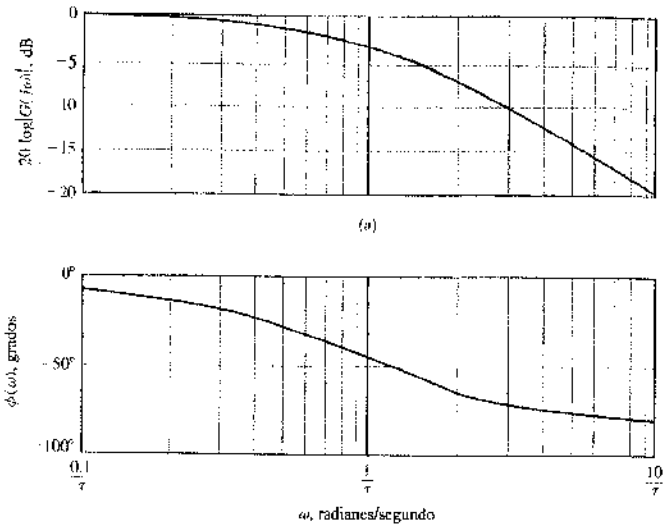


FIGURA 8.6
Diagrama de Bode para $G(j\omega) = 1/(j\omega\tau + 1)$: (a) gráfica de la magnitud y (b) gráfica de la fase.

Para frecuencias bajas, esto es, $\omega \ll 1/\tau$, la ganancia logarítmica es

$$20 \log |G| = -10 \log (1) = 0 \text{ dB}, \qquad \omega \ll 1/\tau. \tag{8.20}$$

Para frecuencias altas, esto es, $\omega \gg 1/\tau$, la ganancia logarítmica es

$$20 \log |G| = -20 \log \omega\tau \qquad \omega \gg 1/\tau, \tag{8.21}$$

y en $\omega = 1/\tau$, se tiene

$$20 \log |G| = -10 \log 2 = -3.01 \text{ dB}.$$

En la Figura 8.6(a) se muestra la gráfica de magnitud para esta red. El ángulo de fase de esta red es

$$\phi(j\omega) = -\tan^{-1} \omega\tau. \tag{8.22}$$

La representación gráfica de la fase se muestra en la Figura 8.6(b). La frecuencia $\omega = 1/\tau$ se conoce frecuentemente como **frecuencia de corte** o **frecuencia esquina**. ■

Una escala lineal de frecuencia no es la elección más conveniente o acertada y se debe considerar el uso de una escala logarítmica de frecuencia. La conveniencia de esta escala puede verse considerando la Ecuación (8.21) para frecuencias altas $\omega \gg 1/\tau$, como sigue:

$$20 \log |G| = -20 \log \omega\tau = -20 \log \tau - 20 \log \omega. \tag{8.23}$$

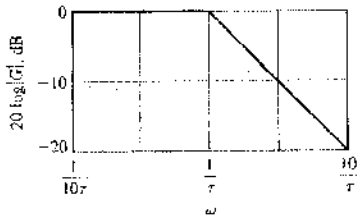


FIGURA 8.7
Curva asintótica de $(j\omega\tau + 1)^{-1}$.

Entonces, en un conjunto de ejes donde el eje horizontal es log ω, la curva asintótica para $\omega \gg 1/\tau$ es una recta, como se muestra en la Figura 8.7. La pendiente de esta recta puede obtenerse a partir de la Ecuación (8.21). Una intervalo entre dos frecuencias con una relación igual a 10 se conoce como **década**, de forma que al rango de frecuencias de ω_1 a ω_2, donde $\omega_2 = 10\omega_1$, se le da el nombre de década. Entonces, la diferencia entre las ganancias logarítmicas para $\omega \gg 1/\tau$, sobre una década de frecuencia es

$$\begin{aligned} 20 \log |G(\omega_1)| - 20 \log |G(\omega_2)| &= -20 \log \omega_1\tau - (-20 \log \omega_2\tau) \\ &= -20 \log \frac{\omega_1\tau}{\omega_2\tau} \\ &= -20 \log (1/10) = +20 \text{ dB}; \end{aligned} \tag{8.24}$$

esto es, la pendiente de la línea asintótica para esta función de transferencia de primer orden es −20 db/década y en la Figura 8.7 se muestra la pendiente para esta función. En lugar de usar un eje horizontal de log ω y coordenadas rectangulares lineales, es más sencillo usar un papel semilogarítmico con una coordenada rectangular lineal para los dB y una coordenada logarítmica para ω. Alternativamente, se puede usar una coordenada logarítmica para la magnitud y para la frecuencia, y evitar la necesidad de calcular el logaritmo de la magnitud.

El intervalo de frecuencias $\omega_2 = 2\omega_1$ se usa frecuentemente y se conoce como octava de frecuencias. La diferencia entre las ganancias logarítmicas para $\omega \gg 1/\tau$, para una octava, es

$$\begin{aligned} 20 \log |G(\omega_1)| - 20 \log |G(\omega_2)| &= -20 \log \frac{\omega_1\tau}{\omega_2\tau} \\ &= -20 \log (1/2) = 6.02 \text{ dB}. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Por tanto, la pendiente de la línea asintótica es −20 dB/década.

La ventaja principal de la representación gráfica logarítmica es la conversión de factores multiplicativos como $(j\omega\tau + 1)$ en factores aditivos 20 log $(j\omega\tau + 1)$, por la definición de ganancia logarítmica. Esto puede obtenerse fácilmente si se considera una función de transferencia generalizada como

$$G(j\omega) = \frac{K_b \prod_{i=1}^{Q} (1 + j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N \sum_{m=1}^{M} (1 + j\omega\tau_m) \prod_{k=1}^{R} [(1 + (2\zeta_k/\omega_{n_k})j\omega + (j\omega/\omega_{n_k})^2)]}. \tag{8.26}$$

Esta función de transferencia incluye Q ceros, N polos en el origen, M polos en el eje real y R pares de polos conjugados complejos. Evidentemente, obtener la gráfica polar de tal función sería una labor verdaderamente formidable. Sin embargo, la magnitud logarítmica de $G(j\omega)$ es

$$20\log|G(\omega)| = 20\log K_b + 20\sum_{i=1}^{Q}\log|1+j\omega\tau_i| - 20\log|(j\omega)^N| - 20\sum_{m=1}^{M}\log|1+j\omega\tau_m| - 20\sum_{k=1}^{R}\log\left|1+\left(\frac{2\zeta_k}{\omega_{n_k}}\right)j\omega+\left(\frac{j\omega}{\omega_{n_k}}\right)^2\right|, \tag{8.27}$$

y el diagrama de Bode se puede obtener sumando la gráfica debida a cada factor individual. Además, la gráfica del ángulo de fase separada se obtiene como

$$\phi(\omega) = +\sum_{i=1}^{Q}\tan^{-1}\omega\tau_i - N(90^\circ) - \sum_{m=1}^{M}\tan^{-1}\omega\tau_m - \sum_{k=1}^{R}\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta_k\omega_{n_k}\omega}{\omega_{n_k}^2-\omega^2}\right), \tag{8.28}$$

que es simplemente la suma de los ángulos de fase debidos a cada factor individual de la función de transferencia.

Por tanto, las cuatro clases diferentes de factores que pueden encontrarse en una función de transferencia son las siguientes:

1. Ganancia constante K_b.
2. Polos (o ceros) en el origen $(j\omega)$.
3. Polos (o ceros) en el eje real $(j\omega\tau + 1)$.
4. Polos (o ceros) complejos conjugados $[1 + (2\zeta/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]$.

Se puede determinar la gráfica logarítmica de la magnitud y el ángulo de fase para estos cuatro factores y luego utilizarlos para obtener un diagrama de Bode para cualquier forma general de una función de transferencia. Normalmente, se obtienen las curvas para cada factor y luego se suman gráficamente para obtener las curvas de la función de transferencia completa. Además, este procedimiento puede simplificarse usando las aproximaciones asintóticas a estas curvas y obteniendo únicamente las curvas reales en frecuencias específicas importantes.

Ganancia constante K_b. La ganancia logarítmica para la constante K_b es

$$\boxed{20\log K_b = \text{constante en dB},}$$

y el ángulo de fase es

$$\boxed{\phi(\omega) = 0.}$$

La curva de ganancia es simplemente una línea horizontal en el diagrama de Bode.

Si la ganancia es un valor negativo, $-K_b$, la ganancia logarítmica es $20\log K_b$. El signo negativo se tiene en cuenta en el ángulo de fase, -180°.

Polos (o ceros) en el origen $(j\omega)$. Un polo en el origen tiene una magnitud logarítmica

$$\boxed{20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega \text{ dB}} \tag{8.29}$$

y un ángulo de fase

$$\boxed{\phi(\omega) = -90^\circ.}$$

La pendiente de la curva de magnitud es -20 dB/década para un polo. Análogamente, para un polo múltiple en el origen, se tiene

$$\boxed{20\log\left|\frac{1}{(j\omega)^N}\right| = -20N\log\omega,} \tag{8.30}$$

y la fase es

$$\boxed{\phi(\omega) = -90^\circ N.}$$

En este caso la pendiente debida al polo múltiple es $-20N$ dB/década. Para un cero en el origen, se tiene una magnitud logarítmica

$$\boxed{20\log|j\omega| = +20\log\omega,} \tag{8.31}$$

donde la pendiente es $+20$ dB/década y el ángulo de fase es

$$\boxed{\phi(\omega) = +90^\circ.}$$

En la Figura 8.8 se muestra el diagrama de Bode de la magnitud y el ángulo de fase de $(j\omega)^{\pm N}$ para $N = 1$ y $N = 2$.

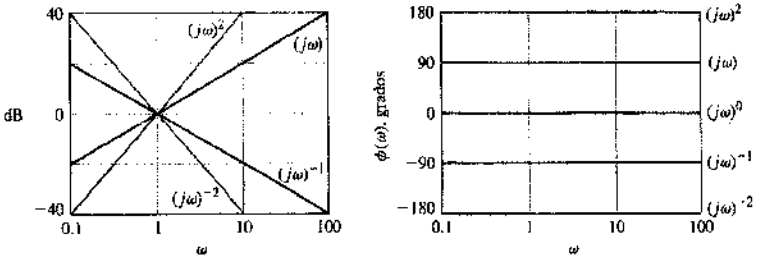


FIGURA 8.8
Diagrama de Bode para $(j\omega)^{\pm N}$.

Polos o ceros en el Eje Real. Se ha considerado primeramente el factor del polo $(1 + j\omega\tau)^{-1}$ y se ha encontrado que para un polo en el eje real,

$$\boxed{20\log\left|\frac{1}{1 + j\omega\tau}\right| = -10\log(1 + \omega^2\tau^2).} \tag{8.32}$$

La curva asintótica para $\omega \ll 1/\tau$ es $20\log 1 = 0$ dB y para $\omega \gg 1/\tau$ es $-20\log\omega\tau$, que tiene una pendiente de -20 dB/década. La intersección de dos asíntotas se presenta cuando

$$20\log 1 = 0 \text{ dB} = -20\log\omega\tau,$$

o cuando $\omega = 1/\tau$, que es la **frecuencia de corte**. La ganancia logarítmica real cuando $\omega = 1/\tau$ es -3 dB para este factor. El ángulo de fase es $\phi(\omega) = -\tan^{-1}\omega\tau$ para el factor del denominador. En la Figura 8.9 se muestra el diagrama de Bode de un factor del polo $(1 + j\omega\tau)^{-1}$.

El diagrama de Bode de un factor de cero $(1 + j\omega\tau)$ se obtiene de la misma forma que para el del polo. Sin embargo, la pendiente es positiva en $+20$ dB/década y el ángulo de fase es $\phi(\omega) = +\tan^{-1}\omega\tau$.

Se puede obtener una aproximación lineal para la curva de ángulo de fase como se muestra en la Figura 8.9. Esta aproximación lineal, que pasa través de la fase correcta en la frecuencia de corte, está dentro de 6° de la curva de fase real para todas las frecuencias. Esta aproximación proporcionará un medio útil para determinar fácilmente la forma de las curvas del ángulo de fase de una función de transferencia $G(s)$. Sin embargo, frecuentemente se necesitan las curvas exactas del ángulo de fase, y se debe dibujar la curva de fase real para el factor de primer orden utilizando un programa como MATLAB.

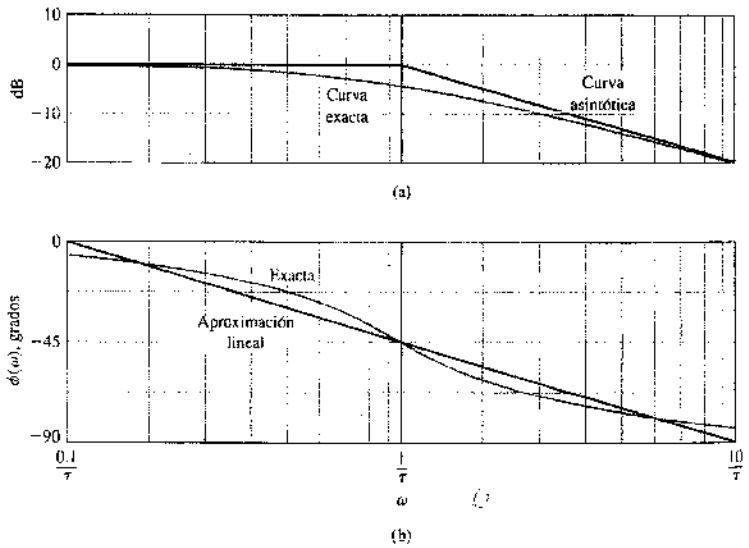


FIGURA 8.9
Diagrama de Bode para $(1 + j\omega\tau)^{-1}$.

Tabla 8.2

$\omega\tau$	0.10	0.50	0.76	1	1.31	2	5	10
$20\log\|(1 + j\omega\tau)^{-1}\|$, dB	−0.04	−1.0	−2.0	−3.0	−4.3	−7.0	−14.2	−20.04
Aproximación asintótica, dB	0	0	0	0	−2.3	−6.0	−14.0	−20.0
$\phi(\omega)$, grados	−5.7	26.6	−37.4	45.0	−52.7	−63.4	−78.7	−84.3
Aproximación lineal, grados	0	−31.50	−39.5	−45.0	−50.3	−58.5	−76.5	−90.0

En la Tabla 8.2 se proporcionan los valores exactos de la respuesta de frecuencia para el polo $(1 + j\omega\tau)^{-1}$, así como los valores que se obtienen usando la aproximación para poder compararlos.

Polos o Ceros Complejos Conjugados $[1 + (2\zeta/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]$. El factor cuadrático para un par de polos complejos conjugados se puede escribir de forma normalizada como

$$[1 + j2\zeta u - u^2]^{-1}, \tag{8.33}$$

donde $u = \omega/\omega_n$. Entonces la magnitud logarítmica para un par de polos complejos conjugados es

$$\boxed{20\log|G(\omega)| = -10\log((1 - u^2)^2 + 4\zeta^2u^2),} \tag{8.34}$$

y el ángulo de fase es

$$\boxed{\phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta u}{1 - u^2}\right).} \tag{8.35}$$

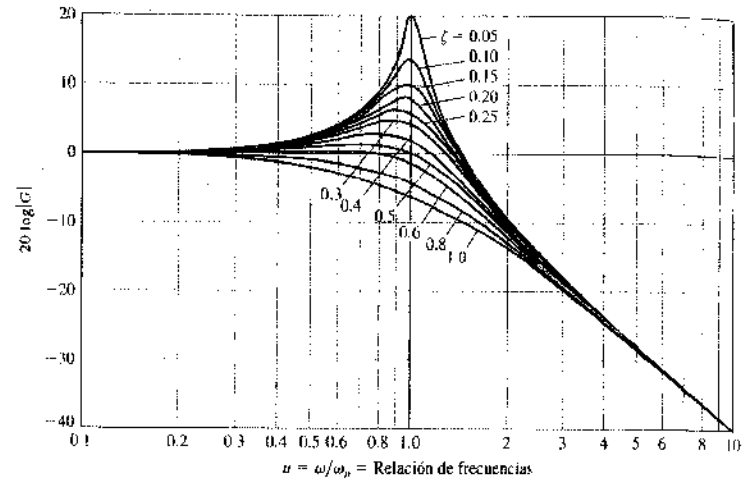
Cuando $u \ll 1$, la magnitud es

$$20\log|G| = -10\log 1 = 0 \text{ dB},$$

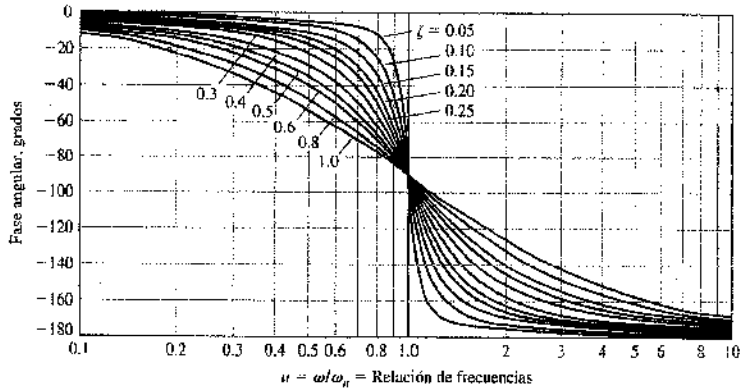
y el ángulo de fase se aproxima a 0°. Cuando $u \gg 1$, la magnitud logarítmica se aproxima a

$$20\log|G| = -10\log u^4 = -40\log u,$$

que produce una curva con una pendiente de -40 dB/década. El ángulo de fase, cuando $u \gg 1$, se aproxima a $-180°$. Las asíntotas de magnitud se encuentran en la recta 0-dB cuando $u = \omega/\omega_n = 1$. Sin embargo, la diferencia entre la curva real de magnitud y la aproximación asintótica es una función de la relación de amortiguamiento y debe tenerse en cuenta cuando $\zeta < 0.707$. En la Figura 8.10 se muestra el diagrama de Bode de un factor cuadrático debido a un par de polos complejos conjugados. El máximo valor de la respuesta de frecuencia, M_{p_ω}, se presenta en la **frecuencia de resonancia** ω_r. Cuando la



(a)



(b)

FIGURA 8.10. Diagrama de Bode para $G(j\omega) = [1 + (2(\zeta/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$.

relación de amortiguamiento tiende a cero, entonces ω_r se aproxima a ω_n, la frecuencia natural. La frecuencia resonante se determina tomando la derivada de la magnitud de la Ecuación (8.33) respecto a la frecuencia normalizada u y haciéndola igual a cero. La frecuencia de resonancia se representa por la relación

$$\boxed{\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2},} \qquad \zeta < 0.707, \tag{8.36}$$

y el valor máximo de la magnitud $|G(\omega)|$ es

$$\boxed{M_{p_\omega} = |G(\omega_r)| = (2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2})^{-1},} \qquad \zeta < 0.707, \tag{8.37}$$

para un par de polos complejos. En la Figura 8.11 se muestran el valor máximo de la respuesta de frecuencia M_{p_ω} y de la frecuencia de resonancia ω_r en función de la relación de amortiguamiento ζ para un par de polos complejos. Suponiendo el dominio de un par de polos complejos conjugados de un lazo cerrado, se observa que estas curvas son útiles para estimar la relación de amortiguamiento de un sistema a partir de una respuesta de frecuencia determinada experimentalmente.

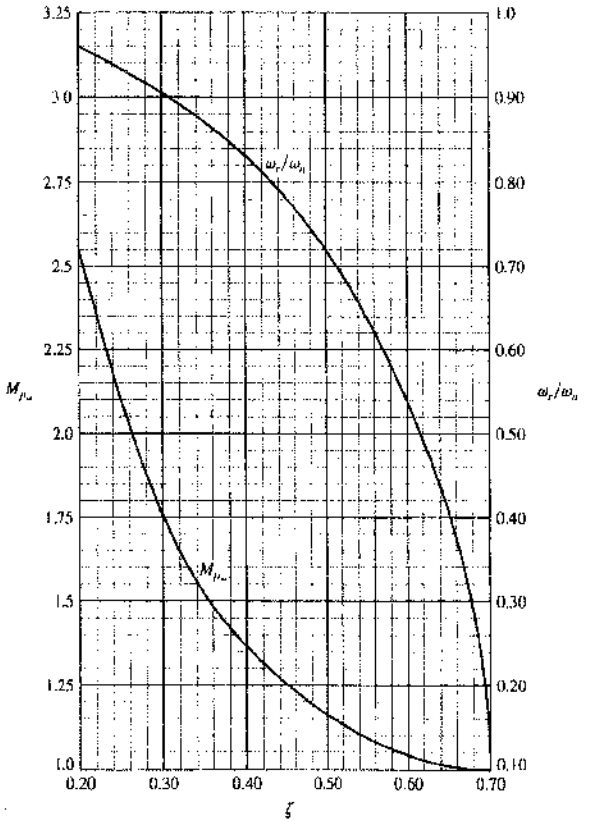


FIGURA 8.11. Máximo de la respuesta en frecuencia, M_{p_ω}, y de la frecuencia de resonancia, ω_r, frente a ζ para un par de polos complejos conjugados.

Las curvas de respuesta de frecuencia se pueden calcular gráficamente en el plano s determinando las longitudes y ángulos de los vectores en varias frecuencias ω a lo largo del eje ($s = +j\omega$). Por ejemplo, si se considera el factor de segundo orden con polos complejos conjugados, se tiene

$$G(s) = \frac{1}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta s/\omega_n + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{8.38}$$

Los polos están en un círculo de radio ω_n y se muestran en la Figura 8.12(a) para un valor particular de ζ. La función de transferencia calculada para la frecuencia real $s = j\omega$ se escribe como

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_1^*)}\bigg|_{s=j\omega} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - s_1)(j\omega - s_1^*)}, \tag{8.39}$$

donde s_1 y s_1^* son los polos complejos conjugados. Los vectores $(j\omega - s_1)$ y $(j\omega - s_1^*)$ son los vectores que van de los polos a la frecuencia $j\omega$, como se muestra en la Figura 8.12(a). Entonces la magnitud y la fase se pueden calcular para varias frecuencias específicas. La magnitud es

$$|G(\omega)| = \frac{\omega_n^2}{|j\omega - s_1||j\omega - s_1^*|}, \tag{8.40}$$

y la fase es

$$\phi(\omega) = -\underline{/(j\omega - s_1)} - \underline{/(j\omega - s_1^*)}.$$

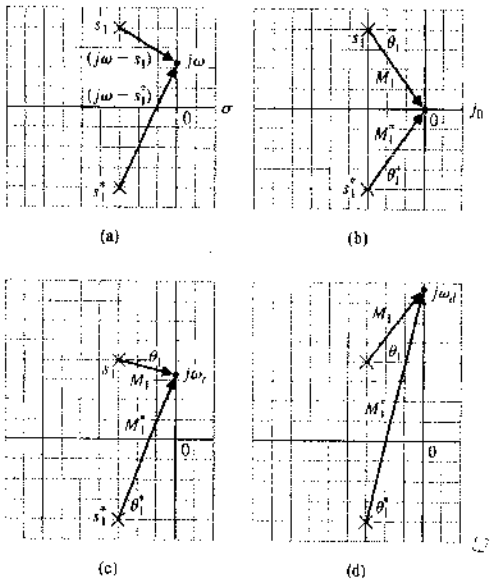


FIGURA 8.12
Cálculo vectorial de la respuesta en frecuencia para valores seleccionados de ω.

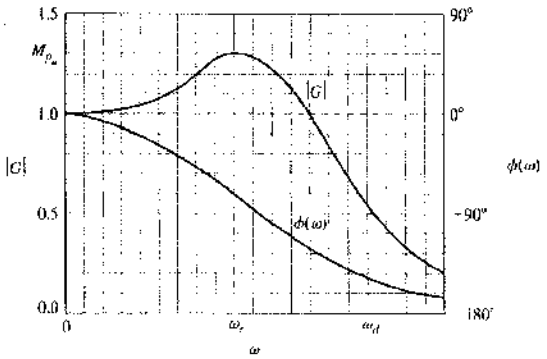


FIGURA 8.13
Diagrama de Bode para polos complejos conjugados.

La magnitud y la fase pueden calcularse para tres frecuencias específicas,

$$\omega = 0, \qquad \omega = \omega_r \quad \text{y} \quad \omega = \omega_d,$$

como se muestra en la Figura 8.12(b), (c) y (d), respectivamente. En la Figura 8.13 se muestran la magnitud y la fase que corresponden a estas frecuencias.

EJEMPLO 8.4. Diagrama de Bode de una red en doble T

Como ejemplo de la determinación de la respuesta de frecuencia usando el diagrama de polos y ceros y los vectores a $j\omega$, considérese la red en doble T mostrada en la Figura 8.14 [6]. La función de transferencia de esta red es

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{(s\tau)^2 + 1}{(s\tau)^2 + 4s\tau + 1}, \tag{8.41}$$

donde $\tau = RC$. Como se muestra en la Figura 8.15(a), los ceros están en $\pm j1$ y los polos en $-2 \pm \sqrt{3}$ en el plano $s\tau$. Evidentemente, en $\omega = 0$, se tiene $|G| = 1$ y $\phi(\omega) = 0°$. En $\omega = 1/\tau$, $|G| = 0$ y el ángulo de fase del vector desde el cero en $s\tau = j1$ pasa por una transición de 180°. Cuando ω tiende a ∞, se tiene nuevamente $|G| = 1$ y $\phi(\omega) = 0$. Calculando varias frecuencias intermedias, se puede obtener fácilmente la respuesta de frecuencia como se muestra en la Figura 8.15(b). ■

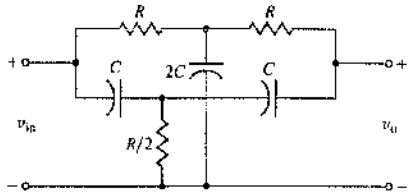


FIGURA 8.14
Red en doble T.

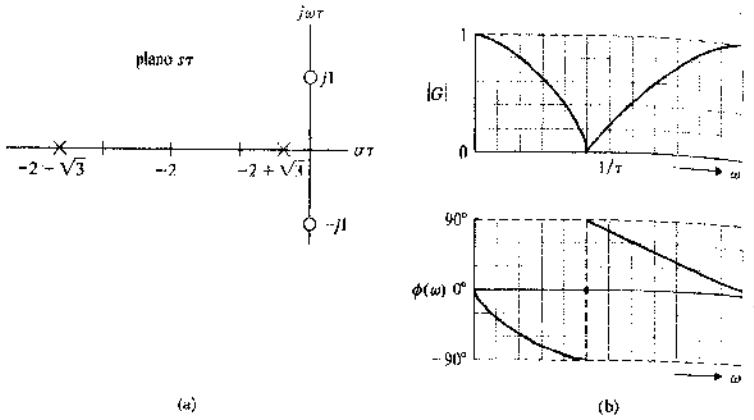


FIGURA 8.15
Red en doble T. (a) Patrón de polos y ceros. (b) Respuesta en frecuencia.

En la Tabla 8.3 se muestra un resumen de las curvas asintóticas para los términos básicos de una función de transferencia.

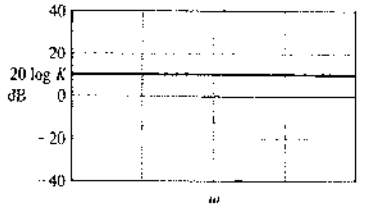
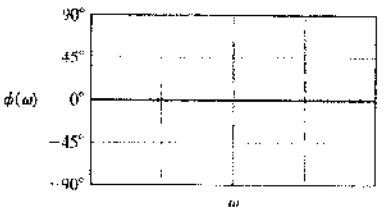
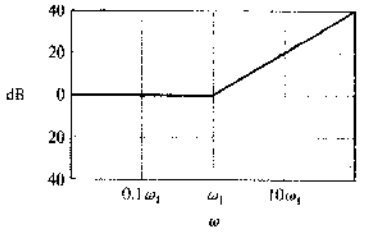
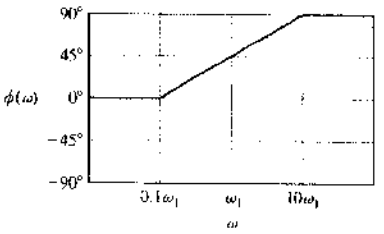
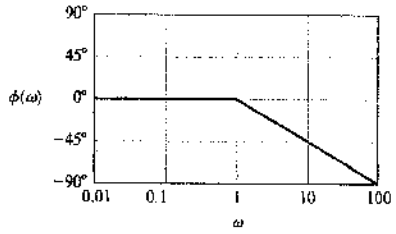
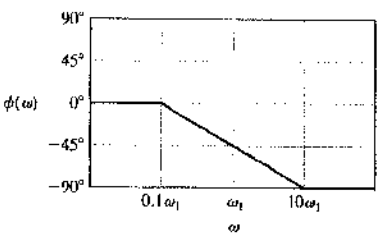
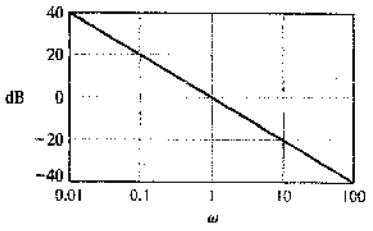
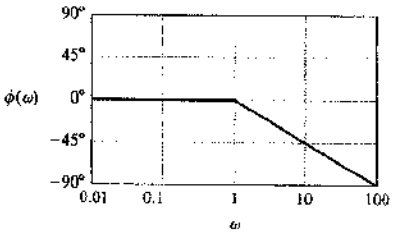
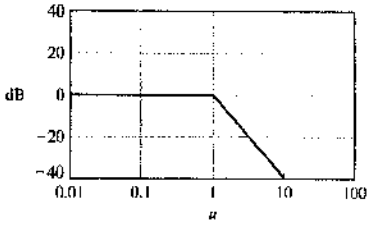
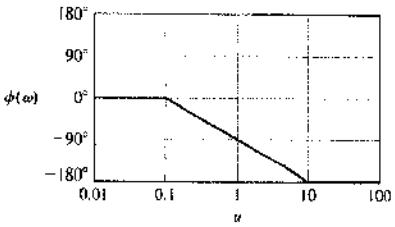
En los ejemplos anteriores los polos y ceros de $G(s)$ se han restringido a la parte izquierda del plano. Sin embargo, un sistema puede tener ceros localizados en la parte derecha del plano s y mantenerse estable. Las funciones de transferencia con ceros en la parte derecha del plano s se clasifican como **funciones de transferencia de fase no mínima**. Si todos los ceros de una función de transferencia se proyectan sobre el eje $j\omega$, no hay cambio en la magnitud de la función de transferencia, y la única diferencia está en las características del cambio de fase. Si se comparan las características de fase de las dos funciones del sistema, se puede demostrar fácilmente que el cambio neto de fase sobre el intervalo de frecuencia desde cero hasta infinito es menor para el sistema con todos sus ceros en la parte izquierda del plano s. Por esto, la función de transferencia $G_1(s)$, con todos sus ceros en la parte izquierda del plano s, se conoce como **función de transferencia de fase mínima**. La función de transferencia $G_2(s)$, con $|G_2(j\omega)| = |G_1(j\omega)|$ y todos los ceros de $G_1(s)$ proyectados en el eje $j\omega$ en la parte derecha del plano s, se conoce como función de transferencia de fase no mínima. La proyección de cualquier cero o par de ceros en la parte derecha del plano da como resultado una función de transferencia de fase no mínima.

Una función de transferencia se denomina función de transferencia de fase mínima si todos sus ceros están en la parte izquierda del plano s. Se denomina función de transferencia de fase no mínima si hay ceros en la parte derecha del plano s.

Los dos patrones de polos y ceros mostrados en las Figuras 8.16(a) y (b) tienen las mismas características de amplitud, como puede deducirse por las longitudes vectoriales. Sin embargo, para estas figuras son diferentes las características de fase. Las características de fase mínima de la Figura 8.16(a) y de fase no mínima de la Figura 8.16(b) se muestran en la Figura 8.17. Evidentemente, el cambio de fase de

$$G_1(s) = \frac{s+z}{s+p}$$

TABLA 8.3 Curvas asintóticas para los términos básicos de una función de transferencia

Término	Magnitud $20\log\|G\|$	Fase $\phi(\omega)$
Ganancia, $G(j\omega) = K$		
2. Cero, $G(j\omega) = (1 + j\omega/\omega_1)$		
3. Polo, $G(j\omega) = (1 + j\omega/\omega_1)^{-1}$		
4. Polo en el origen, $G(j\omega) = 1/j\omega$		
5. Dos polos complejos, $0.1 < \zeta < 1$, $G(j\omega) = (1 + j2\zeta u - u^2)^{-1}$, $u = \omega/\omega_n$		

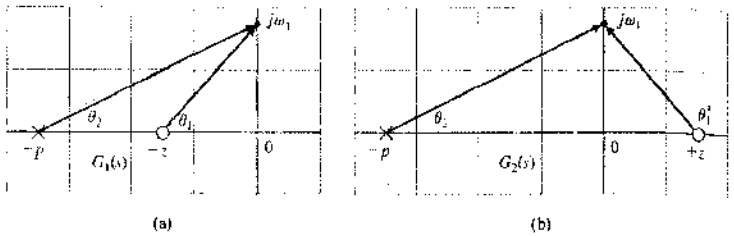


FIGURA 8.16
Patrones de polos y ceros que dan la misma respuesta de amplitud y diferentes características de fase.

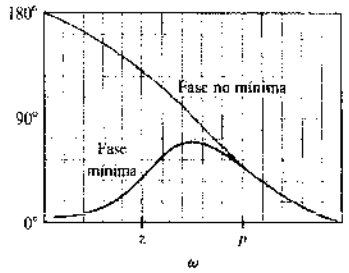


FIGURA 8.17
Características de fase para la función de transferencia de fases mínima y no mínima

se encuentra sobre menos de 80°, mientras que el de

$$G_2(s) = \frac{s - z}{s + p}$$

está sobre 180°. El significado de la expresión **fase mínima** se ilustra en la Figura 8.17. El intervalo del cambio de fase de una función de transferencia de fase mínima es el menor posible que corresponda a una curva de amplitud dada, mientras que el intervalo de la curva de fase no mínima es mayor que el mínimo posible para la curva de amplitud dada.

Una red de fase no mínima de particular interés es la de **paso completo**, la cual puede realizarse con una rejilla simétrica [8]. Se obtiene un patrón simétrico de polos y ceros como se muestra en la Figura 8.18(a). Nuevamente, la magnitud $|G|$ permanece constante; en este caso es igual a la unidad. Sin embargo, el ángulo varía desde 0° hasta −360°. Debido a que $\theta_2 = 180° - \theta_1$ y $\theta_2^* = 180° - \theta_1^*$, la fase está dada por $\phi(\omega) = -2(\theta_1 + \theta_1^*)$. En la Figura 8.18(b) se muestra la magnitud y característica de fase de la red de paso completo. En la Figura 8.18(c) se muestra una rejilla de fase no mínima.

8.3. UN EJEMPLO DEL TRAZADO DEL DIAGRAMA DE BODE

El diagrama de Bode de una función de transferencia $G(s)$, que contiene varios ceros y polos, se obtiene sumando la gráfica debida a cada polo y cero individuales. La sencillez de este método se ilustrará mediante una función de transferencia que tenga todos los factores considerados en la sección anterior. La función de transferencia de interés es

$$G(j\omega) = \frac{5(1 + j0.1\omega)}{j\omega(1 + j0.5\omega)(1 + j0.6(\omega/50) + (j\omega/50)^2)}. \tag{8.42}$$

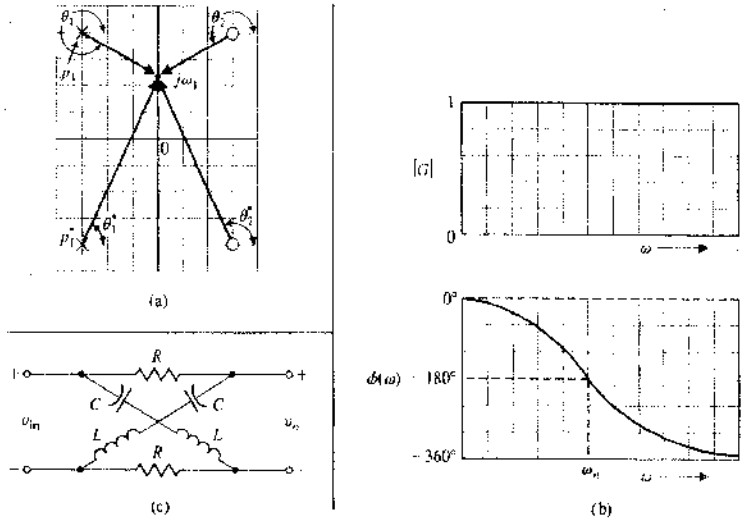


FIGURA 8.18
Red de paso completo (a) patrones de polos y ceros, (b) respuesta en frecuencia y (c) rejilla.

Los factores, en el orden de su aparición a medida que aumenta la frecuencia, son:

1. Una ganancia constante $K = 5$.
2. Un polo en el origen.
3. Un polo en $\omega = 2$.
4. Un cero en $\omega = 10$.
5. Un par de polos complejos en $\omega = \omega_n = 50$.

Primero, se dibuja la característica de magnitud para cada factor individual de polo y cero y la ganancia constante:

1. La ganancia constante es $20 \log 5 = 14$ dB, como se muestra en la Figura 8.19.
2. La magnitud del polo en el origen se extiende desde la frecuencia cero hasta frecuencias infinitas y tiene una pendiente de −20 dB/década, intersecándose con la recta 0-dB en $\omega = 1$, como se muestra en la Figura 8.19.

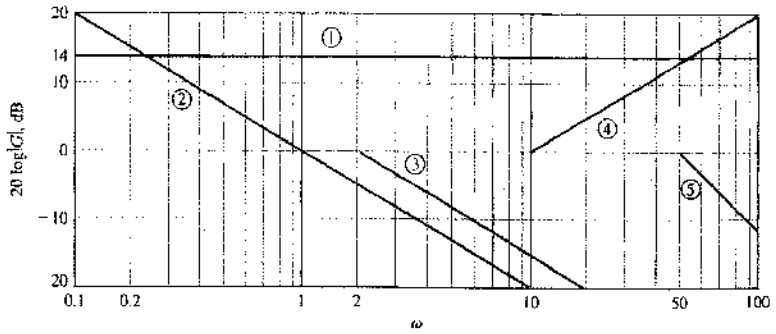


FIGURA 8.19
Asíntotas de magnitud de polos y ceros utilizadas en el ejemplo.

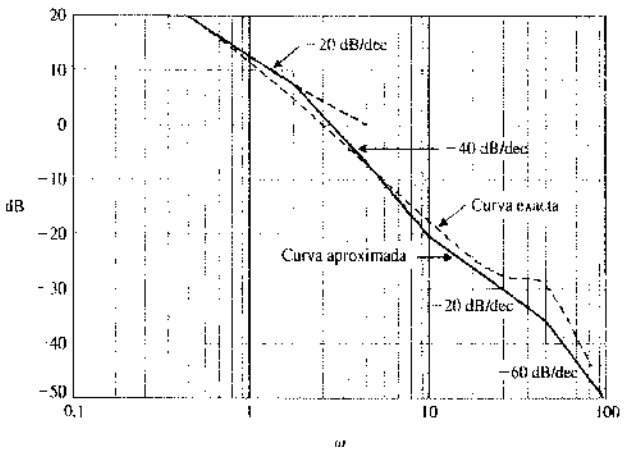


FIGURA 8.20
Característica de magnitud.

3. La aproximación asintótica de la magnitud del polo en $\omega = 2$ tiene una pendiente de -20 dB/década más allá de la frecuencia de corte en $\omega = 2$. La magnitud asintótica bajo la frecuencia de corte es de 0 dB, como se muestra en la Figura 8.19.
4. La magnitud asintótica para el cero en $\omega = +10$ tiene una pendiente de $+20$ dB/década más allá de la frecuencia de corte en $\omega = 10$, como se muestra en la Figura 8.19.
5. La magnitud para el par de polos complejos es -40 dB/década. La frecuencia de corte es $\omega = \omega_n = 50$, como se muestra en la Figura 8.19. Esta aproximación debe ser corregida a la magnitud real puesto que la relación de amortiguamiento es $\zeta = 0.3$ y la magnitud difiere apreciablemente de la aproximación, como se muestra en la Figura 8.20.

Por tanto, la magnitud asintótica total se puede dibujar sumando las asíntotas debidas a cada factor, como muestra la línea continua de la Figura 8.20. Examinando la curva asintótica de esta figura, se observa que la curva puede obtenerse dibujando directamente cada asíntota en orden a medida que aumenta la frecuencia. Por esto, la pendiente es -20 dB/década debido a $(j\omega)^{-1}$ que se interseca con los 14 dB en $\omega = 1$. Entonces, en $\omega = 2$, la pendiente será de -40 dB/década debido al polo en $\omega = 2$. La pendiente cambia a -20 dB/década debido al cero en $\omega = 10$. Finalmente, la pendiente será de -60 dB/década en $\omega = 50$ debido al par de polos complejos en $\omega_n = 50$.

La curva exacta de magnitud se obtiene entonces utilizando la Tabla 8.2, que proporciona la diferencia entre las curvas real y asintótica para un único polo o cero. La curva exacta de magnitud para el par de polos complejos se obtiene utilizando la Figura 8.10(a) para el factor cuadrático. La curva exacta de magnitud para $G(j\omega)$ se muestra por medio de una línea punteada en la Figura 8.20.

La característica de fase se puede obtener sumando la fase debida a cada factor individual. Generalmente, la aproximación lineal de esta característica de fase para un solo polo o cero es adecuada para el análisis o intento de diseño inicial. Por esto, en la Figura 8.21 se muestran las características de fase individual para los polos y ceros, y son las siguientes:

1. La fase de la ganancia constante es 0°.
2. La fase del polo en el origen es una constante de $-90°$.

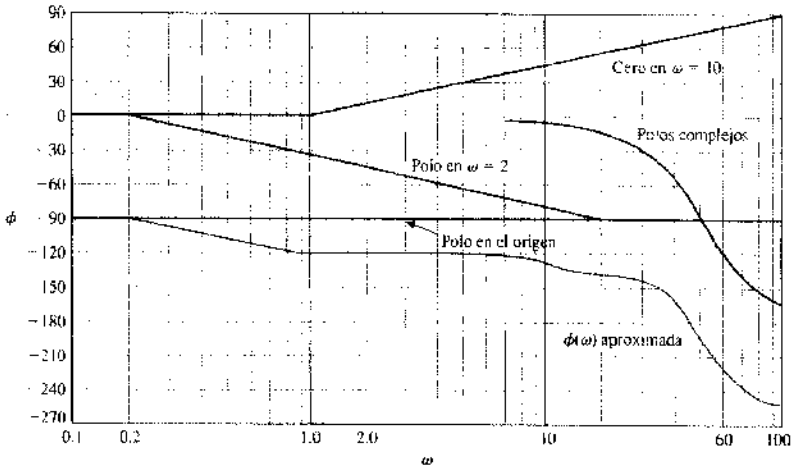


FIGURA 8.21
Característica de fase

3. La aproximación lineal de la característica de fase para el polo en $\omega = 2$ se muestra en la Figura 8.21, donde el cambio de fase es de $-45°$ en $\omega = 2$.
4. La aproximación lineal de la característica de fase para el cero en $\omega = 10$ se muestra también en la Figura 8.21, donde el cambio de fase es de $+45°$ en $\omega = 10$.
5. La característica de fase real para el par de polos complejos se obtiene de la Figura 8.10 y se muestra en la Figura 8.21.

Por tanto, la característica de fase total, $\phi(\omega)$, se obtiene sumando la fase debida a cada factor como se muestra en la Figura 8.21. Aunque esta curva sea una aproximación, su utilidad merece consideración como un primer intento para determinar la característica de fase. Así, por ejemplo, como se verá en la sección siguiente, una frecuencia de interés es aquella para la cual $\phi(\omega) = -180°$. La curva aproximada indica que en $\omega = 46$ se presenta un cambio de fase de $-180°$. El cambio de fase real en $\omega = 46$ puede calcularse fácilmente como

$$\phi(\omega) = -90° - \tan^{-1}\omega\tau_1 + \tan^{-1}\omega\tau_2 - \tan^{-1}\frac{2\zeta u}{1-u^2}, \qquad (8.43)$$

donde

$$\tau_1 = 0.5, \qquad \tau_2 = 0.1, \qquad \text{y} \qquad u = \omega/\omega_n = \omega/50.$$

Entonces, se sigue que

$$\phi(46) = -90° - \tan^{-1}23 + \tan^{-1}4.6 \quad \tan^{-1}3.55 = -175°, \qquad (8.44)$$

y la curva aproximada tiene un error de 5° en $\omega = 46$. Sin embargo, una vez que se determina la frecuencia aproximada de interés a partir de la curva aproximada de fase, el cambio exacto de fase para las frecuencias vecinas se determina fácilmente usando la relación del cambio exacto de fase (Ecuación 8.43). En general, este enfoque es preferible al cálculo de los cambios de fase exactos para todas las frecuencias sobre varias décadas. En resumen, se pueden obtener curvas aproximadas para la magnitud y el cambio de fase de una función de transferencia $G(j\omega)$ con el objeto de determinar los intervalos importantes de frecuencia. Entonces, dentro de intervalos importantes de frecuen-

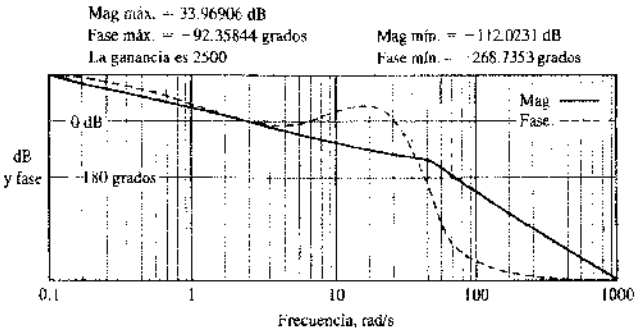


FIGURA 8.22
Diagrama de Bode para $G(j\omega)$ de la Ecuación (8.42).

cia relativamente pequeños, pueden calcularse fácilmente el cambio de fase y la magnitud exactos usando ecuaciones exactas, como la (8.43).

La respuesta en frecuencia de $G(j\omega)$ se puede calcular y dibujar utilizando programas de computador como MATLAB. El diagrama de Bode para el ejemplo de esta sección (Ecuación 8.42) se puede obtener fácilmente, como se muestra en el Figura 8.22. El diagrama se ha generado para cuatro décadas, y se indican tanto la línea de 0 dB como la línea de $-180°$. Los datos situados encima del dibujo indican que para $\omega = 0.1$, la magnitud es de 34 dB y que la fase es de $-92.36°$. Análogamente, para $\omega = 100$ los datos indican que la magnitud es de -43 dB y la fase de $-243°$. Si se utilizan los datos tabulados proporcionados, se observa que la magnitud para $\omega = 3.0$ es de 0 dB y la fase en $\omega = 50$ es de $-180°$.

8.4. MEDIDAS DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA

Para medir la respuesta en frecuencia de un lazo abierto en un sistema de control, se puede emplear una onda sinusoidal. En la práctica se obtendrán gráficas de amplitud frente a la frecuencia y fase frente a la frecuencia [1, 3, 6]. A partir de dichas gráficas se puede deducir la función de transferencia de lazo abierto $GH(j\omega)$. De igual forma, se puede obtener la respuesta en frecuencia de lazo cerrado de un sistema de control, $T(j\omega)$, y deducir la función de transferencia real.

Se puede emplear un dispositivo denominado analizador de ondas para medir las variaciones de fase y de amplitud a medida que varía la frecuencia de la onda sinusoidal de entrada. De manera similar, para medir las funciones de transferencia de lazos abierto y cerrado, se puede emplear un dispositivo llamado analizador de función de transferencia [6].

Un instrumento analizador de señales, el Analizador Dinámico de Señales de Hewlett-Packard 3562A, mide la respuesta en frecuencia desde cc hasta 100 kHz. La capacidad de analizar y modelar se puede llevar a cabo a partir de los polos y ceros obtenidos de las medidas de respuesta en frecuencia o bien construir las respuestas de magnitud y de fase a partir de los modelos proporcionados por el usuario. Este instrumento también puede sintetizar la respuesta en frecuencia de un modelo de un sistema, permitiendo la comparación con la respuesta actual (*véase* la Figura E8.10).

Como ejemplo de la determinación de la función de transferencia a partir del diagrama de Bode, considérese la gráfica que se muestra en la Figura 8.23. El sistema es un lazo estable que consiste en resistencias y condensadores. Debido a que la magnitud

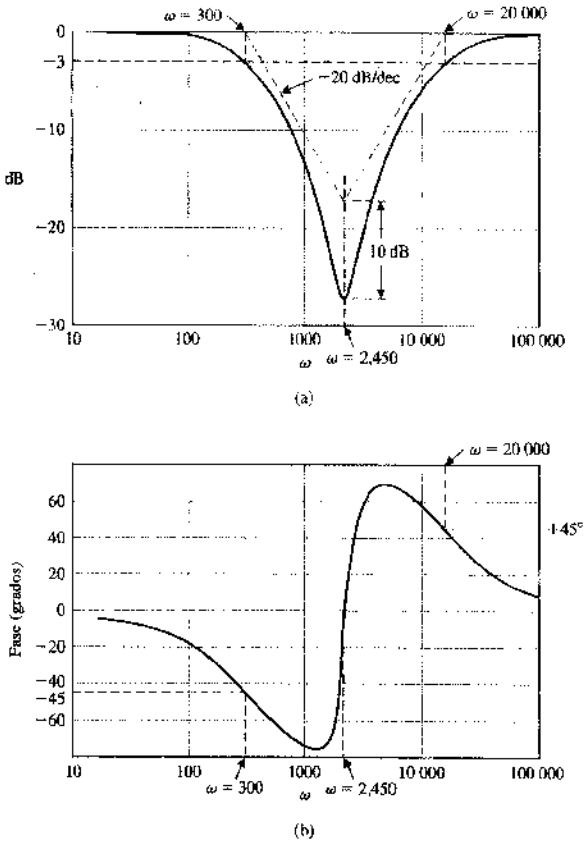


FIGURA 8.23
Diagrama de Bode para un sistema con una función de transferencia no identificada.

disminuye en -20 dB/década a medida que ω aumenta entre 100 y 1000, y dado que la fase es $-45°$ y la magnitud -3 dB a 300 rad/s, se puede deducir que un factor es un polo en $p_1 = 300$. Además se deduce que existe un par de ceros cuadráticos con $\zeta = 0.16$ en $\omega_n = 2450$. Esto se obtiene del hecho de que la fase cambia bruscamente en las proximidades de $+180°$, cruzando por $0°$ en $\omega_n = 2450$. Además la pendiente de la magnitud cambia de -20 dB/década a $+20$ dB/década en $\omega_n = 2450$. En la Figura 8.23 (a) se muestran las asíntotas para el polo p_1 y el numerador de la función de transferencia propuesta $T(s)$ de la Ecuación (8.45). La ecuación es

$$T(s) = \frac{(s/\omega_n)^2 + (2\zeta/\omega_n)s + 1}{(s/p_1 + 1)(s/p_2 + 1)}. \tag{8.45}$$

La diferencia en magnitud desde la frecuencia esquina ($\omega_n = 2450$) de la asíntota a la mínima respuesta es de 10 dB, lo que indica, a partir de la Ecuación (8.37), que $\zeta = 0.16$. (Compare en la Figura 8.10 el diagrama de los ceros cuadráticos y el de los polos cuadráticos. Observe que el diagrama necesita ser girado «de arriba hacia abajo»

para los ceros cuadráticos y que la fase va de 0° a + 180° en lugar de a −180°.) Como la magnitud de la pendiente vuelve a 0 dB/década cuando ω excede de 50 000, se determina que hay un segundo polo y dos ceros. Este segundo polo se encuentra en $p_2 = 20\,000$, porque la magnitud es −3 dB desde la asíntota y la fase es +45° en este punto (−90° para el primer polo, + 180° para el par de ceros cuadráticos y −45° para el segundo polo). Por tanto, la función de transferencia es

$$T(s) = \frac{(s/2450)^2 + (0.32/2450)s + 1}{(s/300 + 1)(s/20\,000 + 1)}$$

Esta respuesta de frecuencia se obtiene realmente de una red con puente en T (*véanse* los Problemas 2.8 y 8.3 y la Figura 8.14).

8.5. ESPECIFICACIONES DEL COMPORTAMIENTO EN EL DOMINIO DE LA FREQUENCIA

Continuamente se plantea esta pregunta: ¿Cómo se relaciona la respuesta en frecuencia de un sistema con la respuesta transitoria esperada de este sistema? En otras palabras, dado un conjunto de especificaciones en el dominio del tiempo (comportamiento transitorio), ¿cómo se puede especificar la respuesta en frecuencia? Para un sistema simple de segundo orden, se tiene de inmediato la respuesta a este problema considerando el comportamiento en términos de la sobreelongación, el tiempo de asentamiento y otros criterios de comportamiento como la integral del error al cuadrado. Para el sistema de segundo orden de la Figura 8.24, la función de transferencia de lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{8.46}$$

La respuesta en frecuencia de este sistema de realimentación aparecerá como se muestra en la Figura 8.25. Como éste es un sistema de segundo orden, se asocia la razón de amortiguamiento del sistema con la magnitud máxima M_{p_ω}, que tiene lugar a la frecuencia ω_r como se muestra en la Figura 8.25.

En la frecuencia de resonancia ω_r se obtiene el máximo valor de la respuesta M_{p_ω} en frecuencia.

El ancho de banda ω_B es una medida de la posibilidad del sistema de reproducir fielmente una señal de entrada.

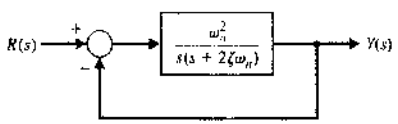


FIGURA 8.24. Un sistema de segundo orden en lazo cerrado.

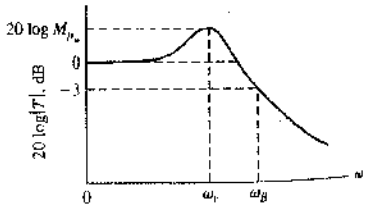


FIGURA 8.25. Característica de magnitud del sistema de segundo orden.

El ancho de banda ω_B es la frecuencia a la que la respuesta en frecuencia decae 3 dB respecto de su valor a baja frecuencia.

La frecuencia de resonancia ω_r y el **ancho de banda** a 3-dB pueden relacionarse con la velocidad de la respuesta transitoria. Por esto, a medida que aumenta el ancho de banda ω_B, disminuye el tiempo de subida de la respuesta a un escalón del sistema. Además, la sobreelongación a una entrada escalón puede relacionarse con M_{p_ω} mediante la razón de amortiguamiento ζ. Las curvas de la Figura 8.11 relacionan la magnitud y frecuencia de resonancia con la razón de amortiguamiento del sistema de segundo orden. Entonces puede estimarse la sobreelongación de la respuesta a un escalón a partir de la Figura 5.8 o puede calcularse utilizando la Ecuación (5.15). Por esto, se sigue que cuando aumenta en magnitud el pico de resonancia M_{p_ω} aumenta la sobreelongación para una entrada escalón. En general, la magnitud M_{p_ω} indica la estabilidad relativa de un sistema.

El ancho de banda ω_B de un sistema, como se indica en la respuesta en frecuencia, puede relacionarse aproximadamente con la frecuencia natural del sistema. La Figura 8.26 muestra el ancho de banda normalizado ω_B/ω_n, frente a ζ para el sistema de segundo orden de la Ecuación (8.46). La respuesta del sistema de segundo orden a una entrada de escalón unitario es

$$y(t) = 1 + Be^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_1 t + \theta). \tag{8.47}$$

Cuanto mayor sea ω_n para ζ constante, más rápidamente tienden las respuestas al valor deseado en estado estacionario. Por esto, las especificaciones deseables en el dominio de la frecuencia son las siguientes:

1. Magnitudes de resonancia relativamente pequeñas, $M_{p_\omega} < 1.5$, por ejemplo.
2. Anchos de banda relativamente grandes, de forma que la constante de tiempo del sistema $\tau = 1/\zeta\omega_n$ sea suficientemente pequeña.

La utilidad de estas especificaciones de respuesta en frecuencia y su relación con el comportamiento transitorio real dependen de la aproximación del sistema por un par de polos complejos de segundo orden. Esta aproximación se analizó en la Sección 7.3, y los polos de segundo orden de $T(s)$ se conocen como **raíces dominantes**. Evidentemente, si la respuesta en frecuencia está dominada por un par de polos complejos, serán válidas las relaciones entre la respuesta de frecuencia y la respuesta temporal analizadas en esta

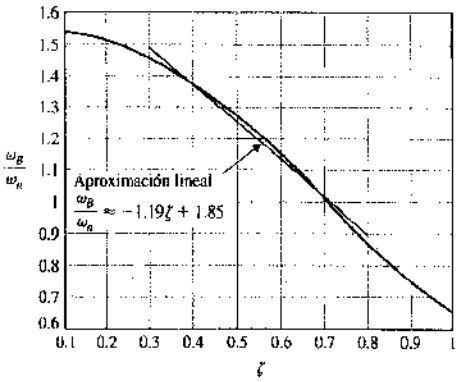


FIGURA 8.26 Ancho de banda normalizado ω_B/ω_n frente a ζ para un sistema de segundo orden (ecuación 8.46). La aproximación lineal $\omega_B/\omega_n = -1.19\zeta + 1.85$ es válida para $0.3 \leq \zeta \leq 0.8$.

sección. Afortunadamente, una gran proporción de sistemas de control satisfacen en la práctica esta aproximación dominante de segundo orden.

La especificación del error en estado estacionario también puede relacionarse con la respuesta en frecuencia de un sistema de lazo cerrado. Como se vio en la Sección 5.4, el error en estado estacionario para una señal específica de entrada de prueba puede relacionarse con la ganancia y el número de integraciones (polos en el origen) de la función de transferencia en lazo abierto. Por tanto, para el sistema mostrado en la Figura 8.24, el error en estado estacionario para una entrada de rampa se especifica en términos de la constante de velocidad K_v. El error en estado estacionario para el sistema es

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{A}{K_v},$$

donde A = magnitud de la entrada de rampa. La constante de velocidad para el sistema de lazo cerrado de la Figura 8.24 es

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}\right) = \frac{\omega_n}{2\zeta}. \tag{8.48}$$

En forma de diagrama de Bode (en términos de las constantes de tiempo), la función de transferencia se escribe como

$$G(s) = \frac{(\omega_n/2\zeta)}{s(s/(2\zeta\omega_n)+1)} = \frac{K_v}{s(\tau s+1)}, \tag{8.49}$$

y la constante de ganancia es K_v para este sistema de tipo uno. Por ejemplo, examinando de nuevo el ejemplo de la Sección 8.3, se tiene un sistema de tipo uno con una función de transferencia de lazo abierto

$$G(j\omega) = \frac{5(1+j\omega\tau_2)}{j\omega(1+j\omega\tau_1)(1+j0.6u-u^2)}, \tag{8.50}$$

donde $u = \omega/\omega_n$. Por tanto, en este caso se tiene $K_v = 5$. En general, si la función de transferencia de lazo abierto de un sistema de realimentación se escribe como

$$G(j\omega) = \frac{K\prod_{i=1}^{M}(1+j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N\prod_{k=1}^{Q}(1+j\omega\tau_k)}, \tag{8.51}$$

entonces el sistema es de tipo N y la ganancia K es la constante de ganancia para el error en estado estacionario. Por esto, para un sistema de tipo cero que tiene una función de transferencia de lazo abierto

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}. \tag{8.52}$$

$K = K_p$ (la constante del error de posición) aparece como la ganancia de baja frecuencia en el diagrama de Bode.

Además, la constante de ganancia $K = K_v$ para el sistema de tipo uno aparece como la ganancia de la sección de baja frecuencia de la característica de magnitud. Considerando solamente la ganancia y el polo del sistema de tipo uno de la Ecuación (8.50), se tiene

$$G(j\omega) = \left(\frac{5}{j\omega}\right) = \left(\frac{K_v}{j\omega}\right), \quad \omega < 1/\tau_1, \tag{8.53}$$

y K_v es igual a la frecuencia en que esta parte de la característica de la magnitud corta la línea de 0 dB. Por ejemplo, la intersección de baja frecuencia de $(K_v/j\omega)$ de la Figura 8.20 es igual a $\omega = 5$, como se esperaba.

Por tanto, las características de respuesta de frecuencia representan el comportamiento de un sistema en forma completamente adecuada, y con alguna experiencia son muy útiles para el análisis y diseño de los sistemas de control con realimentación.

8.6. DIAGRAMA DE MAGNITUD LOGARÍTMICA Y DE FASE

Existen varios métodos alternativos para representar la respuesta de frecuencia de una función $GH(j\omega)$. Se ha visto que las representaciones gráficas adecuadas de la respuesta de frecuencia son (1) el diagrama polar y (2) el diagrama de Bode. Otro camino para representar gráficamente la respuesta de frecuencia es dibujar la magnitud logarítmica en dB frente al ángulo de fase para un intervalo de frecuencias. Como esta información es equivalente a la presentada por el diagrama de Bode, generalmente es más fácil obtener el diagrama de Bode y transferir la información a las coordenadas de magnitud logarítmica frente al diagrama de fase.

Una ilustración mostrará mejor el uso del diagrama magnitud logarítmica y de fase. Este diagrama para una función de transferencia

$$GH_1(j\omega) = \frac{5}{j\omega(0.5j\omega+1)((j\omega/6)+1)} \tag{8.54}$$

se muestra en la Figura 8.27. Los números indicados a lo largo de la curva son valores de frecuencia, ω.

La curva de magnitud logarítmica-fase para la función de transferencia

$$GH_2(j\omega) = \frac{5(0.1j\omega+1)}{j\omega(0.5j\omega+1)(1+j0.6(\omega/50)+(j\omega/50)^2)} \tag{8.55}$$

considerada en la Sección 8.3, se muestra en la Figura 8.26. Esta curva se obtiene más fácilmente utilizando los diagramas de Bode de las Figuras 8.20 y 8.21 para transferir la información de la respuesta de frecuencia a las coordenadas de fase y magnitud logarítmica. La forma del lugar geométrico de la respuesta de frecuencia en un diagrama de magnitud logarítmica-fase es particularmente importante a medida que la fase tiende a $-180°$ y la magnitud se aproxime a 0 dB. Evidentemente, el lugar geométrico de la Ecuación (8.54) y la Figura 8.27 difiere sustancialmente del de la Ecuación (8.55) y la Figura 8.28. Por tanto, cuando se establece la correlación entre la forma del lugar geométrico y la respuesta transitoria de un sistema, se obtiene otra representación útil de la respuesta de frecuencia de un sistema. En el Capítulo 9 se establecerá un criterio de estabilidad en el dominio de la frecuencia, para lo cual será útil emplear el diagrama de magnitud logarítmica-fase con el fin de investigar la estabilidad relativa de los sistemas de control con realimentación de lazo cerrado.

8.7. EJEMPLO DE DISEÑO: SISTEMA DE CONTROL DE UNA MÁQUINA DE ESTAMPACIÓN

El manipulador láser que se muestra en la Figura 8.29(a) utiliza dos motores de arrastre y los tornillos de control asociados para posicionar el punzón de estampación en la dirección x [7]. Tal y como se muestra, se utiliza un motor separado para los ejes y y z.

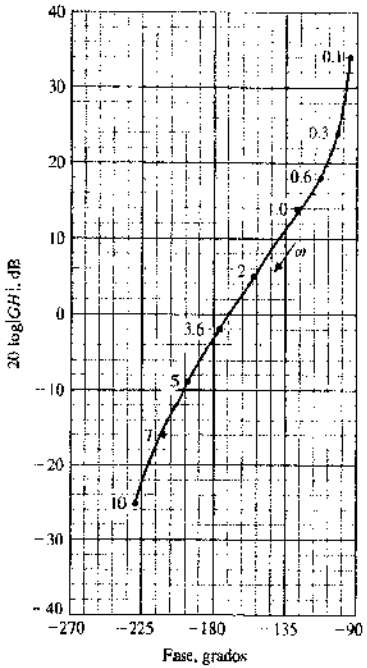


FIGURA 8.27. Curva de magnitud logarítmica-fase para $GH_1(j\omega)$.

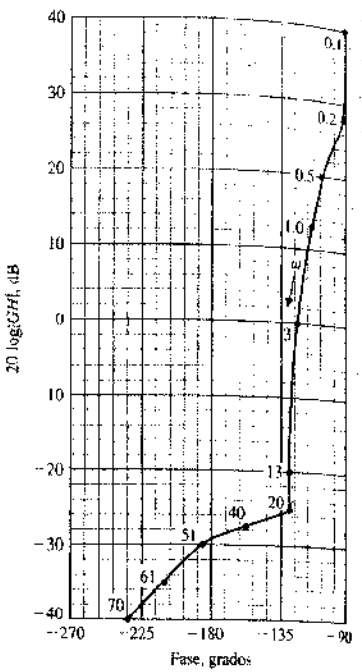


FIGURA 8.28. Curva de magnitud logarítmica-fase para $GH_2(j\omega)$.

En la Figura 8.29(b) se muestra el modelo de diagrama de bloques para el sistema de control de posición en el eje x. El objetivo es seleccionar una ganancia K, utilizando métodos de respuesta en frecuencia, de forma que el tiempo de respuesta frente a escalones sea aceptable.

Para representar la respuesta en frecuencia del sistema, se obtendrán en primer lugar los diagramas de Bode en lazo abierto y en lazo cerrado. Después se utilizará el diagrama de Bode en lazo cerrado para predecir el tiempo de respuesta de un sistema y para contrastar los resultados predichos con los reales.

Para dibujar la respuesta en frecuencia, se selecciona arbitrariamente $K = 2$ y se continúa con el diagrama de Bode que se obtenga. Si el sistema resultante no es aceptable, se ajustará esta ganancia con posterioridad.

En la Tabla 8.4 se presenta parcialmente la respuesta en frecuencia de $G(j\omega)$ y se dibuja en la Figura 8.30. Se necesita la respuesta en frecuencia de la función de transferencia en lazo cerrado

Tabla 8.4 Respuesta en frecuencia para $G(j\omega)$

ω	0.2	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8
$20 \log \lvert G \rvert$	14	7	−1	−4	−9	−13
ϕ	−107°	−123°	−150.5°	−162°	−179.5°	−193°

$$T(s) = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + 2s + 2}. \tag{8.56}$$

Por lo tanto, si $s = j\omega$, se obtiene

$$T(j\omega) = \frac{2}{(2 - 3\omega^2) + j\omega(2 - \omega^2)}. \tag{8.57}$$

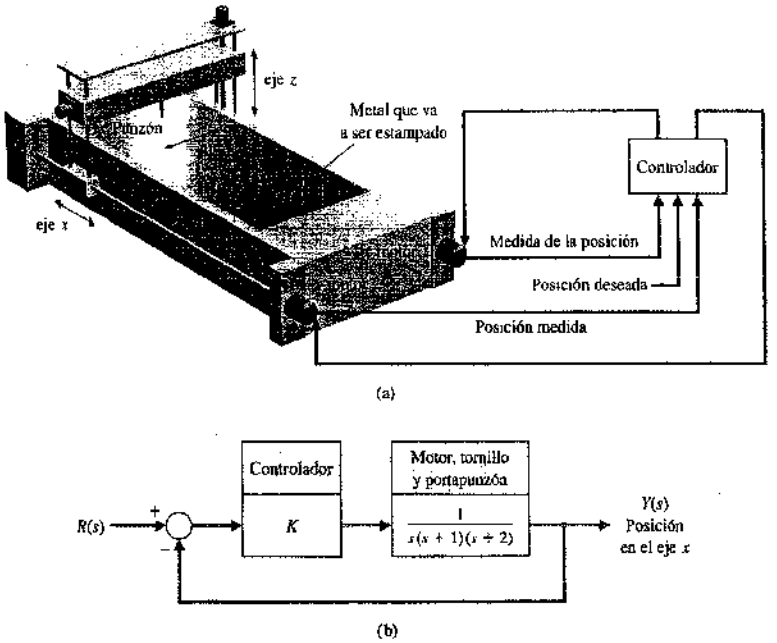


FIGURA 8.29
(a) Sistema de control de una máquina de estampación. (b) Modelo de diagrama de bloques.

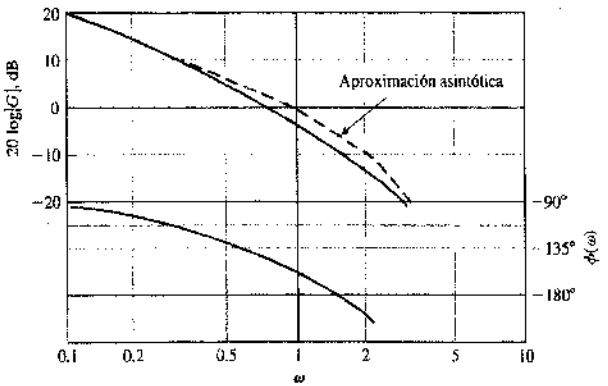


FIGURA 8.30
Diagrama de Bode para $G(j\omega)$.

En la Figura 8.31 se muestra el diagrama de Bode para el sistema en lazo cerrado, donde $20 \log |T| = 5$ dB en $\omega_r = 0.8$. De ahí,

$$20 \log M_{p_\omega} = 5 \quad \text{o} \quad M_{p_\omega} = 1.78.$$

Si se supone que el sistema tiene raíces dominantes de segundo orden, se puede aproximar el sistema con una respuesta en frecuencia de segundo orden de la forma que se muestra en la Figura 8.10. Como $M_{p_\omega} = 1.78$, utilizando la Figura 8.11 para estimar ζ resulta ser 0.29. Utilizando este ζ y $\omega_r = 0.8$, se puede estimar a partir de la Figura 8.11 que $\omega_r/\omega_n = 0.91$. Por lo tanto,

$$\omega_n = \frac{0.8}{0.91} = 0.88.$$

Como se está aproximando $T(s)$ por un sistema de segundo orden, se tiene

$$T(s) \simeq \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.774}{s^2 + 0.51s + 0.774}. \tag{8.58}$$

Si se utiliza la Figura 5.8 para predecir la sobreelongación frente a una entrada escalón se obtiene del 37% para $\zeta = 0.29$. El tiempo de asentamiento (dentro del 2% del valor final) se estima ser

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{(0.29)0.88} = 15.7 \text{ segundos.}$$

La sobreelongación real para una entrada escalón es del 34% y el tiempo de asentamiento real es de 17 segundos. Como se ve, la aproximación de segundo orden es razonable en este caso y se puede utilizar para determinar los parámetros del sistema de forma adecuada. En caso de requerir un sistema con sobreelongación menor, se debería reducir K a 1 y repetir el procedimiento.

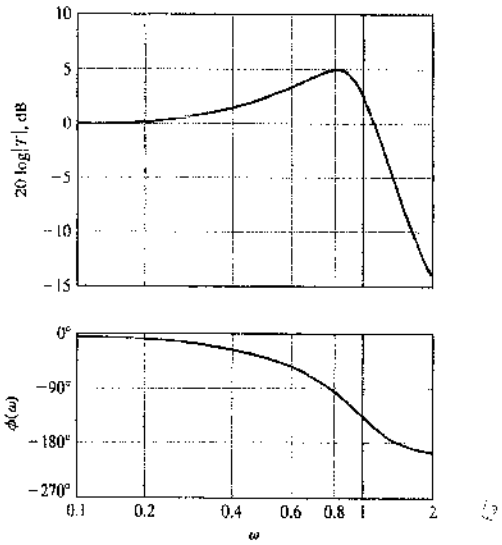


FIGURA 8.31
Diagrama de Bode para el sistema en lazo cerrado.

8.8. MÉTODOS DE RESPUESTA EN FRECUENCIA UTILIZANDO MATLAB

Esta sección comienza con una introducción al diagrama de Bode y después analiza la conexión entre la respuesta en frecuencia y las especificaciones de comportamiento en el dominio temporal. La sección termina con un ejemplo ilustrativo de diseño de un sistema de control en el dominio de la frecuencia.

Se estudiarán las funciones de MATLAB bode y logspace. La función bode se utiliza para generar el diagrama de Bode, y la función logspace genera un especio vectorial de frecuencias logarítmicas utilizado por la función bode.

Diagrama de Bode. Se considera la función de transferencia

$$G(s) = \frac{5(1 + 0.1s)}{s(1 + 0.5s)(1 + (0.6/50)s + (1/50^2)s^2)}. \tag{8.59}$$

En la Figura 8.32 se muestra el diagrama de Bode correspondiente a la Ecuación (8.59). El diagrama consiste en una primera representación de la ganancia logarítmica en dB frente a ω y una segunda de la fase $\phi(\omega)$ frente a ω. De la misma forma que con los lugares de las raíces será tentador basarse exclusivamente en MATLAB para obtener los diagramas de Bode. Trátese MATLAB como una herramienta de un conjunto de herramientas que se puede utilizar para diseñar y analizar los sistemas de control. Es importante desarrollar la capacidad de obtener diagramas de Bode aproximados de forma manual. No existe sustituto de un entendimiento claro de la teoría subyacente.

En la Figura 8.33 se muestra un diagrama de Bode obtenido con la función bode. El diagrama de Bode se genera automáticamente si se invoca la función bode sin argumentos en la parte izquierda. Por otro lado, las características de magnitud y fase se obtienen en el espacio de trabajo mediante las variables *mag* y *phase*. Un diagrama de Bode se obtiene con la función plot o semilogx utilizando mag, phase y ω. El vector ω contiene

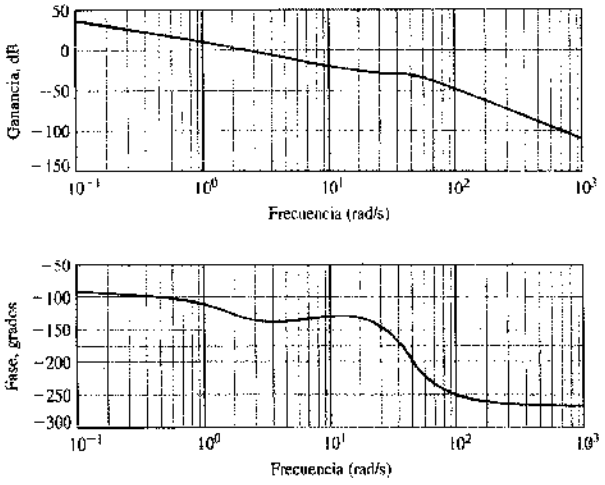


FIGURA 8.32
Diagrama de Bode asociado a la Ecuación (8.59).

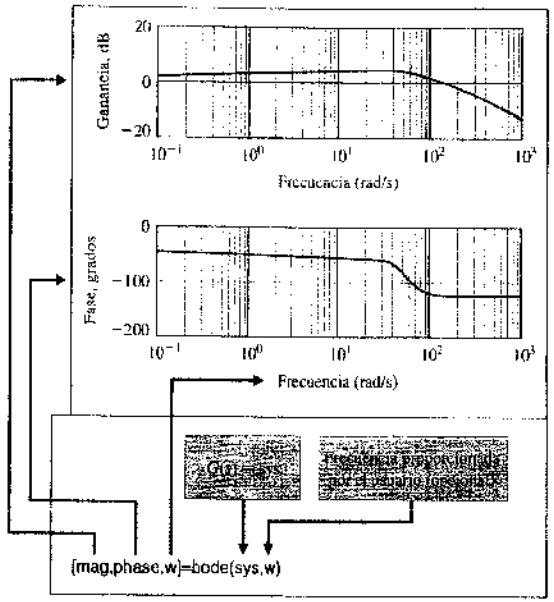


FIGURA 8.33
Dada G(s), la función de **bode**.

los valores de la frecuencia en rad/s en las que se calculará el diagrama de Bode. Si no se especifica ω, MATLAB elegirá automáticamente los valores de la frecuencia situando más puntos en las regiones en las que la respuesta en frecuencia varía rápidamente. Si las frecuencias se especifican explícitamente, es deseable generar el vector ω utilizando la función logspace. En la Figura 8.34 se muestra la función logspace.

El diagrama de Bode de la Figura 8.32 se genera utilizando el código que se muestra en la Figura 8.35. La función bode selecciona automáticamente el rango de frecuencias. Este rango lo puede seleccionar el usuario utilizando la función logspace. El uso de la función bode es exactamente el mismo que con funciones de transferencia, con la salvedad de que la entrada es un objeto en el espacio de estados en lugar de un objeto función de transferencia.

Tenga en cuenta que nuestro objetivo es diseñar sistemas de control que satisfagan ciertas especificaciones de comportamiento dadas en el dominio temporal. Por lo tanto, se debe establecer una conexión entre la respuesta en frecuencia y la respuesta transitoria temporal de un sistema. La relación entre las especificaciones dadas en el dominio temporal y las dadas en el dominio de la frecuencia depende de la aproximación del sistema por un sistema de segundo orden siendo sus polos **raíces dominantes**.

Se considera el sistema de segundo orden que se muestra en la Figura 8.24. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \qquad (8.60)$$

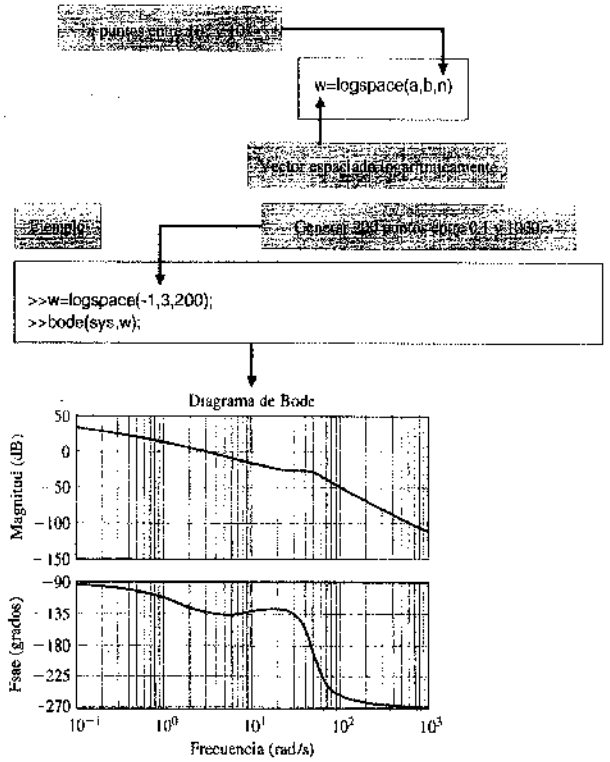


FIGURA 8.34
La función logspace.

```
% Código para el diagrama de Bode de la Figura 8.32
%
num=5*[0.1 1];
f1=[1 0]; f2=[0.5 1]; f3=[1/2500 .6/50 1];
den=conv(f1,conv(f2,f3));
%
sys=tf(num,den);
bode(sys)
```

FIGURA 8.35
Código para el diagrama de Bode de la Figura 8.32.

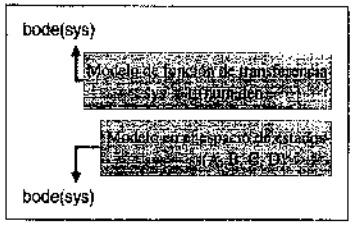
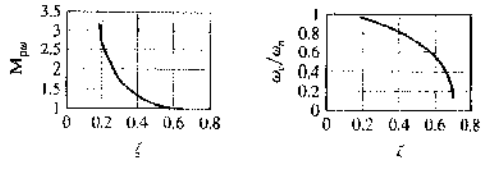


FIGURA 8.36
La función de **bode** con un modelo en el espacio de estados.



(a)

```
zeta=[0.15:0.01:0.7];
wr_over_wn=sqrt(1-2*zeta.^2);
Mp=(2*zeta .* sqrt(1-zeta.^2)).^(-1);
%
subplot(211),plot(zeta,Mp),grid
xlabel('\zeta'), ylabel('M_{p\omega}')
subplot(212),plot(zeta,wr_over_wn),grid
xlabel('\zeta'), ylabel('\omega_r/\omega_n')
```

(b)

FIGURA 8.37
(a) La relación entre (M_{p_ω}, ω_r) y (ζ, ω_r) para un sistema de segundo orden. (b) Código MATLAB.

En la Figura 8.25 se muestra la magnitud característica del diagrama de Bode asociada con la función de transferencia en lazo cerrado de la Ecuación (8.60). En la Figura 8.37 (y en la Figura 8.11) se muestra la relación entre la frecuencia de resonancia, ω_r, el máximo de la respuesta en frecuencia, M_{p_ω}, y la relación de amortiguamiento ζ y la frecuencia natural ω_n. La información de la Figura 8.37 sirve de bastante ayuda en el diseño de los sistemas de control en el dominio de la frecuencia que satisfagan especificaciones en el dominio temporal.

EJEMPLO 8.5. Sistema de una máquina de estampación

Se considera el modelo de diagrama de bloques de la Figura 8.29. El objetivo es seleccionar K de forma que el sistema en lazo cerrado tenga una respuesta temporal aceptable a una entrada escalón. En la Figura 8.38 se muestra un diagrama de bloques funcional que describe el proceso de diseño en el dominio frecuencial. Primero se elige $K = 2$ y después se itera K si el comportamiento no es aceptable. El código que se muestra en la Figura 8.39 se utiliza en el diseño. El valor de K se define en el nivel de la línea de orden. Después se ejecuta el código y se genera el diagrama de Bode en lazo cerrado. Los valores de M_{p_ω} y ω_r se determinan por inspección del diagrama de Bode. Estos valores se utilizan junto con la Figura 8.37 para determinar los valores correspondientes a ζ y ω_n.

Dada la relación de amortiguamiento ζ y la frecuencia natural ω_n, el tiempo de asentamiento y el tanto por ciento de sobreelongación se estiman mediante las fórmulas

$$T_s \simeq \frac{4}{\zeta\omega_n}, \qquad \text{P.O.} \simeq 100 \exp\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Si las especificaciones en el dominio temporal no se satisfacen, entonces se ajusta K y se itera.

Los valores para a ζ y ω_n que corresponden a $K = 2$ son a $\zeta = 0.29$ y $\omega_n = 0.88$. Esto lleva a una predicción de P.O. = 37% y $T_s = 15.7$ segundos. La respuesta a un escalón, que se muestra en la Figura 8.40, es una verificación de que las predicciones de comportamiento son bastante aproximadas y, por lo tanto, el sistema en lazo cerrado funciona adecuadamente.

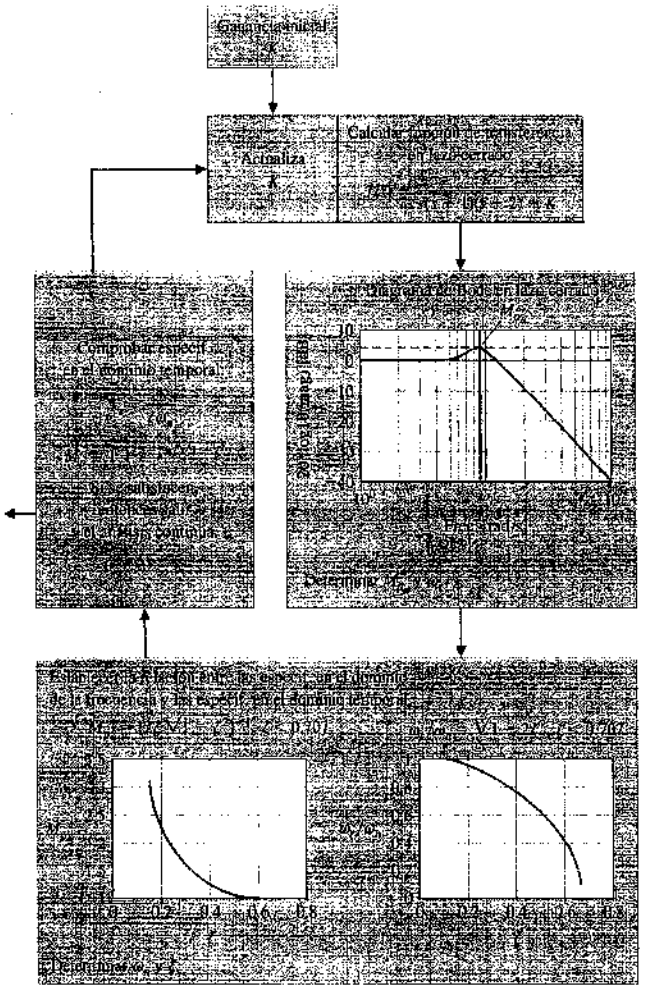


FIGURA 8.38
Diagrama de bloques funcionales del diseño en frecuencias del manipulador láser.

En este ejemplo, la aproximación de sistema de segundo orden es razonable y conduce a un diseño aceptable. Sin embargo, puede que la aproximación de segundo orden no conduzca siempre directamente a un buen diseño. Afortunadamente, MATLAB permite construir un diseño interactivo como ayuda en el proceso de diseño reduciendo las cargas computacionales manuales mientras proporciona un fácil acceso a un conjunto de herramientas clásicas y modernas. ■

engrave.m

```
num=[K]; den=[1 3 2 K];
sys=tf(num,den);
w=logspace(-1,1,400);
[mag,phase,w]=bode(sys,w);
[mp,l]=max(mag);wr=w(l);

zeta=sqrt(0.5*(1-sqrt(1-1/mp^2)));
wn=wr/sqrt(1-2*zeta^2);

ts=4/zeta/wn
po=100*exp(-zeta*pi/sqrt(1-zeta^2))
```

Función de transferencia en lazo cerrado

Diagrama de Bode en lazo cerrado

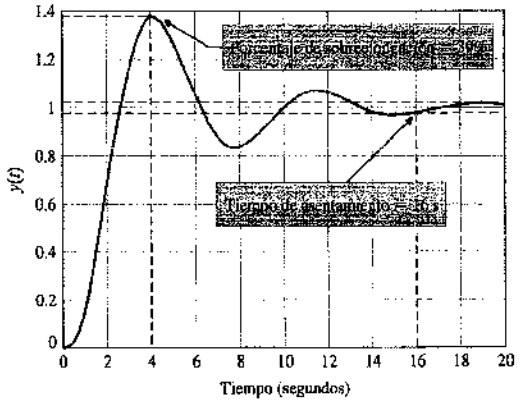
Solución de la Ec. (8.16)

```
>> K=2; engrave

ts =
   15.7962
po =
   39.4570
```

Se calculan y comprueban las especificaciones de diseño

FIGURA 8.39
Código para el diseño de un manipulador láser.



(a)

engraves.m

```
K=2; num=[K]; den=[1 3 2 K]; sys=tf(num,den);
t=[0:0.01:20];
y=step(sys,t); plot(t,y); grid
xlabel('Tiempo (segundos)'), ylabel('y(t)')
```

(b)

FIGURA 8.40
(a) Respuesta a un escalón para $K = 2$ del manipulador láser. (b) Código MATLAB.

8.9. EJEMPLO DE DISEÑO SECUENCIAL: SISTEMA DE LECTURA DE UNA UNIDAD DE DISCO

Como se muestra en la Figura 2.61, la unidad de disco utiliza una suspensión de tipo flexor para mantener el montaje de la cabeza lectora. Como se estudió en la Sección 3.12, este flexor se puede modelar mediante un muelle y una masa, como se muestra en la Figura 3.36. En este capítulo se incluirá el efecto de la flexión en el modelo del sistema motor-carga [22].

Como se muestra en la Figura 8.41, se modela el flexor con la cabeza montada como una masa M, un muelle k y un factor de fricción b. Se supone que la fuerza $u(t)$ se ejerce sobre el flexor mediante un brazo (*véase* la Figura 2.61). La función de transferencia de un amortiguador muelle-masa se desarrolló en el Capítulo 2, donde

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_3(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + (2\zeta s/\omega_n) + (s/\omega_n)^2}.$$

Un flexor típico y una cabeza tienen $\zeta = 0.3$ y una resonancia natural en $f_n = 3000$ Hz. Por lo tanto, $\omega_n = 18.85 \times 10^3$ como se muestra en el modelo del sistema (*véase* la Figura 8.42).

En primer lugar se dibujan las características de magnitud para el diagrama de Bode en lazo abierto. En la Figura 8.43 se muestra el diagrama de Bode. Obsérvese que el diagrama real tiene unos 10 dB de ganancia (sobre el dibujo asintótico) en la resonancia ($\omega = \omega_n$), como se muestra en el trazado. Éste es una representación de

$$20 \log |K(j\omega + 1)G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)|,$$

para el sistema de la Figura 8.42 cuando $K = 400$. Observe la resonancia en ω_n. Claramente, se desea evitar la excitación de esta resonancia.

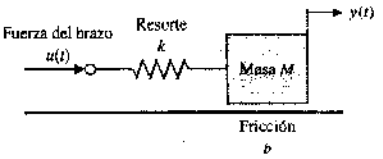


FIGURA 8.41
Modelo resorte, masa, fricción del flexor y la cabeza.

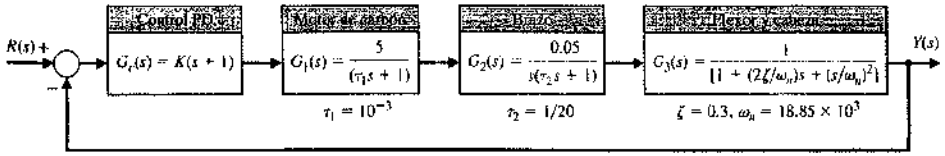


FIGURA 8.42. Control de posición de la cabeza de la unidad de disco, que incluye el efecto de flexión del montaje de la cabeza.

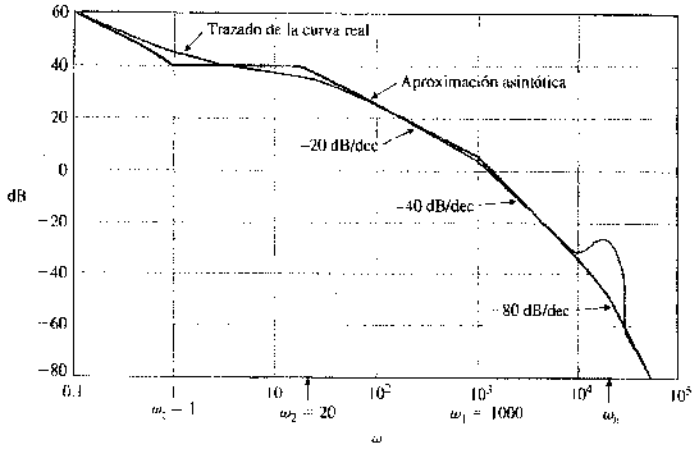


FIGURA 8.43. Trazado del diagrama de Bode de magnitud para el sistema de la Figura 8.42

En la Figura 8.44 se muestran las representaciones de la magnitud de los diagramas de Bode en lazo abierto y en lazo cerrado. El ancho de banda del sistema en lazo cerrado es $\omega_B = 2000$ rad/s. Se puede estimar el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de este sistema utilizando

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n},$$

donde $\zeta \simeq 0.8$ y $\omega_n \simeq \omega_B = 2000$ rad/s. Por lo tanto, es de esperar que $T_s = 2.5$ ms para el sistema de la Figura 8.42. Cuando $K \leqslant 400$, la resonancia está fuera del ancho de banda del sistema.

8.10. RESUMEN

En este capítulo se ha considerado la representación de un sistema de control con realimentación por sus características de respuesta en frecuencia. Se definió la respuesta en frecuencia de un sistema como la respuesta en el estado estacionario para una señal sinusoidal de entrada. Se consideraron varias formas de representación de la respuesta de frecuencia. Se mostró la gráfica polar de la respuesta en frecuencia de un sistema $G(j\omega)$ y las gráficas logarítmicas llamadas frecuentemente gráficas de Bode. Se ilustró el valor de la medida logarítmica. Se indicó la facilidad de obtener una gráfica de Bode para los diversos factores de $G(j\omega)$ y se consideró un ejemplo en detalle. La aproximación asintótica para dibujar el diagrama de Bode simplifica considerablemente los cálculos. En la

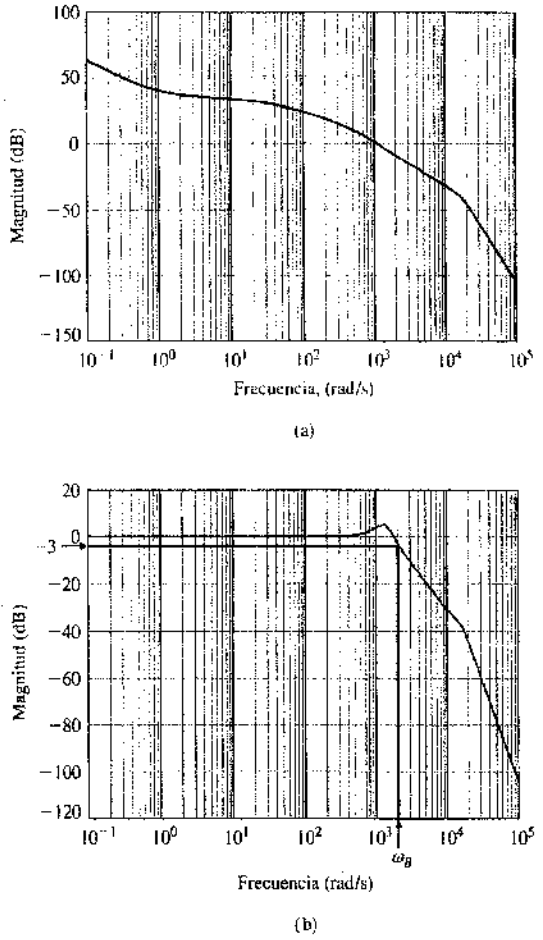


FIGURA 8.44. Diagrama de Bode de magnitud para (a) función de transferencia en lazo abierto y (b) lazo cerrado del sistema.

Tabla 8.5 se muestra un resumen de quince diagramas de Bode típicos. Se analizaron varias especificaciones de comportamiento en el dominio de la frecuencia; entre ellas estuvieron la magnitud máxima $M_{p\omega}$ y la frecuencia de resonancia ω_r. Se indicó la relación entre la representación gráfica de Bode y las constantes de error del sistema (K_p, y K_v). Finalmente, se consideró el diagrama de la magnitud logarítmica frente la fase para representar gráficamente la respuesta de frecuencia de un sistema.

Tabla 8-5 Diagramas de Bode para funciones de transferencias típicas

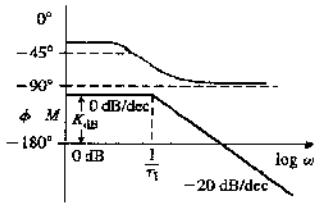
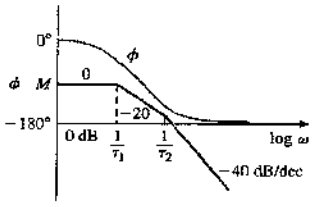
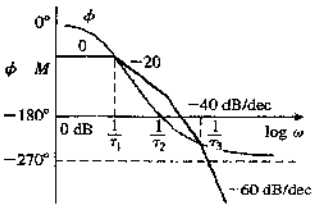
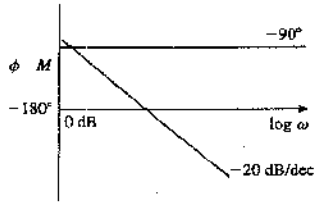
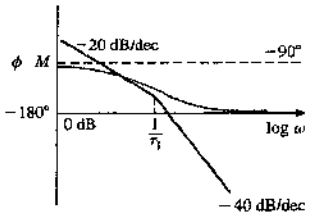
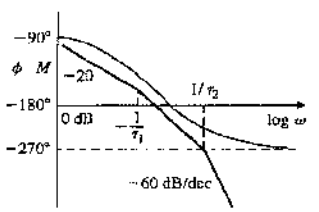
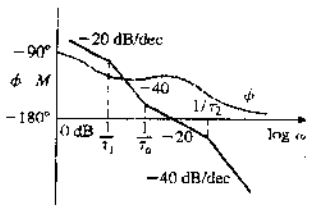
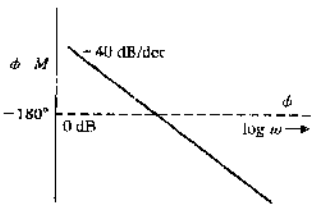
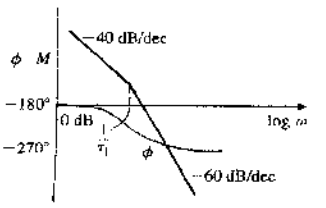
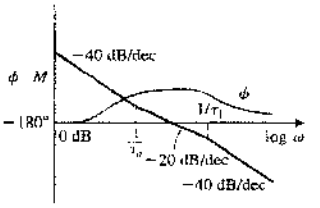
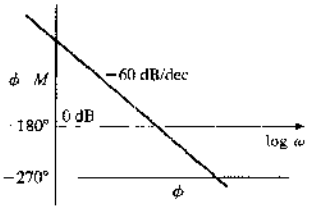
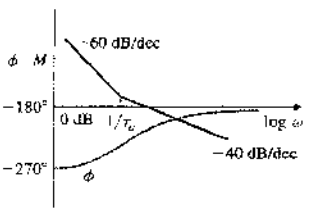
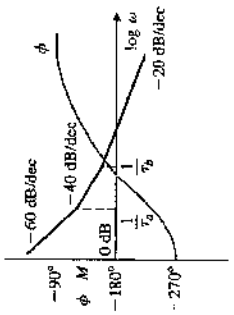
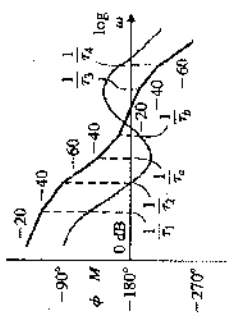
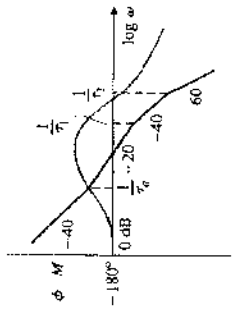
$G(s)$	Diagrama de Bode
1. $\dfrac{K}{s\tau_1 + 1}$	
2. $\dfrac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$	
3. $\dfrac{K}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)}$	
4. $\dfrac{K}{s}$	
5. $\dfrac{K}{s(s\tau_1 + 1)}$	
6. $\dfrac{K}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$	
7. $\dfrac{K(s\tau_a + 1)}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$	
8. $\dfrac{K}{s^2}$	
9. $\dfrac{K}{s^2(s\tau_1 + 1)}$	
10. $\dfrac{K(s\tau_a + 1)}{s^2(s\tau_1 + 1)}$ $\tau_a > \tau_1$	
11. $\dfrac{K}{s^3}$	
12. $\dfrac{K(s\tau_a + 1)}{s^3}$	

Tabla 8.5 (continuación)

$G(s)$	Diagrama de Bode
13. $\dfrac{K(s\tau_a+1)(s\tau_b+1)}{s^3}$	
14. $\dfrac{K(s\tau_a+1)(s\tau_b+1)}{s(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)(s\tau_3+1)(s\tau_4+1)}$	
15. $\dfrac{K(s\tau_a+1)}{s^2(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$	

EJERCICIOS

E8.1. Con el aumento de densidades en las bandas para las unidades de disco de los computadores, es necesario un diseño cuidadoso del control de posición del cabezal [1]. La función de transferencia es

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)^2}.$$

Dibujar la gráfica polar para este sistema cuando $K = 4$. Calcular la fase y la magnitud en $\omega = 0.5, 1, 2, 4$ u ∞.

Respuesta: $|G(j0.5)| = 3.2$ y $\angle G(j0.5) = -53°$.

E8.2. La mano robótica operada con tendones que se muestra en la Figura 1.14 emplea un actuador neumático [8]. Dicho actuador se puede representar por la expresión

$$G(s) = \frac{2572}{s^2 + 386s + 15\,434} = \frac{2572}{(s + 45.3)(s + 341)}.$$

Dibujar la respuesta en frecuencia de $G(j\omega)$. Demostrar que la magnitud de $G(j\omega)$ es -15.6 dB en $\omega = 10$ y -30 dB en $\omega = 200$. Demostrar también que la fase es $-150°$ en $\omega = 700$.

E8.3. Un brazo de robot tiene la función de transferencia de lazo abierto de control de la articulación

$$G(s) = \frac{300(s + 100)}{s(s + 10)(s + 40)}.$$

Comprobar que la frecuencia es 28.3 rad/s cuando el ángulo de fase de $(j\omega)$ es $-180°$. Calcular la magnitud de $G(j\omega)$ a esa frecuencia.

Respuesta: $|G(j28.3)| = -2.5$ dB

E8.4. La respuesta en frecuencia para un proceso de la forma

$$G(s) = \frac{Ks}{(s + a)(s^2 + 20s + 100)}$$

se muestra en la figura E8.4. Determinar K y a analizando las curvas de respuesta en frecuencia.

E8.5. En la Figura E8.5 se muestra la gráfica de magnitud de la función de transferencia

$$G(s) = \frac{K(1 + 0.5s)(1 + as)}{s(1 + s/8)(1 + bs)(1 + s/36)}$$

A partir de la gráfica, determinar K, a y b.

Respuesta: $K = 8$, $a = 1/4$, $b = 1/24$.

E8.6. Diversos estudios han propuesto un robot extravehicular que podría moverse alrededor de la estación espacial de la NASA para realizar diversas tareas en varios puntos de trabajo [9]. El brazo está controlado mediante un control de realimentación unitaria con

$$G(s) = \frac{K}{s(s/5 + 1)(s/200 + 1)}.$$

Dibujar el diagrama de Bode para $K = 10$ y determinar la frecuencia cuando $20 \log |G|$ es 0 dB.

E8.7. Considerar un sistema con una función de transferencia

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4}{(s^2 + s + 1)(s^2 + 0.4s + 4)}.$$

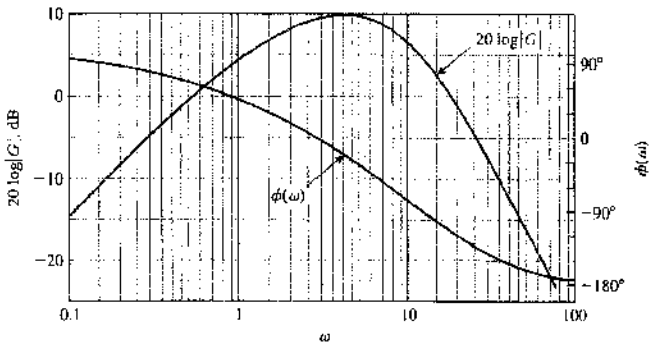


FIGURA E8.4
Diagrama de Bode.

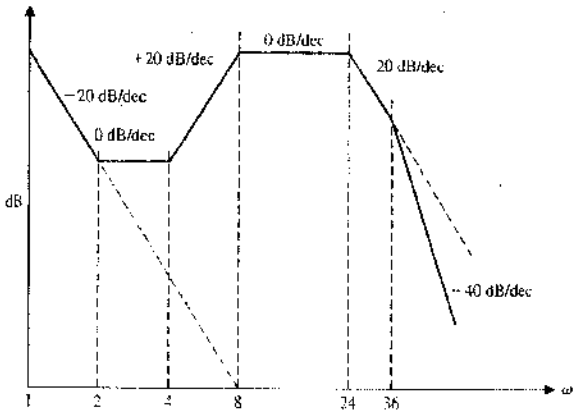


FIGURA E8.5
Diagrama de Bode.

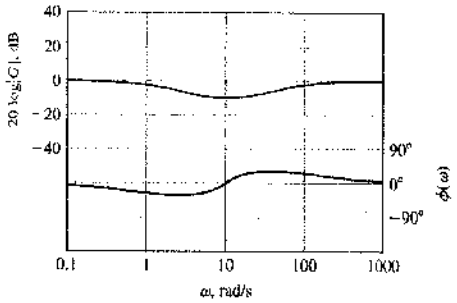


FIGURA E8.9
Diagrama de Bode.

Este sistema no presentará error en estado estacionario para una entrada escalón. (a) Dibujar la respuesta en frecuencia, observando los dos picos en la magnitud de la respuesta. (b) Predecir la respuesta temporal para una entrada escalón, observando que el sistema tiene cuatro polos y que no puede ser representado mediante un sistema de segundo orden dominante. (c) Dibujar la respuesta frente a una entrada escalón.

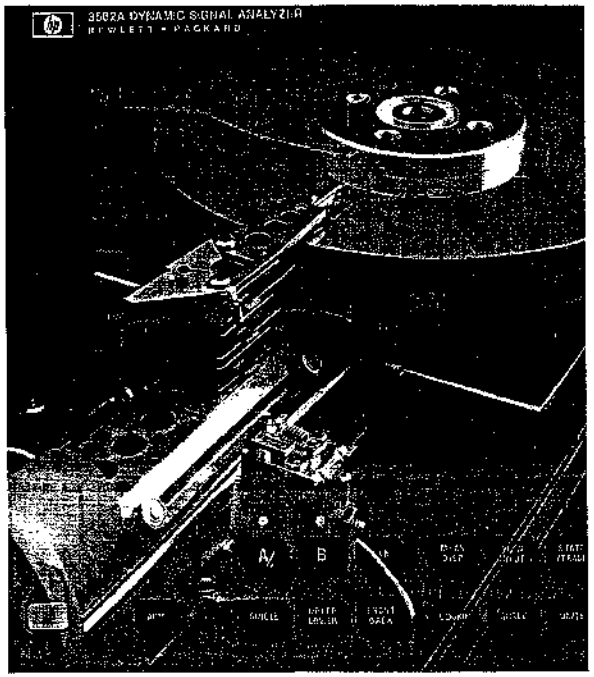
E8.8. Un sistema realimentado tiene una función de transferencia de lazo

$$G(s)H(s) = \frac{50(s-2)}{s^2 + 11s + 10}.$$

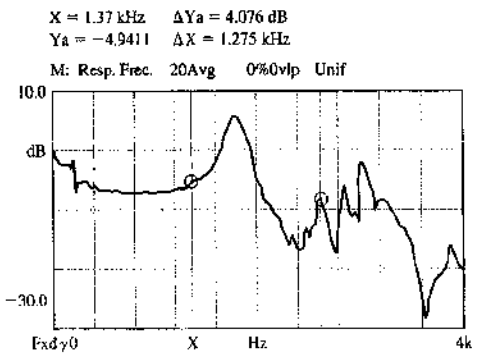
(a) Determinar las frecuencias esquina (frecuencias de corte) del diagrama de Bode. (b) Determinar la pendiente del diagrama asintótico a frecuencias muy bajas y a altas frecuencias. (c) Dibujar el diagrama de Bode de amplitudes.

E8.9. En la Figura E8.9 se muestra el diagrama de Bode de un sistema. Determinar la función de transferencia $G(s)$.

E8.10. El analizador dinámico que se muestra en la Figura E8.10(a) se puede utilizar para dibujar la respuesta en frecuencia de un modelo $G(j\omega)$ seleccionado. Es un mecanismo de posicionamiento de una unidad de disco, que utiliza un motor lineal para posicionar la cabeza. La Figura E8.10(b) muestra la respuesta en frecuencia real del mecanismo de posicionamiento de la cabeza. Calcular los polos y los ceros del sistema. Observe que $X = 1.37$ kHz en el primer cursor y $\Delta X = 1.257$ para el segundo.



(a)



(b)

FIGURA E8.10. (a) Fotografía de exposición dual que muestra el posicionador de la cabeza y el Analizador de Señal 3562A. (b) Respuesta en frecuencia. (Cortesía de Hewlett-Packard Co.)

E8.11. Considerar el sistema de control realimentado de la Figura E8.11. Dibujar el diagrama de Bode de $G(s)$ y determinar la frecuencia de cruce, esto es, la frecuencia cuando $20\log_{10}|G(j\omega)| = 0$ dB.

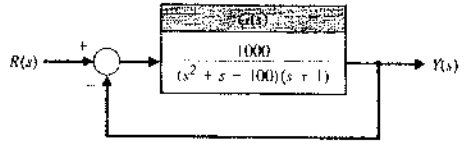


FIGURA E8.11. Sistema con realimentación unidad

E8.12. Considerar el sistema representado en variables de estado de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad -1]\mathbf{x} + [0]u$$

(a) Determinar la función de transferencia que representa al sistema. (b) Dibujar el diagrama de Bode.

E8.13. Determinar el ancho de banda del sistema de control realimentado de la Figura E813.

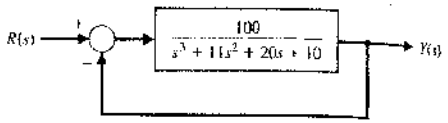


FIGURA E8.13. Sistema realimentado de tercer orden.

PROBLEMAS

P8.1. Dibujar la gráfica polar de la respuesta en frecuencia para las siguientes funciones de transferencia:

(a) $GH(s) = \dfrac{1}{(1 + 0.5s)(1 + 2s)}$

(b) $GH(s) = \dfrac{(1 + 0.5s)}{s^2}$

(c) $GH(s) = \dfrac{s - 10}{s^2 + 6s + 10}$

(d) $GH(s) = \dfrac{30(s + 8)}{s(s + 2)(s + 4)}$

P8.2. Dibujar la representación del diagrama de Bode de la respuesta en frecuencia para las funciones de transferencia dadas en el Problema 8.1.

P8.3. Una red de rechazo que puede utilizarse en lugar de la red en doble T del Ejemplo 8.4 es la red de puente en T de la Figura P8.3. La función de transferencia de esta red es

$$G(s) = \frac{s^2 + \omega_n^2}{s^2 + 2(\omega_n s/Q) + \omega_n^2}$$

(¿Puede demostrarse esto?), donde $\omega_n^2 = 2/LC$ y $Q = \omega_n L/R_1$ y R_2 se ajusta de tal forma que $R_2 = (\omega_n L)^2/4R_1$ [3]. (a) Determinar el patrón de polos y ceros y, utilizando el enfoque vectorial, calcular la respuesta en frecuencia aproximada. (b) Comparar la respuesta en frecuencia de las redes en doble T y puente en T cuando $Q = 10$.

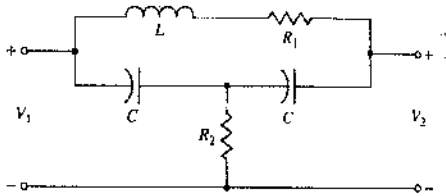


FIGURA P8.3. Red de puente en T.

P8.4. En la Figura P8.4 se muestra un sistema para controlar la presión en una cámara cerrada. La función de transferencia para el elemento de medición es

$$H(s) = \frac{150}{s^2 + 15s + 150}$$

y la función de transferencia para la válvula es

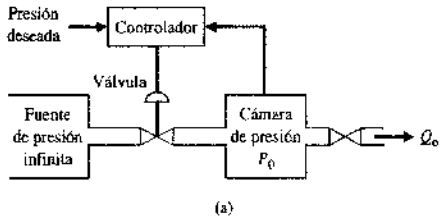
$$G_1(s) = \frac{1}{(0.1s + 1)(s/20 + 1)}.$$

La función de transferencia del controlador es

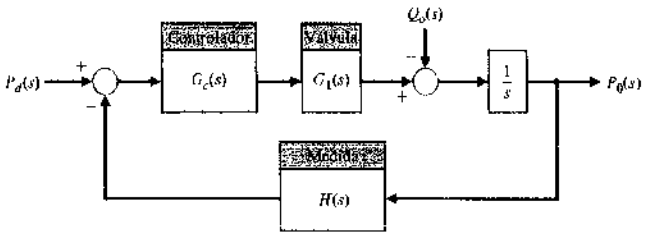
$$G_c(s) = 2s + 1.$$

Obtener las características de la respuesta en frecuencia para la función de transferencia del lazo

$$G_c(s)G_1(s)H(s) \cdot [1/s].$$



(a)



(b)

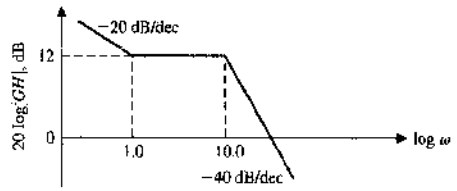
FIGURA P8.4
(a) Controlador de presión.
(b) Diagrama de bloques del modelo.

P8.5. La industria robótica de Estados Unidos está creciendo a una tasa anual del 30% [8]. Un robot industrial típico tiene seis ejes o grados de libertad. Un sistema de control de posición para una articulación sensora de fuerza tiene una función de transferencia

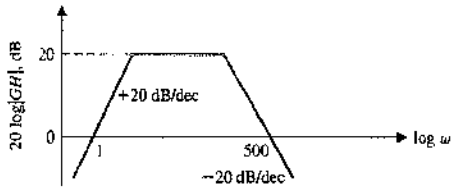
$$G(s) = \frac{K}{(1 + s/5)(1 + s)(1 - s/10)(1 + s/50)},$$

donde $H(s) = 1$ y $K = 10$. Dibujar el diagrama de Bode para este sistema.

P8.6. En la Figura P8.6 se muestran las curvas para dos funciones de transferencia. Dibujar las curvas asintóticas de cambio de fase para cada sistema. Determinar la función de transferencia para cada sistema. Suponer que los sistemas tienen funciones de transferencia de fase mínima.



(a)



(b)

FIGURA P8.6
Curvas de magnitud asintótica.

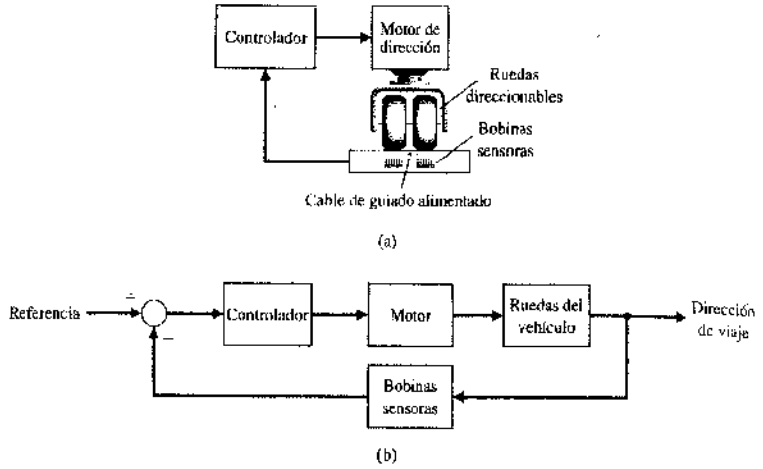


FIGURA P8.7
Control de dirección de ruedas.

P8.7. Se pueden emplear vehículos sin conductor en almacenes, en aeropuertos y en muchas otras aplicaciones. Como se muestra en la Figura P8.7(a), estos vehículos siguen un cable fijado al piso y, para mantener la dirección adecuada, ajustan la dirección de las ruedas delanteras [10]. Las bobinas sensoras, montadas en el grupo de las ruedas delanteras, ajustan la dirección del viaje al detectar un error. El sistema global de control se muestra en la Figura P8.7(b). La función de transferencia de lazo abierto es

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+\pi)^2} = \frac{K_r}{s(s/\pi+1)^2}.$$

Se desea tener un ancho de banda del sistema de lazo cerrado que exceda de 2π rad/s. (a) Hágase $K_r = 2\pi$ y dibujar el diagrama de Bode. (b) Empleando el diagrama de Bode, obtener la curva de la magnitud logarítmica frente al ángulo de fase.

P8.8. En la Figura P8.8 se muestra un sistema de control con realimentación. Las especificaciones para el sistema de lazo cerrado requieren que el sobrepaso para una entrada de escalón sea menor que el 10%. (a) Determinar la especificación correspondiente en el dominio de la frecuencia M_{p_ω} para la función de transferencia de lazo cerrado

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = T(j\omega).$$

(b) Determinar la frecuencia de resonancia, ω_r. (c) Determinar el ancho de banda del sistema en lazo cerrado.

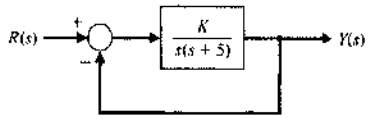


FIGURA P8.8

P8.9. Dibujar las curvas de la magnitud logarítmica frente al ángulo de fase para las funciones de transferencia (a) y (b) del Problema 8.1.

P8.10. En el sistema mostrado en la figura P8.10 se utiliza un actuador lineal para situar una masa M. La posición real de la masa se mide con una resistencia deslizable de alambre, y por esto $H(s) = 1.0$. La ganancia del amplificador se selecciona de forma que el error en estado estacionario del sistema sea menor que el 1% de la magnitud de la referencia de posición $R(s)$. El actuador tiene una bobina de campo con una resistencia $R_f = 0.1$ ohm y $L_f = 0.2$ henrios. La masa de la carga es de 0.1 kg y la fricción es de 0.2 ns/m. La constante del resorte es igual a 0.4 n/m. (a) Determinar la ganancia K necesaria para mantener un error en estado estacionario menor que el 1% para una entrada de escalón. Esto es, K_p debe ser mayor que 99. (b) Dibujar el diagrama de Bode para la función de transferencia del lazo $GH(s)$. (c) Dibujar la curva de la magnitud logarítmica frente al ángulo de fase para $GH(j\omega)$. (d) Dibujar el diagrama de Bode para la función de transferencia de lazo cerrado $Y(j\omega)/R(j\omega)$. Determinar M_{p_ω}, ω_r y el ancho de banda.

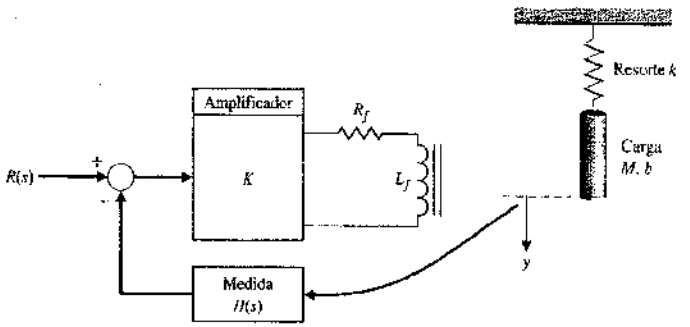


FIGURA P8.10. Control con actuador lineal.

P8.11. El timón automático de un barco sería una aplicación particularmente útil de la teoría de control con realimentación [20]. En el caso de mares muy transitados, por ejemplo, es importante mantener el rumbo del barco en una trayectoria recta. Un sistema automático es capaz de mantener un error mucho más pequeño en la dirección deseada que el que puede lograr el timonel, quien hace las correcciones en intervalos infrecuentes. Se ha desarrollado un modelo matemático del sistema del timón para un barco que se mueve con velocidad constante y desviaciones pequeñas respecto del rumbo deseado. Para un barco grande, la función de transferencia es

$$G(s) = \frac{E(s)}{\delta(s)} = \frac{0.164(s+0.2)(-s+0.32)}{s^2(s+0.25)(s-0.009)},$$

donde $E(s)$ es la transformada de Laplace para la desviación del barco respecto al rumbo deseado y $\delta(s)$ es la transformada de Laplace para el ángulo de deflexión del timón. Verificar si la respuesta de frecuencia del barco, $E(j\omega)/\delta(j\omega)$, es la que se muestra en la Figura P8.11.

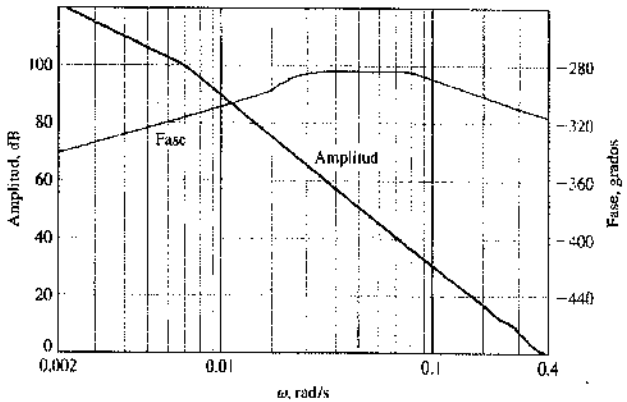


FIGURA P8.11. Respuesta en frecuencia del sistema de control de un barco.

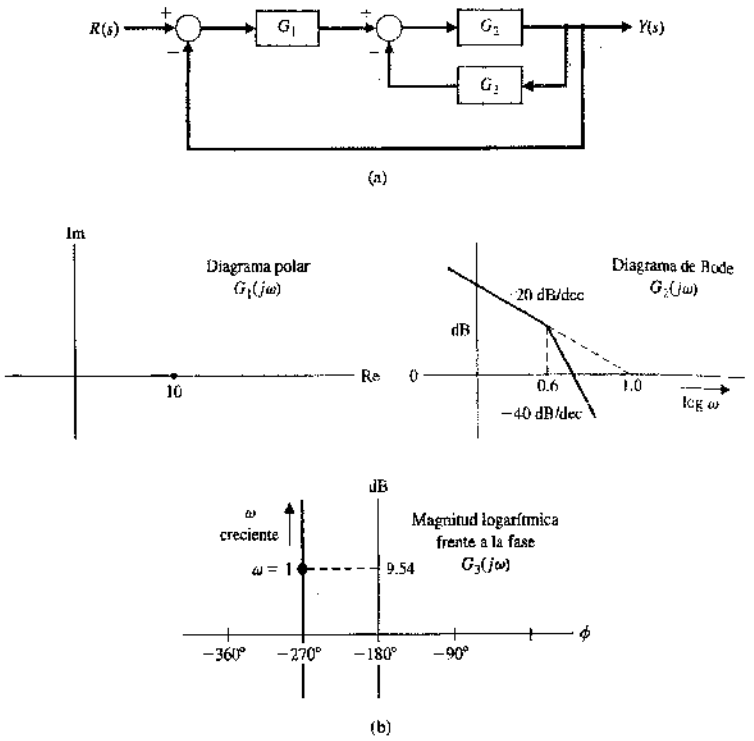


FIGURA P8.12
Sistema realimentado.

P8.12. En la Figura P8.12(a) se muestra el diagrama de bloques para un sistema de control con realimentación. Las funciones de transferencia de los bloques se representan por las curvas de respuesta en frecuencia mostradas en la Figura P8.12(b). (a) Determinar la razón de amortiguamiento ζ del sistema cuando G_3 se desconecta de éste. (b) Conectar G_3 y determinar la razón de amortiguamiento ζ. Suponer que los sistemas tienen funciones de transferencia de fase mínima.

P8.13. En la Figura P8.13 se muestra un sistema de control de posición que puede construirse usando un motor de ca y componentes de ca. El transformador de control y sincronía puede considerarse como un transformador con un devanado giratorio. El rotor del detector de sincronía de posición gira con la carga a través de un ángulo θ_0. El motor de sincronía se excita con un voltaje de referencia de CA, por ejemplo, 115 V, 60 cps. La señal de entrada o de mando es $R(s) = \theta_{in}(s)$ y se aplica girando el rotor del transformador de control. El motor de ca de dos fases opera como resultado de la señal de error del amplificador. Las ventajas de un sistema de control de ca son (1) la inmunidad a los efectos de cambios de cc y (2) la sencillez y precisión de los componentes de ca. Para medir la respuesta de frecuencia de lazo abierto simplemente se desconecta X de Y y X' de Y'. Entonces se conecta un generador de señales con modulación sinusoidal a los terminales Y-Y' y se mide la respuesta en X-X'. [Antes de conectar el generador de ca deberá ajustarse a cero el error $(\theta_0 - \theta_i)$.] En la Figura P8.13(b) se muestra la respuesta en frecuencia que resulta del lazo $GH(j\omega)$. Determinar la función de transferencia $GH(j\omega)$. Suponer que el sistema tiene una función mínima de transferencia de fase.

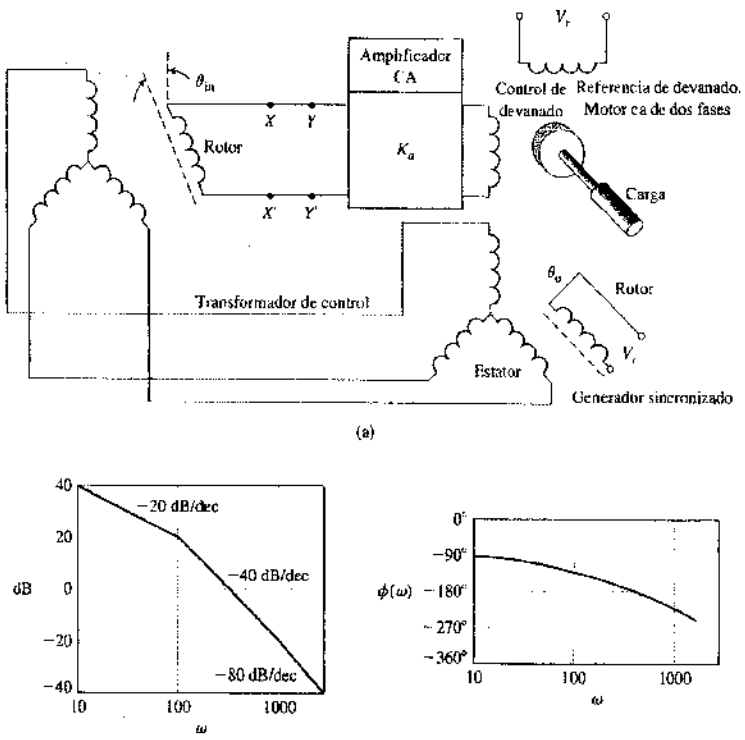


FIGURA P8.13
(a) Control de motor CA.
(b) Respuesta en frecuencia.

P8.14 Un amplificador de paso de banda se puede representar por el modelo de lazo de la Figura P8.14 [3]. Cuando $R_1 = R_2 = 1$ kΩ, $C_1 = 100$ pf, $C_2 = 1$ μF y $K = 100$, demostrar que

$$G(s) = \frac{10^9 s}{(s + 1000)(s + 10^7)}.$$

(a) Esbozar el diagrama de Bode de $G(j\omega)$. (b) Encontrar la ganancia de la banda media (en dB). (c) Encontrar los puntos de alta y baja frecuencias a − 3 dB.

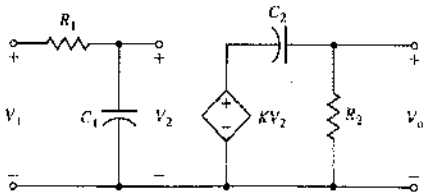


FIGURA P8.14
Amplificador de banda.

P8.15. Con el objeto de determinar la función de transferencia $G(s)$ de una planta se puede medir la respuesta de frecuencia usando una entrada sinusoidal. Un sistema produce los siguientes datos:

ω, rad/s	$\lvert G(j\omega)\rvert$	Fase, grados
0.1	50	−90
1	5.04	−92.4
2	2.57	−96.2
4	1.36	−100
5	1.17	−104
6.3	1.03	−110
8	0.97	−120
10	0.97	145
12.5	0.74	−169
20	0.13	−245
31	0.026	−258

Determinar la función de transferencia $G(s)$.

P8.16. La lanzadera espacial se ha utilizado para reparar satélites y el telescopio Hubble. La Figura P8.16 ilustra cómo un miembro de la tripulación, con su pie atado a la plataforma al final del brazo de robot de la lanzadera, utilizó sus brazos para parar el giro del satélite. El sistema de control del brazo de robot tiene una función de transferencia en lazo cerrado

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{42.7}{s^2 + 10.2s + 42.7}.$$

(a) Determinar la respuesta $y(t)$ para una entrada escalón unidad, $R(s) = 1/s$. (b) Determinar el ancho de banda del sistema.

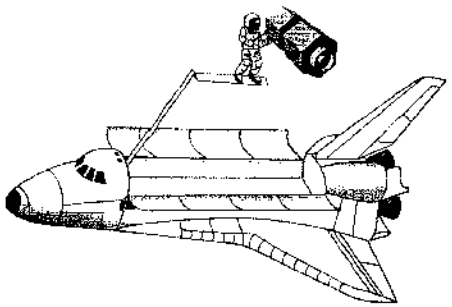


FIGURA P8.16. Satélite reparador.

P8.17. El avión experimental de alas oblicuas (OWA) tiene un ala que pivota, como se muestra en la Figura P8.17. El ala está en su posición normal no inclinada para bajas velocidades y se puede mover a posiciones inclinadas para vuelos supersónicos mejorados [11]. El sistema de control de avión tiene $H(s) = 1$ y

$$G(s) = \frac{4(0.5s + 1)}{s(2s + 1)\left[\left(\frac{s}{8}\right)^2 + \left(\frac{s}{20}\right) + 1\right]}.$$

(a) Dibujar el diagrama de Bode. (b) Determinar la frecuencia ω_1 cuando la magnitud es 0 dB y determinar la frecuencia ω_2 cuando la fase es $-180°$.

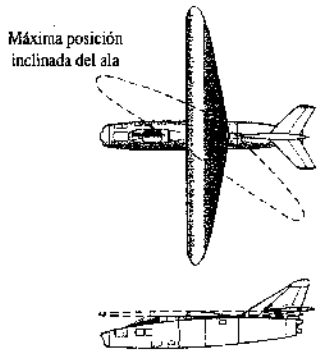


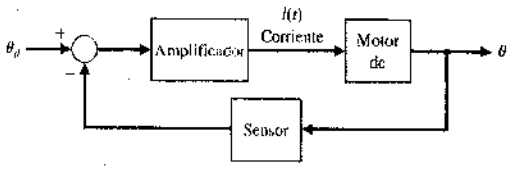
FIGURA P8.17. El avión de la ola oblicua, vistas desde arriba y de lado.

P8.18. La operación remota juega un papel importante en medios hostiles, tales como en medios nucleares, medios de altas temperaturas o en el espacio profundo. A pesar de los esfuerzos de muchos investigadores, no se ha desarrollado todavía un sistema de teleoperación que sea comparable con la operación directa del ser humano. Los investigadores han intentado mejorar las teleoperaciones mediante realimentación de abundante información sensorial adquirida por el robot a fin de que el operador experimente una sensación de presencia. Este concepto se denomina tele-existencia o telepresencia [9].

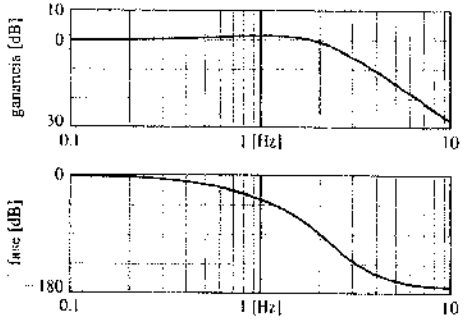
Los sistemas de tele-existencia maestro-esclavo consisten en un sistema maestro con una sensación de presencia visual y auditiva, y un mecanismo de robot esclavo antropomórfico con un brazo que tiene siete grados de libertad y un mecanismo de locomoción. El movimiento de la cabeza del operador, el movimiento del brazo derecho, el movimiento de la mano derecha y otros movimientos auxiliares se miden mediante el sistema maestro. Un sistema estéreo de entradas visuales y auditivas especialmente diseñado se monta sobre el mecanismo del cuello del robot controlado para obtener información visual y auditiva del entorno remoto. Esa información se envía al sistema maestro y se aplican al sistema de visualización estéreo especialmente diseñado para evocar la sensación de presencia del operador. El sistema de control de locomoción tiene la función de transferencia de lazo

$$GH(s) = \frac{12(s + 0.5)}{s^2 + 13s + 30}.$$

Obtener el diagrama de Bode para $GH(j\omega)$ y determinar la frecuencia cuando $20\log|GH|$ está muy próximo a 0 dB.



(a)



(b)

FIGURA P8.19
(a) Controlador de motor.
(b) Gráfica medida.

P8.19. En la Figura P8.19(a) se muestra un controlador de motor DC muy utilizado en automóviles. En la Figura P8.19(b) se muestra la gráfica medida de $\Theta(s)/I(s)$. Determinar la función de transferencia $\Theta(s)/I(s)$.

P8.20. La robótica espacial es un campo emergente. La robótica y la automatización serán clave en la tecnología para el desarrollo satisfactorio de los proyectos espaciales. Los robots espaciales autónomos y diestros pueden reducir la carga de trabajo de los astronautas y aumentar la eficiencia operacional en muchas misiones. La Figura P8.20 muestra un concepto llamado robot libre de vuelo [9, 13]. La característica más importante de los robots espaciales, que los diferencia claramente de los robots que operan en tierra, es el no poseer una base fija. Cualquier movimiento del brazo manipulador inducirá unas fuerzas de reacción y momentos en la base, que perturban su posición y altitud.

El control de una de las articulaciones del robot se puede representar mediante la función de transferencia

$$GH(s) = \frac{781(s + 10)}{s^2 + 22s + 484}.$$

(a) Dibujar el diagrama de Bode $GH(j\omega)$. (b) Determinar el máximo valor de $20\log|GH|$, la frecuencia a la que se produce y la fase en dicha frecuencia.

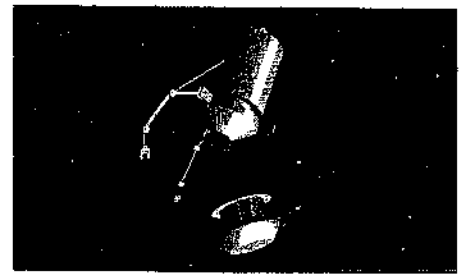


FIGURA P8.20. Un robot espacial con tres brazos, mostrado capturando un satélite.

P8.21. El viento cortante de altitud baja es la causa principal de accidentes aéreos en Estados Unidos. La mayoría de estos accidentes han sido causados bien por microrráfagas (intensas tormentas de corriente descendente de pequeña escala y altitud baja, que impactan en la superficie y causan fuertes flujos divergentes de viento) o bien por polvo frontal en el borde delantero del flujo de la tormenta que se expande. El encuentro con una microrráfaga es un serio problema para el **aterrizaje** y **despegue** de los aviones, puesto que el avión está a bajas altitudes y viaja sólo un 25% por encima de su velocidad de pérdida de sustentación [12].

El diseño de un controlador para un avión que encuentra viento cortante después del despegue se puede tratar como un problema de estabilizar la velocidad de ascenso a un valor deseado. El controlador resultante utiliza sólo información de dicha velocidad de ascenso.

El sistema estándar con realimentación unidad negativa de la Figura 8.24 tiene una función de transferencia

$$G(s) = \frac{-200s^2}{s^3 + 14s^2 + 44s + 40}$$

Observe la ganancia negativa de $G(s)$. El sistema representa el sistema de control para la velocidad de ascenso. Dibujar el diagrama de Bode y determinar la ganancia (en dB) cuando la fase es $-180°$.

P8.22. En la Figura P8.22 se muestra la respuesta en frecuencia de un proceso $G(j\omega)$. Determinar $G(s)$

P8.23. En la Figura P8.23 se muestra la respuesta en frecuencia de un proceso $G(j\omega)$. Deducir el tipo del sistema (número de integradores). Determinar la función de transferencia del sistema $G(s)$. Calcular el error frente a una entrada escalón unitario.

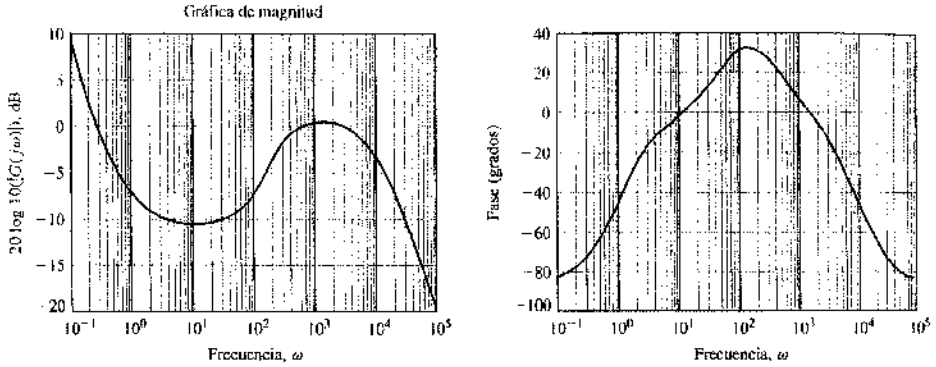


FIGURA P8.22

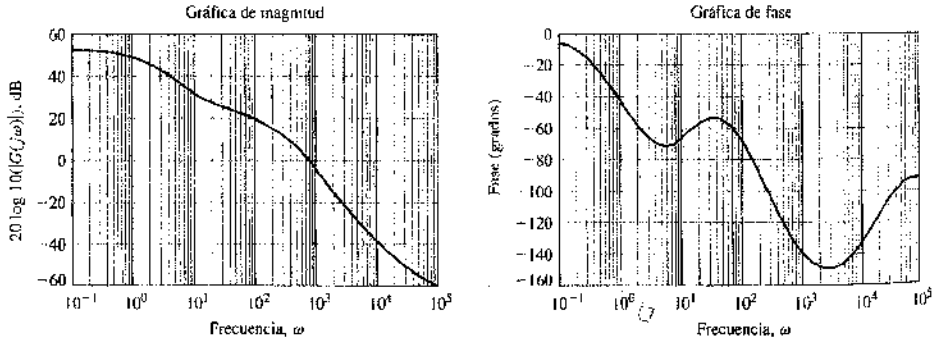


FIGURA P8.23

P8.24. En la Figura P824 se muestra el diagrama de Bode lazo cerrado de un sistema de cinta de transporte. Suponer que la función de transferencia del sistema, $T(s)$, tiene dos polos complejos conjugados. (a) Determinar el mejor modelo de segundo orden para el sistema. (b) Determinar el ancho de banda del sistema. (c) Predecir el tanto por ciento de sobreelongación y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) para una entrada escalón.

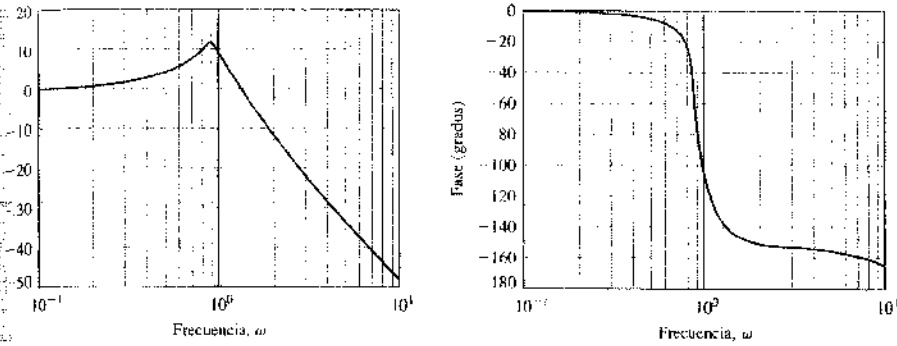


FIGURA P8.24

P8.25. Un sistema con realimentación unidad en lazo cerrado tiene un error en estado estacionario igual a $A/10$, donde la entrada es $r(t) = At^2/2$. El diagrama de Bode de amplitud y de fase frente a ω se muestra en la Figura P8.25. Determinar la función de transferencia $G(s)$.

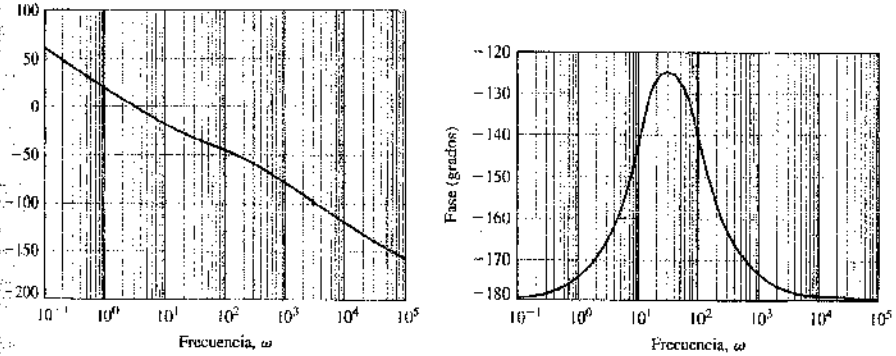


FIGURA P8.25

P8.26. Determinar la función de transferencia del circuito del amplificador operacional que se muestra en la Figura P8.26. Suponer un amplificador operacional ideal. Dibujar la respuesta en frecuencia cuando $R = 10$ kΩ , $R_1 = 9$ kΩ, $R_2 = 1$ kΩ y $C = 1$ μF.

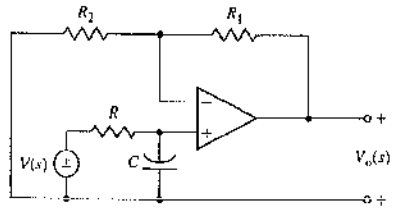


FIGURA P8.26
Un circuito de amplificador operacional.

PROBLEMAS AVANZADOS

PA8.1. En la Figura PA8.1(a) se muestra un sistema de amortiguador resorte-masa. En la Figura PA8.1(b) se muestra el diagrama de Bode obtenido experimentalmente utilizando funciones forzantes sinusoidales. Determinar los valores numéricos de m, b y k.

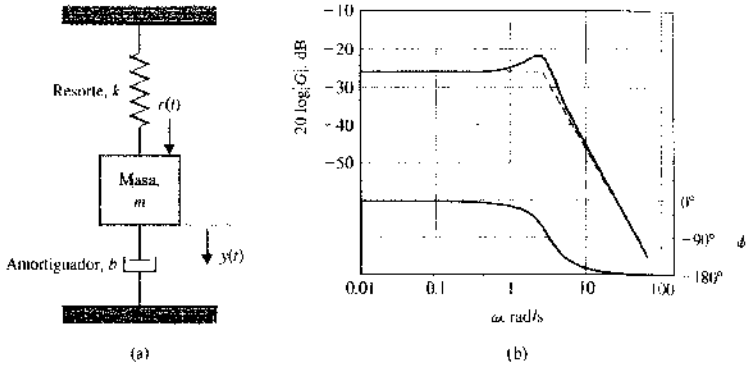


FIGURA PA8.1
Un sistema resorte-masa-amortiguador.

PA8.2. En la Figura PA8.2 se muestra un sistema. El valor nominal del parámetro b es 4.0. Determinar la sensibilidad S_b^T y dibujar el diagrama de Bode de magnitud $20 \log |S_b^T|$ para $K = 2$.

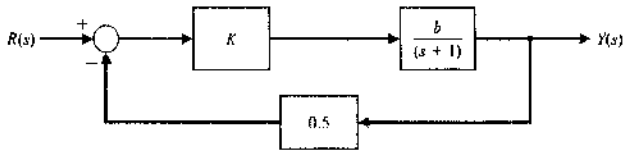


FIGURA PA8.2
Sistema con parámetro b.

PA8.3. Cuando un automóvil se desplaza por la carretera, los desplazamientos verticales en los neumáticos actúan como movimiento de excitación para el sistema de suspensión del automóvil [16]. La Figura PA8.3 muestra un diagrama esquemático de un modelo simplificado del sistema de suspensión de un automóvil, para el que se supone una entrada sinusoidal. Determinar la función de transferencia $X(s)/R(s)$ y dibujar el diagrama de Bode cuando $M = 1$ kg, $b = 4$ N-s/m y $k = 18$ N/m.

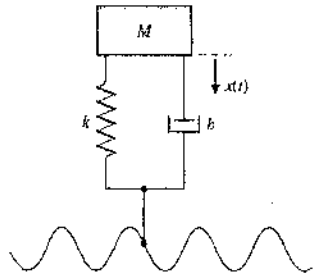


FIGURA PA8.3
Modelo de sistema de auto suspensión.

PA8.4. En la Figura PA8.4(b) se muestra un helicóptero con una carga al final de un cable. En la Figura PA8.4(b) se muestra el sistema de control de posición, en el que la realimentación visual está representada por $H(s)$. Dibujar el diagrama de Bode de $GH(j\omega)$. (a) Determinar la función de transferencia en lazo abierto $G(s)$. (b) Dibujar el diagrama de magnitud logarítmica y de fase (similar al de la Figura 8.27) e identificar los puntos de frecuencia para los que ω es igual a 1, 10, 50, 110 y 500. (c) ¿Es el sistema en lazo abierto estable? ¿Es estable en lazo cerrado?

PA8.5. Un sistema en lazo cerrado con realimentación unidad tiene una función de transferencia

$$T(s) = \frac{10(s + 1)}{s^2 + 9s + 10}.$$

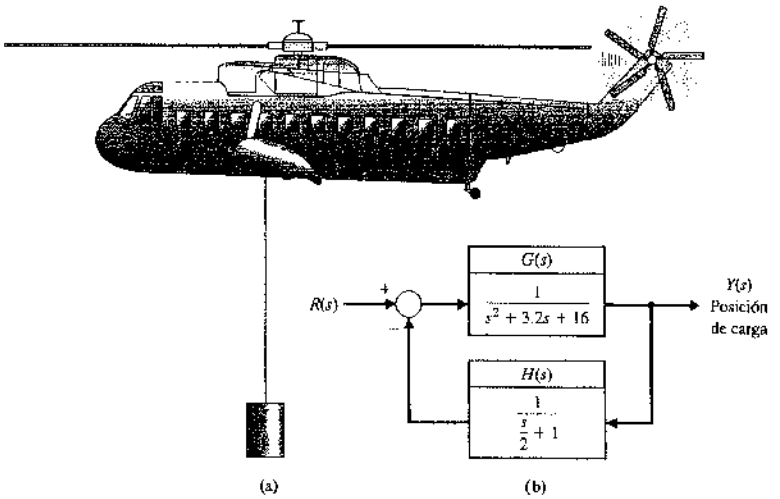


FIGURA PA8.4
Sistema de control realimentado de un helicóptero.

PROBLEMAS DE DISEÑO

PDC8.1 En este capítulo, se desea utilizar un controlador PD tal que

$$G_c(s) = K(s + 2).$$

El tacómetro no se utiliza (*véase* la Figura PDC4.1). Dibujar el diagrama de Bode para el sistema cuando $K = 40$. Determinar la respuesta de este sistema para un escalón y estimar la sobreelongación y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%).

PD8.1. El comportamiento de una persona conduciendo un automóvil es interesante [14, 15, 16, 21]. El diseño y desarrollo de sistemas para una dirección a las cuatro ruedas, suspensiones activas, frenado independiente y «conducción por cable» proporcionan al ingeniero bastante más libertad para alterar las calidades de manejo del vehículo de la que existía en el pasado.

El vehículo y el conductor están representados por el modelo de la Figura PD8.1, en el que el conductor desarrolla

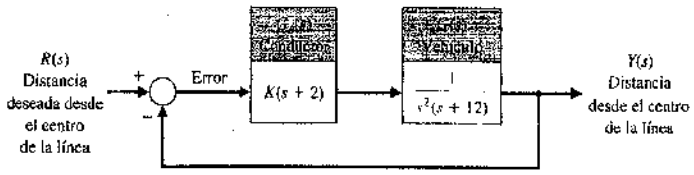


FIGURA PD8.1
Control de un sistema Human Steering.

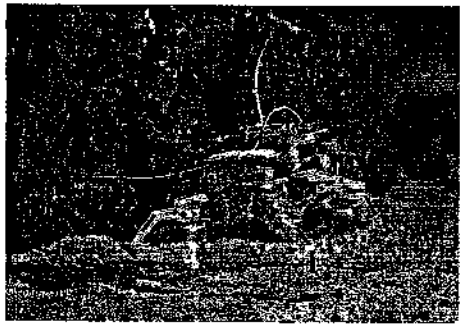
anticipación de la desviación del vehículo desde la línea central. Para $K = 1$, dibujar el diagrama de Bode de (a) la función de transferencia en lazo abierto $G_c(s)G(s)$ y (b) la función de transferencia en lazo cerrado $T(s)$. (c) Repetir los apartados (a) y (b) con $K = 50$. (d) Un conductor puede seleccionar la ganancia K. Determinar la ganancia apropiada de manera que $M_{p_\omega} \leq 2$ y el ancho de banda máximo que se puede obtener para el sistema en lazo cerrado. (e) Determinar el error en estado estacionario del sistema para una entrada rampa, $r(t) = t$.

PD8.2. La exploración no tripulada de planetas como Marte requiere un alto nivel de autonomía debido a los retrasos de comunicación entre los robots en el espacio y sus estaciones base en la Tierra. Esto afecta a todos los componentes del sistema: planificación, sensores y mecanismos. En particular, tal nivel de autonomía se puede lograr sólo si el robot tiene un sistema de percepción que pueda construir y mantener fiablemente modelos del medio. El sistema de percepción es una parte importante del desarrollo de un sistema completo que incluye planificación y diseño del mecanismo. El vehículo objetivo es el robot araña, un robot caminante de cuatro patas que se muestra en la Figura PD8.2(a), desarrollada por el Jet Propulsory Laboratory de la NASA [18]. En la Figura PD8.2(b) se muestra el sistema de control de una pata.

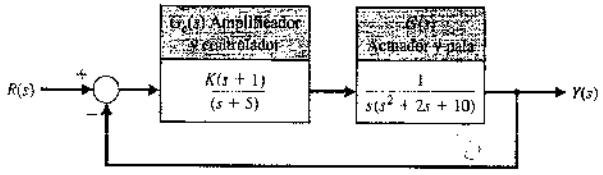
(a) Dibujar el diagrama de Bode de $G_c(s)G(s)$ cuando $K = 20$. Determinar (1) la frecuencia cuando la fase es $-180°$ y (2) la frecuencia cuando $20 \log |GG_c| = 0$ dB. (b) Dibujar el diagrama de Bode para la función de transferencia en lazo cerrado $T(s)$ cuando $K = 20$. (c) Determinar M_{p_ω}, ω_r y ω_B para el sistema en lazo cerrado cuando $K = 30$ y $K = 40$. (d) Seleccionar la mejor ganancia de las dos especificadas en el apartado (c) cuando se desea que la sobreelongación del sistema para una entrada escalón $r(t)$ sea menor que el 35% y el tiempo de asentamiento sea el menor posible.

PD8.3. Como se muestra en la Figura PD8.3(a), se utiliza una tabla para posicionar viales bajo la cabeza del dispensador. El objetivo es un movimiento rápido, preciso y suave para eliminar el rebose. En la Figura PD8.3(b) se muestra el sistema de control de posición. Puesto que se quiere una sobreelongación pequeña para una entrada escalón además de un tiempo de asentamiento pequeño, se limitará $20 \log M_{p_\omega}$ a 3 dB para $T(j\omega)$. Dibujar el diagrama de bloques para una ganancia K que haga al sistema estable. Después ajustar K hasta $20 \log M_{p_\omega} = 3$ dB y determinar el ancho de banda del sistema en lazo cerrado. Determinar el error del sistema en estado estacionario para la ganancia K que verifique los requisitos para M_{p_ω}.

PD8.4. La anestesia se puede administrar automáticamente haciendo uso de un sistema de control. Para ciertas operaciones, tales como cirugía en el cerebro o en los ojos, los movimientos involuntarios de los músculos pueden resultar desastrosos. Para garantizar condiciones adecuadas para la operación, se administran relajantes que bloquean los movimientos involuntarios de los músculos.

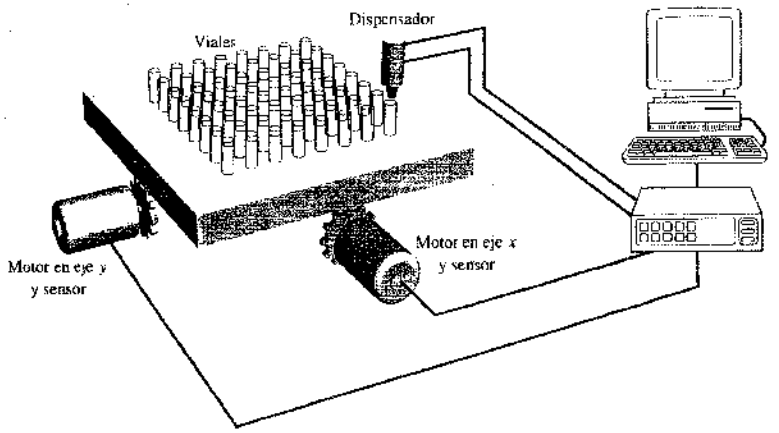


(a)

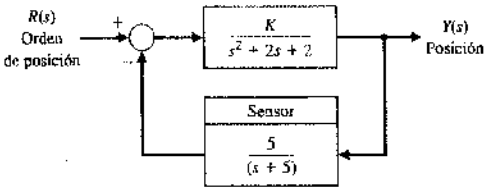


(b)

FIGURA PD8.2
(a) El robot Araña de Marte (Fotografía cortesía de la NASA.) (b) Diagrama de bloques del sistema de control de una pata.



(a)



(b)

FIGURA PD8.3
Mesa automática y dispensador.

Un método habitual utilizado por los anestesistas para la administración de los relajantes musculares es inyectar una dosis de tamaño determinado por la experiencia e inyectar suplementos si se requieren. Sin embargo, un anestesista a veces puede fallar al mantener el nivel de relajación, inyectando demasiado relajante en el paciente. Se pueden lograr mejoras significativas introduciendo el concepto de control automático, con lo que resulta una considerable reducción en el relajante total consumido [19].

En la Figura PD8.4 se muestra un modelo del proceso de anestesia. Seleccionar una ganancia K y una constante del controlador τ de manera que el ancho de banda del sistema en lazo cerrado se maximice mientras $M_{p_\omega} \leq 1.5$. Determinar el ancho de banda logrado con el diseño.

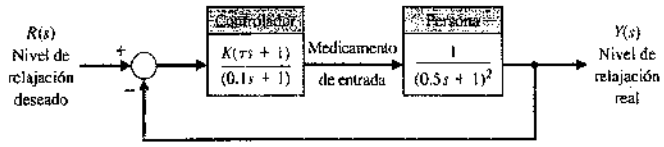
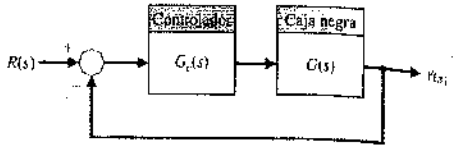
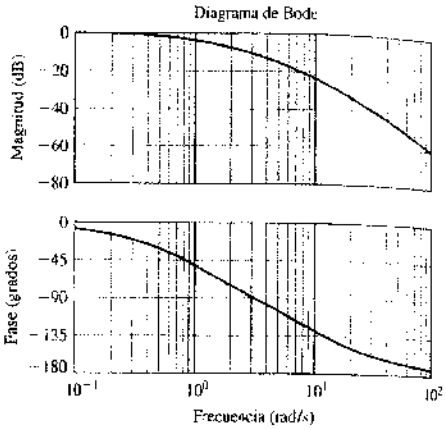


FIGURA PD8.4
Modelo de un sistema de control de anestesia.

PD8.5. Considerar el sistema de control de la Figura PD8.5(a) en el que la planta es una «caja negra» de la que se conoce poco sobre la forma de su modelo matemático. La única información disponible sobre la planta es la respuesta en frecuencia que se muestra en la Figura PD8.5(b). Diseñar un controlador $G_c(s)$ que consiga las especificaciones siguientes: (i) La frecuencia de cruce está entre 10 rad/s y 50 rad/s; (ii) La magnitud de $G_c(s)G(s)$ es mayor que 20 dB para $\omega < 0.1$ rad/s.



(a)



(b)

FIGURA PD8.5
(a) Sistema realimentado con una «caja negra» como planta
(b) Respuesta en frecuencia de la «caja negra» representada por $G(s)$

PROBLEMAS CON MATLAB

PM8.1. Considerar la función de transferencia en lazo cerrado

$$T(s) = \frac{25}{s^2 + s + 25}.$$

Obtener, utilizando MATLAB, el diagrama de Bode y verificar que la frecuencia de resonancia es 5 rad/s y la magnitud del pico M_{p_ω} es 14 dB.

PM8.2. Dibujar los diagramas de Bode para las siguientes funciones de transferencia y verificarlos con MATLAB:

(a) $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+10)}$

(b) $G(s) = \dfrac{s+10}{(s+1)(s+20)}$

(c) $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 50}$

(d) $G(s) = \dfrac{s-5}{(s+1)(s^2+12s+50)}$

PM8.3. Para cada una de las siguientes funciones de transferencia, dibujar el diagrama de Bode y determinar la frecuencia de cruce (esto es, la frecuencia a la cual $20\log_{10}|G(j\omega)| = 0$ dB):

(a) $G(s) = \dfrac{1000}{(s+10)(s+20)}$

(b) $G(s) = \dfrac{100}{(s+0.1)(s^2+s+20)}$

(c) $G(s) = \dfrac{50(s+10)}{(s+1)(s+100)}$

(d) $G(s) = \dfrac{1000(s^2+14s+50)}{(s+5)(s+80)(s+500)}$

PM8.4. Un sistema con realimentación unidad negativa tiene la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{50}{s(s+5)}.$$

Determinar el ancho de banda del sistema en lazo cerrado utilizando MATLAB para obtener el diagrama de Bode y estimar el ancho de banda a partir del dibujo. Etiquetar el diagrama con el ancho de banda.

PM8.5. En la Figura PM8.5 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de segundo orden.
(a) Determinar el pico de resonancia, M_{p_ω}, la frecuencia de resonancia ω_r y el ancho de banda ω_B del sistema a partir del diagrama de Bode en lazo cerrado. Generar el diagrama de Bode con MATLAB desde $\omega = 0.1$ hasta $\omega = 1000$ rad/s utilizando la función logspace. (b) Estimar la razón de amortiguamiento, ζ, y la frecuencia natural, ω_n, utilizando las Ecuaciones (8.36) y (8.37) de la Sección 8.2. (c) A partir de la función de transferencia en lazo cerrado, calcular el valor real de ζ y de ω_n y compararlos con los resultados del apartado (b).

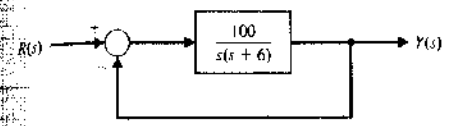


FIGURA PM8.5. Sistema de control realimentado de segundo orden.

PM8.6. Considerar el sistema realimentado de la Figura PM8.6. Obtener los diagramas de Bode de las funciones de transferencia en lazo abierto y en lazo cerrado utilizando MATLAB.

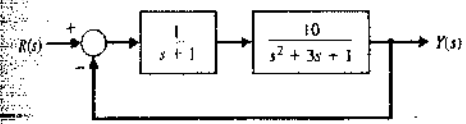


FIGURA PM8.6. Sistema realimentado en lazo cerrado.

PM8.7. Un sistema con realimentación unidad tiene la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2p)}.$$

Generar un diagrama del ancho de banda frente al parámetro p tal que $0 < p < 1$.

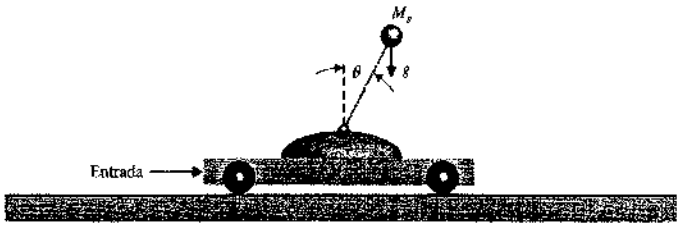
PM8.8. Considerar el problema de controlar un péndulo invertido en una base móvil como el mostrado en la Figura PM8.8(a). La función de transferencia en lazo abierto del sistema es

$$G(s) = \frac{-1/M_b L}{s^2 - \dfrac{(M_b + M_s)g}{M_b L}}.$$

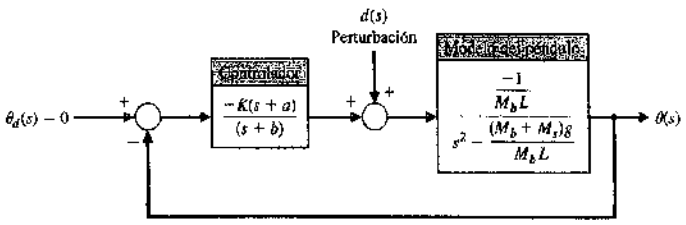
El objetivo del diseño es balancear el péndulo (es decir, $\theta(t) \simeq 0$) en presencia de perturbaciones a la entrada. En la Figura PM8.8(b) se muestra un diagrama de bloques de este sistema. Sea $M_s = 10$ kg, $M_b = 100$ kg, $L = 1$ m, $g = 9.81$ m/s^2, $a = 5$ y $b = 10$. Las especificaciones de diseño, basadas en una perturbación de entrada escalón unitario, son las siguientes:

1. el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) es menor que 10 segundos,
2. el tanto por ciento de sobreelongación es menor del 40%, y
3. el error de seguimiento en estado estacionario es menor que 0.1° en presencia de la perturbación.

Desarrollar un conjunto de códigos interactivos en MATLAB que proporcione el diseño del sistema de control. El primer código debería lograr al menos lo siguiente:



(a)



(b)

FIGURA PM8.8
(a) Un péndulo invertido en una base móvil.
(b) Una representación de diagrama de bloques.

1. Calcular la función de transferencia en lazo cerrado a partir de la perturbación a la salida con K como parámetro de ajuste.
2. Dibujar el diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado.
3. Calcular automáticamente la salida, M_{p_t} y ω_r.

Como paso intermedio, utilizar M_{p_t} y ω_r y las Ecuaciones (8.36) y (8.37) de la Sección 8.2 para estimar ζ y ω_n. El segundo código debería al menos estimar el tiempo de asentamiento y el tanto por ciento de sobreelongación utilizando ζ y ω_n como variables de entrada.

Si las especificaciones de comportamiento no se satisfacen, cambiar K e iterar el diseño utilizando los dos primeros códigos. Después de completar estos dos primeros pasos, el paso final es comprobar el diseño mediante simulación. Las funciones del tercer código son las siguientes.

1. dibujar la respuesta $v(t)$, frente a una perturbación escalón unidad con K como parámetro de ajuste, y
2. etiquetar el dibujo de forma adecuada.

Utilizado códigos interactivos, diseñar el controlador para conseguir las especificaciones utilizando métodos de Bode de respuesta en frecuencia. Para comenzar el proceso de diseño, utilizar métodos analíticos para calcular el mínimo valor de K para lograr la especificación de error de seguimiento en estado estacionario. Como primer intento en el proceso de diseño utilizar el mínimo K.

PMB.9. Diseñar un filtro, $G(s)$, con la siguiente respuesta en frecuencia:

1. Para $\omega < 1$ rad/s, la magnitud $20\log_{10}|G(j\omega)| < 0$ dB
2. Para $1 < \omega < 1000$ rad/s, la magnitud $20\log_{10}|G(j\omega)| \geq 0$ dB
3. Para $\omega > 1000$ rad/s, la magnitud $20\log_{10}|G(j\omega)| < 0$ dB

Intentar maximizar el pico de magnitud tan cerca de $\omega = 40$ rad/s como sea posible.

TÉRMINOS Y CONCEPTOS

Ancho de banda. La Frecuencia a la cual la respuesta en frecuencia decae 3 dB de su valor a baja frecuencia.

Década. Factor de diez en frecuencia (por ejemplo, el rango de frecuencias desde 1 rad/s a 10 rad/s es una década).

Decibelio (dB). Unidades de la ganancia logarítmica.

Diagrama de Bode. Logaritmo de la magnitud de una función de transferencia dibujado frente al logaritmo de la frecuencia, ω. La fase, ϕ, de la función de transferencia se dibuja separada frente al logaritmo de la frecuencia.

Diagrama polar. Diagrama de la parte real de $G(j\omega)$ frente a la parte imaginaria de $G(j\omega)$.

Frecuencia de corte. Frecuencia a la que la aproximación asintótica de la respuesta en frecuencia para un polo (o cero) cambia la pendiente.

Frecuencia esquina. *Véase* Frecuencia de corte.

Frecuencia natural. La frecuencia natural de oscilación que ocurriría para dos polos complejos si el amortiguamiento es igual a cero.

Función de transferencia de fase mínima. Todos los ceros de una función de transferencia están en el semiplano izquierdo del plano s.

Función de transferencia de fase no mínima. Función de transferencia con ceros en el semiplano derecho del plano-s.

Frecuencia de resonancia. Frecuencia, ω_r, a la cual se logra el máximo valor de la respuesta en frecuencia del par de polos complejos conjugados.

Función de transferencia en el dominio de la frecuencia. Relación entre la salida y la señal de entrada donde la entrada es una sinusoide. Se expresa como $G(j\omega)$.

Gráfica logarítmica. *Véase* Diagrama de Bode.

Magnitud logarítmica. Logaritmo de la magnitud de una función de transferencia, $20\log_{10}|G|$.

Máximo valor de la respuesta en frecuencia. Un par de polos complejos darán lugar al máximo valor para la respuesta en frecuencia que tendrá lugar en la frecuencia de resonancia.

Pareja de transformada de Fourier. Un par de funciones, una en el dominio temporal, denotada por $f(t)$, y otra en el dominio de la frecuencia, denotada por $F(j\omega)$, relacionadas mediante la transformada de Fourier como $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, donde $\mathcal{F}$ denota la transformada de Fourier.

Pareja de transformada de Laplace. Un par de funciones, una en el dominio temporal, denotada por $f(t)$, y otra en el dominio de la frecuencia, denotada por $F(s)$, relacionadas mediante la transformada de Laplace como $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, donde $\mathcal{L}$ denota la transformada de Laplace.

Raíces dominantes. Raíces de la ecuación característica que representan o dominan la respuesta transitoria en lazo cerrado.

Red pasa todo. Red de fase no mínima que pasa todas las frecuencias con igual ganancia.

Respuesta en frecuencia. Respuesta en estado estacionario de un sistema frente a una entrada sinusoidal.

Transformada de Fourier. Transformada de una función temporal, $f(t)$, en el dominio de la frecuencia.

CAPÍTULO 9

Estabilidad en el dominio de la frecuencia

9.1. Introducción 498
9.2. Transformación de los contornos en el plano s 499
9.3. El criterio de Nyquist 504
9.4. Estabilidad relativa y el criterio de Nyquist 516
9.5. Criterios de comportamiento en el dominio temporal especificados en el dominio frecuencial 522
9.6. Ancho de banda del sistema 529
9.7. Estabilidad de sistemas de control con retardos 530
9.8. Ejemplo de diseño: Vehículo de reconocimiento controlado de forma remota 534
9.9. Controladores PID en el dominio de la frecuencia 537
9.10. Estabilidad en el dominio de la frecuencia utilizando MATLAB 538
9.11. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 547
9.12. Resumen 549

SINOPSIS

En capítulos anteriores, se analizó la estabilidad y se desarrollaron distintas herramientas para determinar la estabilidad y lograr la estabilidad relativa. En este capítulo se continúa con el análisis mostrando cómo los métodos de respuesta en frecuencia se pueden utilizar para investigar la estabilidad. Se desarrollan conceptos importantes como el margen de ganancia, el margen de fase y el ancho de banda en el contexto de diagramas de Bode y diagramas de Nyquist. Se presenta un resultado de estabilidad de respuesta en frecuencia —conocido como criterio de estabilidad de Nyquist— y su uso se ilustra mediante distintos ejemplos interesantes. Se estudian las implicaciones de tener retardos temporales puros en el sistema tanto desde el punto de vista de la estabilidad como en atención al comportamiento. Se verá cómo el retraso de fase introducido por un retardo temporal puede desestabilizar a un sistema estable. El capítulo termina con el análisis de la respuesta en frecuencia del Ejemplo de diseño secuencial: sistema de lectura de una unidad de disco.

9.1. INTRODUCCIÓN

En el caso de un sistema de control, es necesario determinar si es o no estable. Además, si el sistema es estable, frecuentemente es necesario investigar la estabilidad relativa. En el Capítulo 6 se analizó el concepto de estabilidad y varios métodos para determinar las estabilidades absoluta y relativa de un sistema. El método de Routh-Hurwitz comentado en el Capítulo 6 es útil para investigar la ecuación característica expresada en función de la variable compleja $s = \sigma + j\omega$. Después, en el Capítulo 7, se investigó la estabilidad relativa de un sistema utilizando el método del lugar de las raíces, que también está en función de la variable compleja s. En este capítulo interesa investigar la estabilidad de un sistema en el dominio de la frecuencia real, esto es, en términos de la respuesta de frecuencia tratada en el Capítulo 8.

La respuesta de frecuencia de un sistema representa la respuesta sinusoidal del sistema en el estado estacionario y proporciona suficiente información para la determinación de la estabilidad relativa del sistema. Como la respuesta de frecuencia de un sistema puede obtenerse fácilmente por medios experimentales excitando el sistema con señales de entrada sinusoidales, puede utilizarse para investigar la estabilidad relativa del sistema cuando los valores de los parámetros de éste no se han determinado. Además, sería útil un criterio de la estabilidad en el dominio de la frecuencia para determinar el enfoque adecuado que permita modificar un sistema con el objeto de aumentar su estabilidad relativa.

H. Nyquist desarrolló en 1932 un criterio de la estabilidad en el dominio de la frecuencia, que se mantiene como un método fundamental para la investigación de la estabilidad de los sistemas lineales de control [1, 2]. El **criterio de estabilidad de Nyquist** se basa en un teorema de la teoría de la función de una variable compleja, debido a Cauchy. El teorema de Cauchy está relacionado con la transformación de los contornos en el plano s complejo; afortunadamente, el teorema puede entenderse sin una prueba formal, en la que se emplea la teoría de la variable compleja.

Para determinar la estabilidad relativa de un sistema de lazo cerrado, se debe investigar la ecuación característica del sistema:

$$F(s) = 1 + L(s) = 0. \tag{9.1}$$

Para el sistema de control con un único lazo de la Figura 9.1, $L(s) = G(s)H(s)$. Para un sistema de lazos múltiples, en la Sección 2.7 se encontró que, en términos de los grafos de flujo de señal, la ecuación característica es

$$F(s) = \Delta(s) = 1 - \Sigma L_n + \Sigma L_m L_q \ldots = 0,$$

donde $\Delta(s)$ es el determinante del grafo. Por tanto, se puede representar la ecuación característica de los sistemas de lazo simple o de lazos múltiples mediante la Ecuación (9.1), donde $L(s)$ es una función racional de s. Para garantizar la estabilidad, se debe estar seguro de que todos los ceros de $F(s)$ caigan en la parte izquierda del plano s. Para investigar esto, Nyquist propuso una transformación de la parte derecha del plano s en el plano $F(s)$. Por tanto, para utilizar y entender el criterio de Nyquist, se considerará primero de forma breve la transformación de los contornos en el plano complejo.

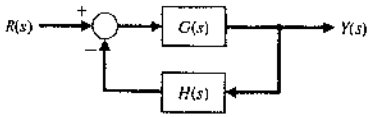


FIGURA 9.1
Sistema de control con realimentación de lazo simple.

9.2. TRANSFORMACIÓN DE LOS CONTORNOS EN EL PLANO-*s*

Es interesante la transformación de los contornos en el plano s mediante una función $F(s)$. Una **transformación del contorno** es un contorno o trayectoria en un plano transformado en otro plano, o trasladado a éste, mediante la relación $F(s)$. Como s es una variable compleja, $s = \sigma + j\omega$, la función $F(s)$ es por sí misma compleja y puede definirse como $F(s) = u + jv$, representándose en un plano $F(s)$ complejo con coordenadas u y v. Como ejemplo, se considera una función $F(s) = 2s + 1$ y un contorno en el plano s como se muestra en la Figura 9.2(a). La transformación del contorno cuadrado unitario del plano s en el plano $F(s)$ se efectúa a través de la relación $F(s)$, de forma que

$$u + jv = F(s) = 2s + 1 = 2(\sigma + j\omega) + 1. \tag{9.2}$$

Por tanto, en este caso, se tiene

$$u = 2\sigma + 1 \tag{9.3}$$

y

$$v = 2\omega. \tag{9.4}$$

De este modo, se ha transformado el contorno por medio de $F(s)$ en otro de idéntica forma, un cuadrado, con el centro desplazado en una unidad y la magnitud del lado multiplicada por dos. Este tipo de transformación, que retiene los ángulos del contorno del plano s en el plano $F(s)$, se conoce como **transformación conforme**. También es interesante notar que un contorno cerrado en el plano s da como resultado un contorno cerrado en el plano $F(s)$.

Los puntos A, B, C y D, como se muestra en el contorno del plano s, se transforman en los mismos puntos A, B, C y D del plano $F(s)$. Además, puede indicarse un recorrido del contorno del plano s por la dirección $ABCD$ y las flechas mostradas en el contorno. Después se presenta un recorrido semejante en el contorno del plano $F(s)$ a medida que se pasa en el orden $ABCD$, como muestran las flechas. Por convención, la superficie dentro de un contorno a la derecha de su recorrido se considera la superficie encerrada por el contorno. Por tanto, se supondrá que el recorrido de un contorno en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj es positivo y que la superficie encerrada dentro

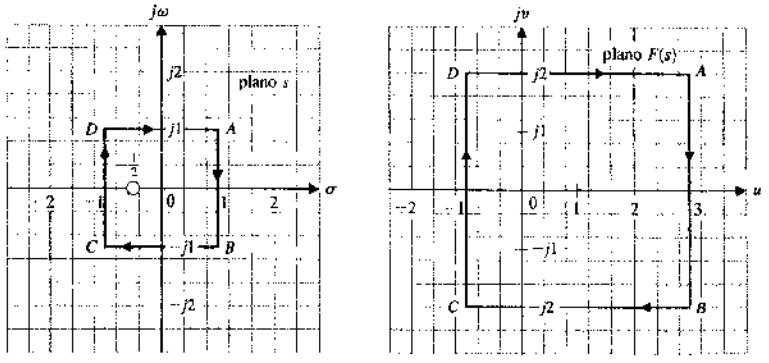


FIGURA 9.2
Transformación de un contorno cuadrado mediante $F(s) = 2s + 1 = 2(s + 1/2)$.

Tabla 9.1 Valores de $F(s)$

	Punto A		Punto B		Punto C		Punto D	
$s=\sigma+j\omega$	$1+j1$	1	$1-j1$	$-j1$	$-1-j1$	-1	$-1+j1$	$j1$
$F(s)=u+jv$	$\frac{4+2j}{10}$	1	$\frac{4-2j}{10}$	$\frac{1-2j}{5}$	$-j$	-1	$+j$	$\frac{1+2j}{5}$
		3						

del contorno está a la derecha. Esta convención es opuesta a la empleada generalmente en la teoría de la variable compleja, pero es igualmente aplicable y de uso general en la teoría de los sistemas de control. El lector podría considerar la superficie de la derecha como el camino a lo largo del contorno en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj, y llamar a esta regla «del movimiento del reloj».

Normalmente, interesa una $F(s)$ que sea función racional de s. Por tanto, valdrá la pena considerar otro ejemplo de transformación de un contorno. Se considera de nuevo el contorno cuadrado unitario para la función

$$F(s) = \frac{s}{s+2}. \tag{9.5}$$

En la Tabla 9.1 se proporcionan varios valores de $F(s)$ cuando s recorre el contorno cuadrado y en la Figura 9.3(b) se muestra el contorno que resulta en el plano $F(s)$. El contorno en el plano $F(s)$ encierra el origen del plano $F(s)$ pues este origen cae dentro de la superficie encerrada por el contorno.

El teorema de Cauchy está relacionado con la transformación de una función $F(s)$, que tiene un número finito de polos y ceros dentro del contorno, de forma que se pueda expresar $F(s)$ como

$$F(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{n}(s+s_i)}{\prod_{k=1}^{M}(s+s_k)}, \tag{9.6}$$

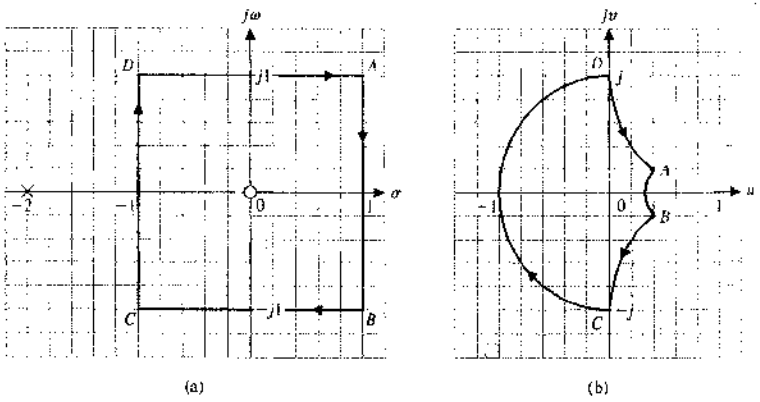


FIGURA 9.3
Transformación para $F(s)=s/(s+2)$.

donde s_i son los ceros y s_k los polos de la función $F(s)$. Esta función es la ecuación característica, de forma que

$$F(s) = 1 + L(s), \tag{9.7}$$

donde

$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

Por tanto, se tiene

$$F(s) = 1 + L(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s)+N(s)}{D(s)} = \frac{K\prod_{i=1}^{n}(s+s_i)}{\prod_{k=1}^{M}(s+s_k)}, \tag{9.8}$$

y los polos de $L(s)$ son los polos de $F(s)$. Sin embargo, los ceros de $F(s)$ son las raíces características del sistema e indican su respuesta. Esto se aclara si se recuerda que la salida del sistema es

$$Y(s) = T(s)R(s) = \frac{\Sigma P_k\Delta_k}{\Delta(s)}R(s) = \frac{\Sigma P_k\Delta_k}{F(s)}R(s), \tag{9.9}$$

donde P_k y Δ_k son los factores y cofactores de la trayectoria según se definieron en la Sección 2.7.

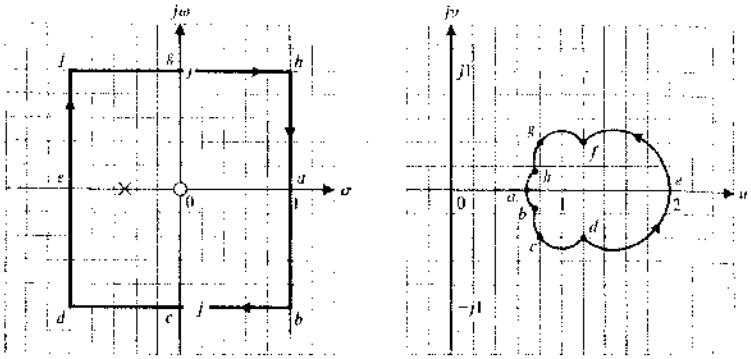
Ahora bien, examinando de nuevo el ejemplo cuando $F(s) = 2(s + 1/2)$, se tiene un cero de $F(s)$ en $s = -1/2$, como se muestra en la Figura 9.2. El contorno que se escogió (esto es, el cuadrado unitario) encierra y rodea una vez el cero dentro de su superficie. De forma semejante, para la función $F(s) = s/(s + 2)$, el cuadrado unitario rodea el cero en el origen pero no el polo en $s = -2$. El rodeo de los polos y ceros de $F(s)$ puede relacionarse con el rodeo del origen en el plano $F(s)$ mediante un teorema de Cauchy comúnmente conocido como **principio del argumento**, el cual establece [3, 4]:

> Si un contorno Γ_s en el plano s rodea Z ceros y P polos de $F(s)$ y no pasa a través de ningún polo o cero de $F(s)$ cuando el recorrido es en la dirección del movimiento del reloj a lo largo del contorno, el contorno correspondiente Γ_F en el plano $F(s)$ rodea el origen de dicho plano $N = Z - P$ veces en la misma dirección.

Por esto, para los ejemplos mostrados en las Figuras 9.2 y 9.3, el contorno en el plano $F(s)$ rodea el origen una vez, en virtud de que $N = Z - P = 1$, como era de esperar. Como otro ejemplo, se considera la función $F(s) = s/(s + 1/2)$. Para el contorno del cuadrado unitario mostrado en la Figura 9.4(a), el contorno que resulta en el plano $F(s)$ se muestra en la Figura 9.4(b). En este caso, $N = Z - P = 0$, como sucede en la Figura 9.4(b), pues el contorno Γ_F no rodea el origen.

El teorema de Cauchy puede comprenderse mejor considerando $F(s)$ en términos del ángulo debido a cada polo y cero cuando el contorno Γ_s se recorre en la dirección del movimiento del reloj. Por esto, se considera la función

$$F(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)}, \tag{9.10}$$



(a) (b)

FIGURA 9.4
Transformación para $F(s) = s/(s + 1/2)$.

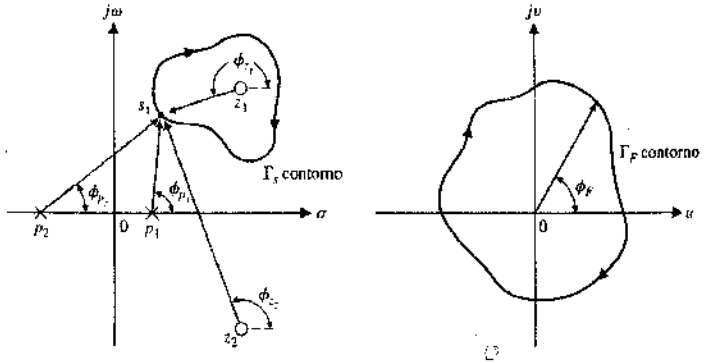
donde z_i es un cero de $F(s)$ y p_k es un polo de $F(s)$. La Ecuación (9.10) puede ahora escribirse como

$$F(s) = |F(s)| \angle F(s)$$

$$= \frac{|s + z_1||s + z_2|}{|s + p_1||s + p_2|} (\angle s + z_1 + \angle s + z_2 - \angle s + p_1 - \angle s + p_2)$$

$$= |F(s)|(\phi_{z_1} + \phi_{z_2} - \phi_{p_1} - \phi_{p_2}). \tag{9.11}$$

Ahora bien, considerando los vectores como se muestran para un contorno específico Γ_s [Figura 9.5a)], se pueden determinar los ángulos cuando s recorre el contorno. Evidentemente, el cambio total del ángulo cuando s realiza en Γ_s una rotación completa de 360° para ϕ_{p_1}, ϕ_{p_2} y ϕ_{z_2} es de cero grados. Sin embargo, cuando s recorre 360° de Γ_s el ángulo ϕ_{z_1} recorre los 360° completos en la dirección del movimiento del reloj. Por esto, cuando se recorre completamente Γ_s el ángulo total de $F(s)$ es igual a 360° pues solamente se



(a) (b)

FIGURA 9.5
Cálculo del ángulo total de Γ_F.

encierra un cero. Si Z ceros estuvieran encerrados dentro de Γ_s entonces el ángulo total sería igual a $\phi_z = 2\pi(Z)$ rad. Siguiendo este razonamiento, si se rodean Z ceros y P polos cuando se recorre Γ_s entonces el ángulo total resultante en $F(s)$ es $2\pi(Z) - 2\pi(P)$. Por esto, el ángulo total de Γ_F del contorno en el plano $F(s)$ es simplemente

$$\phi_F = \phi_Z - \phi_P,$$

o

$$2\pi N = 2\pi Z - 2\pi P. \tag{9.12}$$

y el número total de rodeos del origen del plano $F(s)$ es $N = Z - P$. Por esto, para el contorno mostrado en la Figura 9.5(a), el cual rodea un cero, el contorno Γ_F mostrado en la Figura 9.5(b) rodea el origen una vez en la dirección del movimiento del reloj.

Como ejemplo del uso del teorema de Cauchy, considérese el patrón de polos y ceros mostrado en la Figura 9.6(a) con el contorno Γ_s que se considera. El contorno encierra y rodea tres ceros y un polo. Por tanto, se obtiene

$$N = 3 - 1 = +2,$$

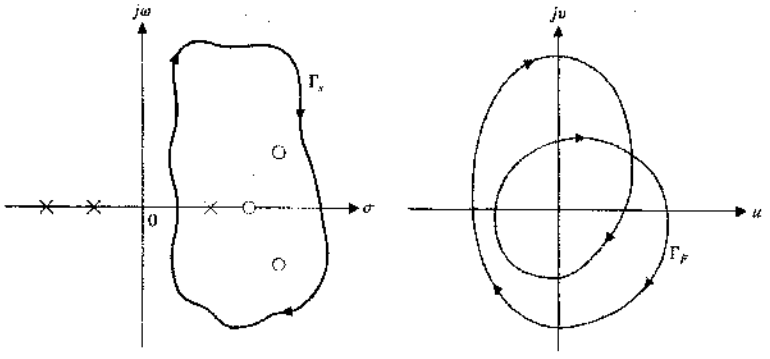
y, como se muestra en la Figura 9.6(b), Γ_F completa dos rodeos del origen en el plano $F(s)$ en el sentido del movimiento del reloj.

Para el patrón de ceros y polos mostrado y el contorno Γ_s como se muestra en la Figura 9.7(a), se rodea un polo y ningún cero. Por tanto, se tiene

$$N = Z - P = -1,$$

y se espera un rodeo completo del origen por el contorno Γ_F en el plano $F(s)$. Sin embargo, como se muestra en la Figura 9.7(b), en virtud de que el signo de N es negativo, se observa que el rodeo se produce en dirección contraria al movimiento del reloj.

Ahora que se ha desarrollado e ilustrado el concepto de transformación de los contornos por medio de una función $F(s)$, se puede considerar el criterio de estabilidad propuesto por Nyquist.



(a) (b)

FIGURA 9.6
Ejemplo del teorema de Cauchy con tres ceros y un polo dentro de Γ_s.

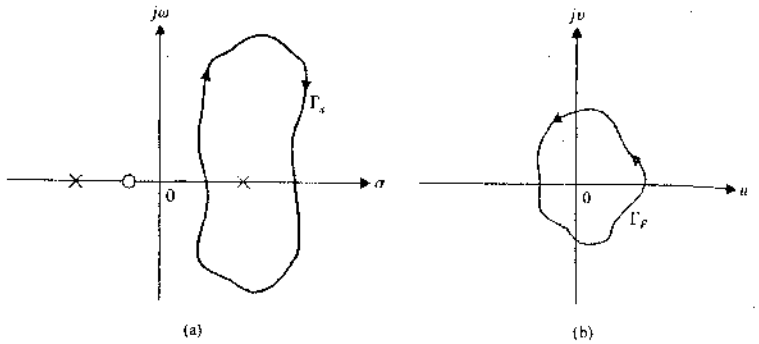


FIGURA 9.7
Ejemplo del teorema de Cauchy con un polo dentro de Γ_s.

9.3. EL CRITERIO DE NYQUIST

Con el objeto de investigar la estabilidad de un sistema de control, se considera la ecuación característica, que es $F(s) = 0$, de forma que

$$F(s) = 1 + L(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{n}(s + s_i)}{\prod_{k=1}^{M}(s + s_k)} = 0. \tag{9.13}$$

Para que un sistema sea estable, todos los ceros de $F(s)$ deben estar en la parte izquierda del plano s. Por esto, las raíces de un sistema estable [los ceros de $F(s)$] deben estar a la izquierda del eje $j\omega$ en el plano s. Por tanto, se escoge un contorno Γ_s en el plano s que encierre toda la parte derecha del plano s y, por medio del teorema de Cauchy, se determina si alguno de los ceros de $F(s)$ cae dentro de Γ_s. Esto es, se dibuja Γ_F en el plano $F(s)$ y se determina el número N de rodeos del origen. Entonces el número de ceros de $F(s)$ dentro del contorno Γ_s [y, por tanto, ceros inestables de $F(s)$] es

$$\boxed{Z = N + P.} \tag{9.14}$$

Por esto, si $P = 0$, como es el caso habitual, se sigue que el número de raíces inestables del sistema es igual a N, el número de rodeos del origen del plano $F(s)$.

En la Figura 9.8 se muestra el contorno de Nyquist, que encierra toda la parte derecha del plano s. El contorno Γ_s pasa a lo largo del eje $j\omega$ desde $-j\infty$ hasta $+j\infty$, y esta parte del contorno proporciona la $F(j\omega)$ familiar. El contorno se completa mediante una trayectoria semicircular de radio r, donde r se aproxima a infinito.

Ahora bien, el criterio de Nyquist está relacionado con la transformación de la ecuación característica

$$F(s) = 1 + L(s) \tag{9.15}$$

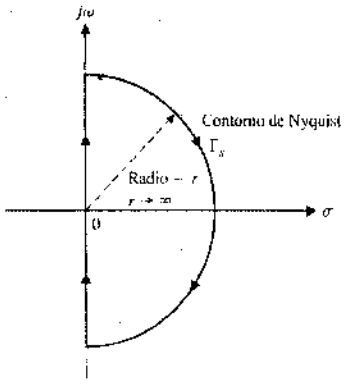


FIGURA 9.8
El contorno de Nyquist se muestra en trazo grueso

y el número de rodeos del origen del plano $F(s)$. De manera alternativa se puede definir la función

$$F'(s) = F(s) - 1 = L(s). \tag{9.16}$$

El cambio de funciones representado por la Ecuación (9.16) es muy conveniente, pues $L(s)$ se obtiene normalmente en forma factorizada, mientras que no ocurre lo mismo para $[1 + L(s)]$. Entonces la transformación de Γ_s en el plano s se hará a través de la función $F'(s) = L(s)$ en el plano $F(s)$. En este caso, el número de rodeos del origen del plano $F(s)$ en el sentido del movimiento del reloj será igual al número de rodeos en el mismo sentido del punto -1 en el plano $F'(s) = L(s)$, pues $F'(s) = F(s) - 1$. Por tanto, se puede establecer el **criterio de estabilidad de Nyquist** como sigue:

Un sistema realimentado es estable si y solamente si el contorno Γ_L en el plano $L(s)$ no rodea al punto $(-1, 0)$ cuando el número de polos de $L(s)$ en la parte derecha del plano s es cero ($P = 0$).

Cuando el número de polos de $L(s)$ en la parte derecha del plano s es diferente de cero, el criterio de Nyquist es:

Un sistema de control realimentado es estable si y solamente si para el contorno Γ_L el número de rodeos del punto $(-1, 0)$ en el sentido contrario al movimiento del reloj es igual al número de polos de $L(s)$ con partes reales positivas.

La base de los dos conceptos anteriores es el hecho de que, para la transformación de $F'(s) = L(s)$, el número de raíces (o ceros) de $1 + L(s)$ en la parte derecha del plano s se representa por la expresión

$$Z = N + P.$$

Evidentemente, si el número de polos de $L(s)$ en la parte derecha del plano s es cero ($P = 0$), para un sistema estable se necesita que $N = 0$, y el contorno Γ_p no debe rodear

el punto -1. Además, si P es diferente de cero, y para un sistema estable se necesita que $Z = 0$, entonces se debe tener $N = -P$, o P rodeos en sentido contrario al movimiento del reloj.

Es mejor ilustrar el uso del criterio de Nyquist planteando varios ejemplos.

EJEMPLO 9.1. Sistema con dos polos reales

En la Figura 9.1 se muestra un sistema de control de lazo simple donde

$$GH(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \tag{9.17}$$

En este caso $L(s) = GH(s)$, y se utiliza el contorno $\Gamma_L = \Gamma_{GH}$ en el plano $GH(s)$. En la Figura 9.9(a) se muestra el contorno Γ_s en el plano s, y en la Figura 9.9(b) el contorno Γ_{GH} para $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1/10$ y $K = 100$. La magnitud y la fase de $GH(j\omega)$ para valores seleccionador de ω se muestran en la Tabla 9.2. Estos valores se utilizan para obtener el diagrama polar de la Figura 9.9(b).

Como se muestra en la Figura 9.9, el eje $+j\omega$ se transforma en la línea continua. El eje $-j\omega$ se transforma en la línea punteada, como se aprecia en la misma figura. El semicírculo con $r \to \infty$ en el plano s se transforma en el origen en el plano $GH(s)$.

Observe que el número de polos de $GH(s)$ en la parte derecha del plano s es cero y que por ello $P = 0$. Por lo tanto, para que este sistema sea estable, se requiere que

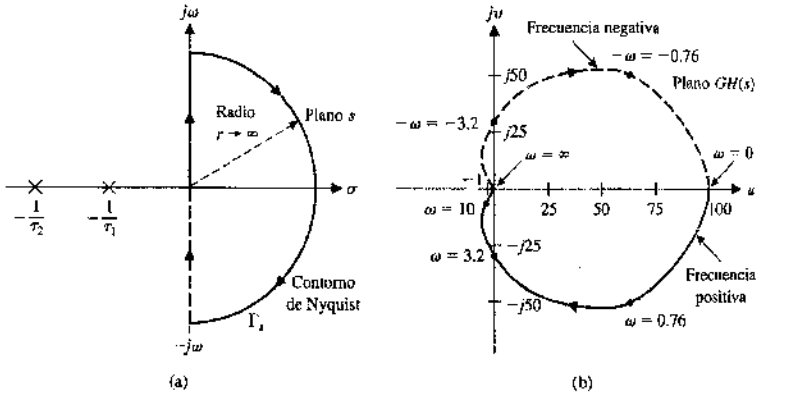


FIGURA 9.9
Contorno de Nyquist y transformación para $GH(s) = \dfrac{100}{(s+1)(s/10+1)}$

Tabla 9.2 Magnitud y fase de $GH(j\omega)$

ω	0	0.1	0.76	1	2	10	20	100	∞
$\lvert GH(j\omega)\rvert$	100	96	79.6	70.7	50.2	6.8	2.24	0.10	0
$\angle GH(j\omega)$ (grados)	0	−5.7	−41.5	−50.7	−74.7	−129.3	−150.5	−173.7	−180

$N = Z = 0$ y el contorno no debe rodear al punto -1 en el plano $GH(s)$. Si se analiza la Figura 9.9(b) y la Ecuación (9.17), se sigue que, independientemente del valor de K, el contorno no rodea al punto -1, y el sistema es siempre estable para todos los valores de K mayores que cero. ■

EJEMPLO 9.2. Sistema con un polo en el origen

En la Figura 9.1 se muestra un sistema de control de lazo simple donde

$$GH(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}.$$

En este caso de lazo simple, $L(s) = GH(s)$ y se determina el contorno $\Gamma_L = \Gamma_{GH}$ en el plano $GH(s)$. En la Figura 9.10(a) se muestra el contorno Γ_s en el plano s; se efectúa una vuelta infinitesimal alrededor del polo en el origen por medio de un pequeño semicírculo de radio ε, donde $\varepsilon \to 0$. Esta vuelta es una consecuencia de la condición del teorema de Cauchy, que exige que el contorno no pase a través del polo en el origen. En la Figura 9-10(b) se muestra un bosquejo del contorno Γ_{GH}. Evidentemente, la parte del contorno Γ_{GH} desde $\omega = 0^-$ hasta $\omega = +\infty$ es simplemente $GH(j\omega)$, que es la gráfica polar de la frecuencia real. Se va a considerar en detalle cada parte del contorno Γ_s de Nyquist y se van a determinar las partes correspondientes del contorno Γ_{GH} del plano $GH(s)$.

(a) El origen del plano s. El pequeño rodeo semicircular alrededor del polo en el origen puede representarse haciendo $s = \varepsilon e^{j\phi}$ y permitiendo que ϕ varíe desde $-90°$ en $\omega = 0^-$ hasta $+90°$ en $\omega = 0^+$. Como ε se aproxima a cero, la transformación $GH(s)$ es

$$\lim_{\varepsilon \to 0} GH(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{K}{\varepsilon e^{j\phi}} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) e^{-j\phi}. \tag{9.18}$$

Por tanto, el ángulo del contorno en el plano $GH(s)$ cambia desde $90°$ en $\omega = 0^-$ hasta $-90°$ en $\omega = 0^+$, pasando a través de $0°$ en $\omega = 0$. El radio del contorno en el plano $GH(s)$ para esta parte del contorno es infinito; esto se muestra en la Figura 9.10(b). Los puntos denotados por A, B y C en la Figura 9.10(a) se transforman, respectivamente, en los puntos A, B y C de la Figura 9.10(b).

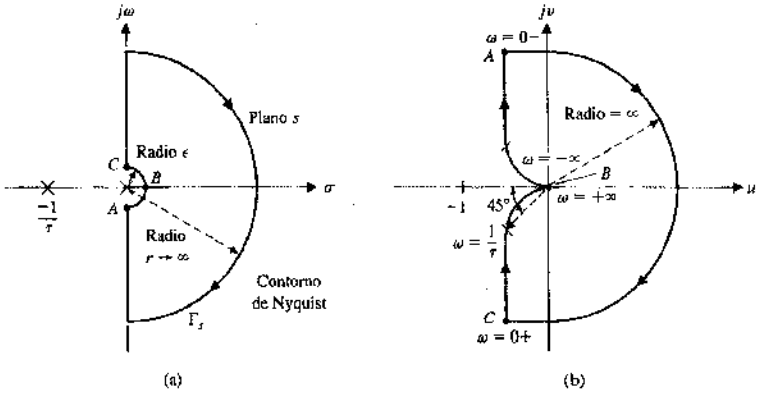


FIGURA 9.10
Contorno de Nyquist y transformación para $GH(s) = K/s(\tau s + 1)$.

(b) La parte desde $\omega = 0^+$ hasta $\omega = +\infty$. La parte del contorno Γ_s desde $\omega = 0^+$ hasta $\omega = +\infty$ se transforma mediante la función $GH(s)$ como la gráfica polar de frecuencia real, ya que $s = j\omega$ y

$$GH(s)|_{s=j\omega} = GH(j\omega) \tag{9.19}$$

para esta parte del contorno. En la Figura 9.10(b) se muestra este resultado en la gráfica polar de frecuencia real. Cuando ω se aproxima a $+\infty$, se tiene

$$\lim_{\omega \to +\infty} GH(j\omega) = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{K}{+j\omega(j\omega\tau + 1)}$$

$$= \lim_{\omega \to \infty} \left| \frac{K}{\tau\omega^2} \right| \underline{/-(\pi/2) - \tan^{-1}\omega\tau.} \tag{9.20}$$

Por tanto, la magnitud se aproxima a cero en un ángulo de $-180°$.

(c) La parte desde $\omega = +\infty$ hasta $\omega = -\infty$. La parte de Γ_s desde $\omega = +\infty$ hasta $\omega = -\infty$ se transforma en el punto cero en el origen del plano $GH(s)$ por la función $GH(s)$. La transformación se representa por

$$\lim_{r \to \infty} GH(s)|_{s=re^{j\phi}} = \lim_{r \to \infty} \left| \frac{K}{(\tau r)^2} \right| e^{-2j\phi} \tag{9.21}$$

cuando ϕ cambia desde $\phi = +90°$ en $\omega = +\infty$ hasta $\phi = -90°$ en $\omega = -\infty$. Por esto, el contorno se mueve desde un ángulo de $-180°$ en $\omega = +\infty$ hasta un ángulo de $+180°$ en $\omega = -\infty$. La magnitud del contorno $GH(s)$ cuando r es infinito siempre es cero o una constante.

(d) La parte desde $\omega = -\infty$ hasta $\omega = 0^-$. La parte del contorno Γ_s desde $\omega = -\infty$ hasta $\omega = 0^-$ se transforma mediante la función $GH(s)$ como

$$GH(s)|_{s=-j\omega} = GH(-j\omega). \tag{9.22}$$

Por esto, se obtiene el complejo conjugado de $GH(j\omega)$, y la gráfica para la parte de la gráfica polar desde $\omega = -\infty$ hasta $\omega = 0^-$ es simétrica a la gráfica polar desde $\omega = +\infty$ hasta $\omega = 0^+$. En la Figura 9.10(b) se muestra esta gráfica polar en el plano $GH(s)$.

Ahora bien, para investigar la estabilidad de este sistema de segundo orden, nótese primero que el número de polos, P, es cero dentro de la parte derecha del plano s. Por tanto, para que este sistema sea estable, se necesita que $N = Z = 0$, y el contorno Γ_{GH} no debe rodear el punto -1 en el plano GH. Examinando la Figura 9.10(b), se sigue que, independientemente del valor de la ganancia K y la constante de tiempo τ, el contorno no rodea el punto -1 y el sistema es siempre estable. Como en el Capítulo 7, se están considerando valores positivos de la ganancia K. Si se consideran valores negativos de ganancia, se podrá usar $-K$, donde $K \geq 0$.

A partir de este ejemplo se pueden plantear dos conclusiones generales:

1. La gráfica del contorno Γ_{GH} para el intervalo $-\infty < \omega < 0^-$ será el conjugado complejo de la gráfica para el intervalo $0^+ < \omega < +\infty$, y la gráfica polar de $GH(s)$ será simétrica respecto al eje u en el plano $GH(s)$. Por tanto, **con el objeto de investigar la estabilidad es suficiente construir el contorno Γ_{GH} para el intervalo de frecuencias $0^+ < \omega < +\infty$** (teniendo en cuenta el rodeo alrededor del origen).
2. La magnitud de $GH(s)$ cuando $s = re^{j\phi}$ y $r \to \infty$ normalmente se aproxima a cero o a una constante. ■

EJEMPLO 9.3. Sistema con tres polos

Se considera nuevamente el sistema de lazo simple que aparece en la Figura 9.1 cuando

$$GH(s) = \frac{K}{(s\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}. \tag{9.23}$$

En la Figura 9.10(a) se muestra el contorno Γ_s de Nyquist. Nuevamente, su transformación es simétrica para $GH(j\omega)$ y $GH(-j\omega)$, de forma que es suficiente investigar el lugar geométrico $GH(j\omega)$. El origen del plano s se transforma en un semicírculo de radio infinito como en el Ejemplo 9.2. También, como era de esperar, el semicírculo $re^{j\varphi}$ en el plano s se transforma en el punto $GH(s) = 0$. Por tanto, para investigar la estabilidad del sistema, es suficiente con dibujar la parte del contorno Γ_{GH} que es la gráfica polar de la frecuencia real $GH(j\omega)$ para $0^+ < \omega < +\infty$. Así, cuando $s = +j\omega$, se tiene

$$GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1)}$$

$$= \frac{-K(\tau_1 + \tau_2) - jK(1/\omega)(1 - \omega^2\tau_1\tau_2)}{1 + \omega^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \omega^4\tau_1^2\tau_2^2}$$

$$= \frac{K}{[\omega^4(\tau_1 + \tau_2)^2 + \omega^3(1 - \omega^2\tau_1\tau_2)^2]^{1/2}}$$

$$\times \underline{/-\tan^{-1}\omega\tau_1 - \tan^{-1}\omega\tau_2 - (\pi/2).} \tag{9.24}$$

Cuando $\omega = 0^+$, la magnitud del lugar geométrico es infinita en un ángulo de $-90°$ en el plano $GH(s)$. Cuando ω se aproxima a $+\infty$, se tiene

$$\lim_{\omega \to \infty} GH(j\omega) = \lim_{\omega \to \infty} \left| \frac{1}{\omega^3\tau_1\tau_2} \right| \underline{/-(\pi/2) - \tan^{-1}\omega\tau_1 - \tan^{-1}\omega\tau_2}$$

$$= \left(\lim_{\omega \to \infty} \left| \frac{1}{\omega^3\tau_1\tau_2} \right| \right) \underline{/-(3\pi/2).} \tag{9.25}$$

Por tanto, $GH(j\omega)$ tiende a una magnitud de cero en un ángulo de $-270°$ [30], Para que el lugar geométrico tienda a un ángulo de $-270°$, debe cruzar el eje u en el plano $GH(s)$ como se muestra en la Figura 9.11. Así, es posible rodear el punto -1 como se muestra

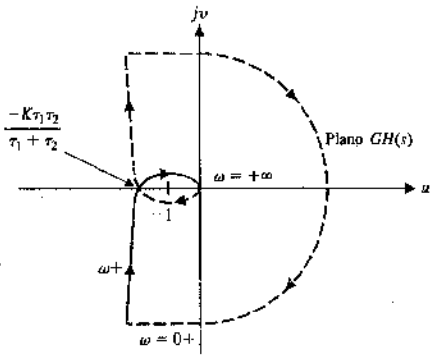


FIGURA 9.11
Diagrama de Nyquist para $GH(s) = K/s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)$. La línea vertical que se muestra a la izquierda del origen es el punto -1.

en la misma figura. Como se muestra en la Figura 9.11, el número de rodeos, cuando el punto -1 cae dentro del lugar geométrico, es igual a dos y el sistema es inestable con dos raíces en la parte derecha del plano s. El punto donde el lugar geométrico $GH(s)$ interseca el eje real se puede determinar igualando a cero la parte imaginaria de $GH(j\omega) = u + jv$, entonces, por la Ecuación (9.24) se tiene

$$v = \frac{K(1/\omega)(1 - \omega^2\tau_1\tau_2)}{1 + \omega^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \omega^4\tau_1^2\tau_2^2} = 0, \tag{9.26}$$

Entonces, $v = 0$ cuando $1 - \omega^2\tau_1\tau_2 = 0$ o $\omega = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$. La magnitud de la parte real de $GH(j\omega)$ en esta frecuencia es

$$u = \left.\frac{-K(\tau_1 + \tau_2)}{1 + \omega^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \omega^4\tau_1^2\tau_2^2}\right|_{\omega^2 = 1/\tau_1\tau_2}$$

$$= \frac{-K(\tau_1 + \tau_2)\tau_1\tau_2}{\tau_1\tau_2 + (\tau_1^2 + \tau_2^2) + \tau_1\tau_2} = \frac{-K\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}. \tag{9.27}$$

Por tanto, el sistema es estable cuando

$$\frac{-K\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \geqslant -1$$

o

$$K \leqslant \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}. \tag{9.28}$$

Considere el caso en el que $\tau_1 = \tau_2 = 1$, de forma que

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)^2}.$$

Utilizando la Ecuación (9.28), se espera estabilidad cuando

$$K \leqslant 2.$$

En la Figura 9.12 se muestra el diagrama de Nyquist para tres valores de K. ■

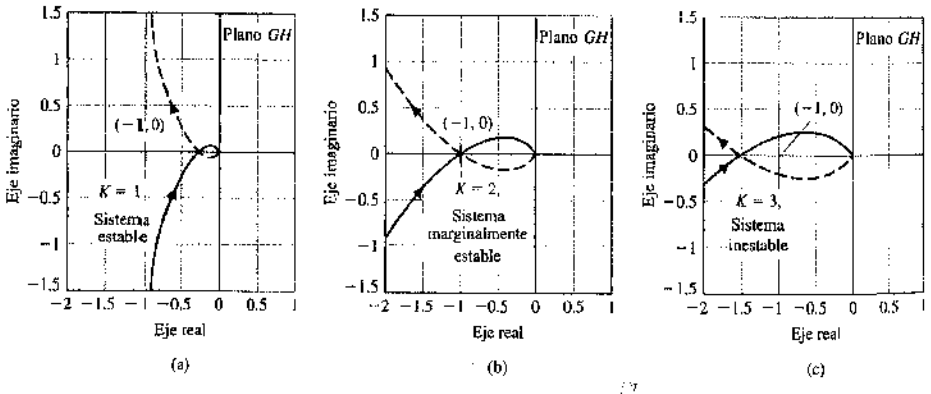


FIGURA 9.12. Diagrama de Nyquist para $GH(s) = \dfrac{K}{s(s+1)^2}$ cuando (a) $K = 1$, (b) $K = 2$ y (c) $K = 3$.

EJEMPLO 9.4. Sistema con dos polos en el origen

Nuevamente, se va a determinar la estabilidad del sistema de lazo simple que aparece en la Figura 9.1 cuando

$$GH(s) = \frac{K}{s^2(\tau s + 1)}. \tag{9.29}$$

El diagrama polar de la frecuencia real se obtiene cuando $s = j\omega$, y se tiene

$$GH(j\omega) = \frac{K}{-\omega^2(j\omega\tau + 1)} = \frac{K}{[\omega^4 + \tau^2\omega^6]^{1/2}} \underline{/-\pi - \tan^{-1}\omega\tau}. \tag{9.30}$$

Observe que el ángulo de $GH(j\omega)$ es siempre de $-180°$ o mayor, y que el lugar geométrico de $GH(j\omega)$ está sobre el eje u para todos los valores de ω. Cuando ω se aproxima a 0^+, se tiene

$$\lim_{\omega\to 0^+} GH(j\omega) = \left(\lim_{\omega\to 0}\left|\frac{K}{\omega^2}\right|\right)\underline{/-\pi}. \tag{9.31}$$

Cuando ω se aproxima a $+\infty$, se tiene

$$\lim_{\omega\to+\infty} GH(j\omega) = \left(\lim_{\omega\to+\infty}\frac{K}{\omega^3}\right)\underline{/-3\pi/2}. \tag{9.32}$$

En el pequeño rodeo semicircular en el origen del plano s donde $s = \varepsilon e^{j\phi}$, se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0} GH(s) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{K}{\varepsilon^2}e^{-2j\phi}, \tag{9.33}$$

donde $-\pi/2 \leqslant \phi \leqslant \pi/2$. Por esto, el contorno Γ_{GH} va desde un ángulo de $+\pi$ en $\omega = 0^+$ hasta $-\pi$ en $\omega = 0^+$ y pasa a través de un círculo completo de 2π rad cuando ω cambia desde $\omega = 0^-$ hasta $\omega = 0^+$. La gráfica completa del contorno Γ_{GH} se muestra en la Figura 9.13. Como el contorno rodea dos veces el punto -1, hay dos raíces del sistema de lazo cerrado en la parte derecha del plano y el sistema es inestable, independientemente de la ganancia K. ■

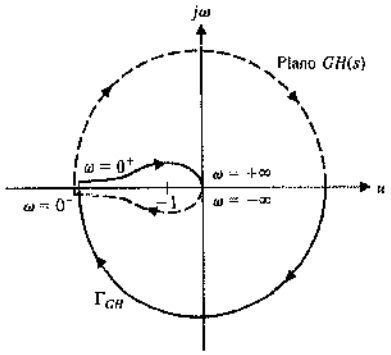


FIGURA 9.13 Gráfica del contorno de Nyquist para $GH(s) = K/s^2(\tau s + 1)$.

EJEMPLO 9.5. **Sistema con un polo en la parte derecha del plano s**

Se considera el sistema de control de la Figura 9.14 y se pretende determinar su estabilidad. Primero se considera el sistema sin realimentación derivada, de tal forma que $K_2 = 0$. Entonces se tiene la función de transferencia de lazo abierto (sin realimentación)

$$GH(s) = \frac{K_1}{s(s-1)}. \tag{9.34}$$

Así, dicha función tiene un polo en la parte derecha del plano y, por tanto, $P = 1$. Para que este sistema sea estable, se necesita que $N = -P = -1$, lo cual constituye un rodeo del punto -1 en sentido opuesto al movimiento del reloj. En el rodeo semicircular en el origen del plano s, se hace $s = \varepsilon e^{j\phi}$ cuando $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$. Entonces, cuando $s = \varepsilon e^{j\phi}$, se tiene

$$\lim_{s\to 0} GH(s) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K_1}{-\varepsilon e^{j\phi}} = \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{K_1}{\varepsilon}\right|\right) \underline{/-180^\circ - \phi}. \tag{9.35}$$

Por tanto, esta parte del contorno Γ_{GH} es un semicírculo de magnitud infinita en la parte izquierda del plano GH, como se muestra en la Figura 9.15. Cuando $s = j\omega$, se tiene

$$GH(j\omega) = \frac{K_1}{j\omega(j\omega - 1)} = \frac{K_1}{(\omega^2 + \omega^4)^{1/2}} \underline{/(-\pi/2) - \tan^{-1}(-\omega)}$$

$$= \frac{K_1}{(\omega^2 + \omega^4)^{1/2}} \underline{/(+\pi/2) + \tan^{-1}\omega}. \tag{9.36}$$

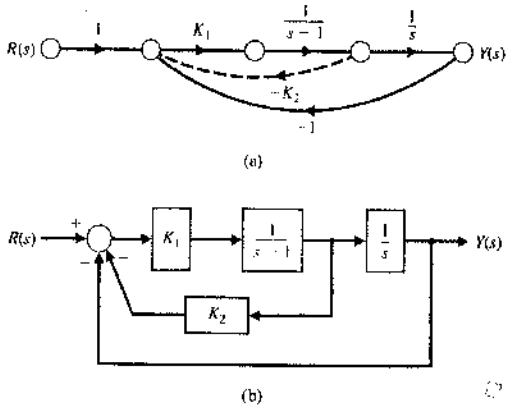


FIGURA 9.14
Sistema de control de segundo orden con realimentación.
(a) Grafo de flujo de señales.
(b) Diagrama de bloques.

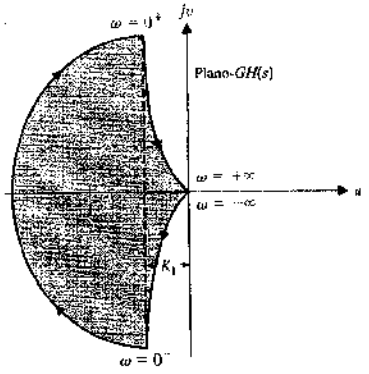


FIGURA 9.15
Diagrama de Nyquist para $GH(s) = K_1/s(s-1)$.

Finalmente, para el semicírculo de radio r cuando r tiende a infinito, se tiene

$$\lim_{s\to\infty} GH(s)\big|_{s=re^{j\phi}} = \left(\lim_{r\to\infty}\left|\frac{K_1}{r^2}\right|\right) e^{2j\phi}, \tag{9.37}$$

donde ϕ varía desde $\pi/2$ hasta $-\pi/2$ en la dirección del movimiento del reloj. Por tanto, el contorno Γ_{GH}, en el origen del plano GH, varía 2π rad en la dirección opuesta al movimiento del reloj, como se muestra en la Figura 9.15. En la Tabla 9.3 se proporcionan varios valores importantes del lugar geométrico $GH(s)$. El contorno Γ_{GH} en el plano $GH(s)$ rodea una vez el punto -1 en la dirección del movimiento del reloj y $N = +1$. Por tanto,

$$Z = N + P = 2, \tag{9.38}$$

y el sistema es inestable, pues dos ceros de la ecuación característica, independientemente del valor de la ganancia K, yacen en la parte derecha del plano s.

Se considera ahora el sistema cuando se incluye la realimentación derivada que se muestra en la Figura 9.14 ($K_2 > 0$). Entonces la función de transferencia de lazo abierto es

$$GH(s) = \frac{K_1(1 + K_2 s)}{s(s-1)}. \tag{9.39}$$

Tabla 9.3 Valores de $GH(s)$

s	$j0^-$	$j0^+$	$j1$	$+j\infty$	$-j\infty$
$\lvert GH\rvert/K_1$	∞	∞	$1/\sqrt{2}$	0	0
$\underline{/GH}$	-90°	$+90^\circ$	$+135^\circ$	$+180^\circ$	-180°

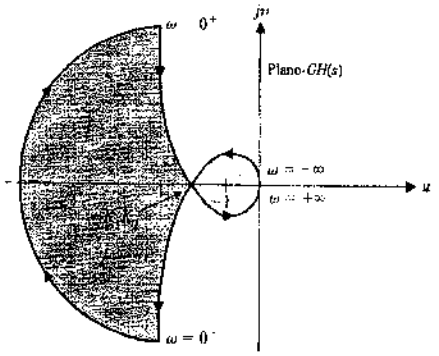


FIGURA 9.16
Diagrama de Nyquist para $GH(s) = K_1(1 + K_2 s)/s(s - 1)$

La parte del contorno Γ_{GH}, cuando $s = \varepsilon e^{j\phi}$, es igual a la del sistema sin realimentación derivada, como se muestra en la Figura 9.16. Sin embargo, cuando $s = re^{j\phi}$, a medida que r tiende a infinito, se tiene

$$\lim_{r\to\infty} GH(s)|_{s=re^{j\phi}} = \lim_{r\to\infty} \left|\frac{K_1K_2}{r}\right| e^{-j\phi}, \tag{9.40}$$

y el contorno Γ_{GH} en el origen del plano GH varía π rad en la dirección opuesta al movimiento del reloj, como se muestra en la Figura 9.16. El lugar geométrico $GH(j\omega)$ de la frecuencia cruza el eje u y se determina considerando la función de transferencia de la frecuencia real

$$GH(j\omega) = \frac{K_1(1 + K_2 j\omega)}{-\omega^2 \quad j\omega}$$

$$= \frac{-K_1(\omega^2 + \omega^2 K_2) + j(\omega - K_2\omega^3)K_1}{\omega^2 + \omega^4}. \tag{9.41}$$

El lugar geométrico $GH(j\omega)$ interseca el eje u en un punto donde la parte imaginaria de $GH(j\omega)$ es cero. Por tanto,

$$\omega - K_2\omega^3 = 0$$

en este punto, o $\omega^2 = 1/K_2$. El valor de la parte real de $GH(j\omega)$ en la intersección es entonces

$$u|_{\omega^2=1/K_2} = \left.\frac{-\omega^2 K_1(1 + K_2)}{\omega^2 + \omega^4}\right|_{\omega^2=1/K_2} = -K_1K_2. \tag{9.42}$$

Por tanto, cuando $-K_1K_2 < -1$ o $K_1K_2 > 1$, el contorno Γ_{GH} rodea una vez el punto -1 en la dirección opuesta al movimiento del reloj y, por tanto, $N = -1$. Entonces Z, el número de ceros del sistema en la parte derecha del plano, es

$$Z = N + P = -1 + 1 = 0.$$

Por esto, el sistema es estable cuando $K_1K_2 > 1$. Con frecuencia es útil emplear un programa de computación para calcular el diagrama de Nyquist [5]. ■

EJEMPLO 9.6. Sistema con un cero en la parte derecha del plano *s*

Se considera el sistema de control realimentado que se muestra en la Figura 9.1 cuando

$$GH(s) = \frac{K(s - 2)}{(s + 1)^2}.$$

Observe que este sistema es estable en la configuración en lazo abierto (sin realimentación). Se tiene

$$GH(j\omega) = \frac{K(j\omega - 2)}{(j\omega + 1)^2} = \frac{K(j\omega - 2)}{(1 - \omega^2) + j2\omega}. \tag{9.43}$$

Como ω se aproxima a $+\infty$ en el eje $+j\omega$, se tiene

$$\lim_{\omega\to+\infty} GH(j\omega) = \left(\lim_{\omega\to+\infty} \frac{K}{\omega}\right) \underline{/-\pi/2}.$$

Cuando $\omega = \sqrt{5}$, se tiene $GH(j\omega) = K/2$. En $\omega = 0^-$, se tiene $GH(j\omega) = -2K$. En la Figura 9.17 se muestra el diagrama de Nyquist para $G(j\omega)/K$. $GH(j\omega)$ corta el punto $(-1 + j0)$ cuando $K = 1/2$. Por tanto, el sistema es estable para el rango de ganancias limitado $0 < K \leq 1/2$. Cuando $K > 1/2$, el número de rodeos al punto -1 es $N = 1$. El número de polos de $GH(s)$ en el lado derecho del plano s es $P = 0$. Por tanto, se tiene

$$Z = N + P = 1,$$

y el sistema es inestable. Si se examina el diagrama de Nyquist de la Figura 9.17, que se ha dibujado para $GH(j\omega)/K$, se puede concluir que el sistema es inestable para todo $K > 1/2$. ■

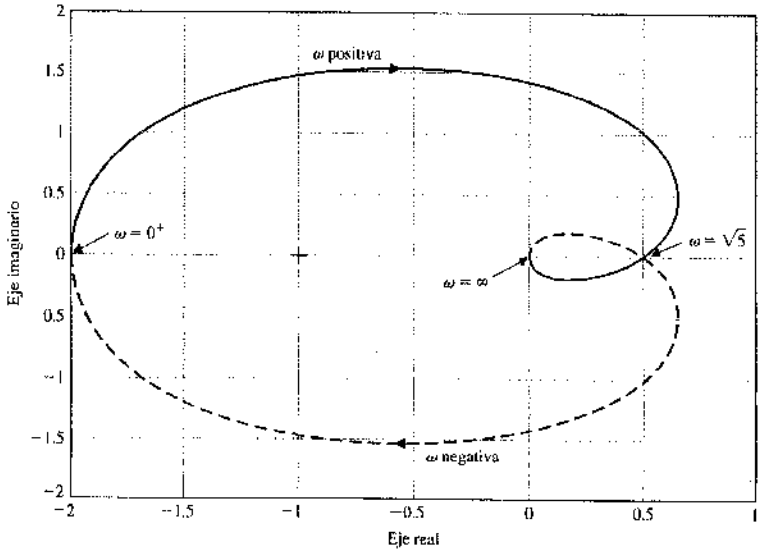


FIGURA 9.17
Diagrama de Nyquist para el ejemplo 9.6 para $GH(j\omega)/K$.

9.4. ESTABILIDAD RELATIVA Y EL CRITERIO DE NYQUIST

En la Sección 6.3 se analizó la estabilidad relativa de un sistema en términos del plano s. Para este plano, se definió la estabilidad relativa de un sistema como la propiedad medida por el tiempo de estabilización relativo de cada raíz o par de raíces. Se podría determinar una medida semejante de la estabilidad relativa útil para el método de la respuesta de frecuencia. El criterio de Nyquist proporciona una información adecuada relacionada con la estabilidad absoluta y, además, puede utilizarse para definir y determinar la estabilidad relativa de un sistema.

El criterio de la estabilidad de Nyquist se define en términos del punto $(-1, 0)$ en la gráfica polar, o sea, el punto de 0 dB a $-180°$ en el diagrama de Bode o diagrama de fase-magnitud logarítmica. Evidentemente, la proximidad del lugar geométrico de $GH(j\omega)$ a este punto de estabilidad es una medida de la estabilidad relativa de un sistema. La gráfica polar de $GH(j\omega)$ para varios valores de K y

$$GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1)} \tag{9.44}$$

se muestra en la Figura 9.18. Cuando aumenta K, la gráfica polar se aproxima al punto -1 y eventualmente lo rodea para una ganancia $K = K_3$. Se determinó en la Sección 9.3 que el lugar geométrico corta el eje u en un punto

$$u = \frac{-K\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}. \tag{9.45}$$

Por tanto, el sistema tiene raíces en el eje $j\omega$ cuando

$$u = -1 \quad \text{o} \quad K = \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}\right).$$

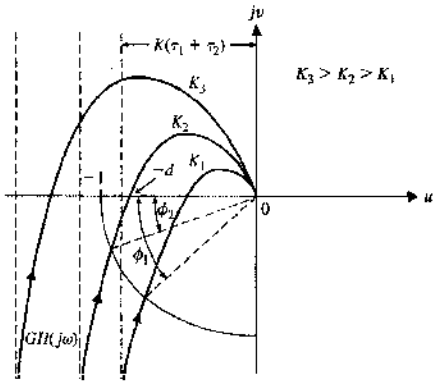


FIGURA 9.18
Diagrama polar de $GH(j\omega)$ para tres valores de ganancia.

Cuando K disminuye por debajo de su valor marginal, la estabilidad se aumenta y el margen entre la ganancia $K = (\tau_1 + \tau_2)/\tau_1\tau_2$ y una ganancia $K = K_2$ es una medida de la estabilidad relativa. Esta medida se conoce como **margen de ganancia** y se define como **el recíproco de la ganancia $|GH(j\omega)|$ para la frecuencia en que el ángulo de fase alcanza $-180°$** (esto es, $v = 0$). El margen de ganancia es una medida del factor por el cual tendrá que aumentarse la ganancia del sistema para que el lugar geométrico $GH(j\omega)$ pase a través del punto $u = -1$. Por esto, para una ganancia $K = K_2$ en la Figura 9.18, el margen de ganancia es igual al recíproco de $GH(j\omega)$ cuando $v = 0$. Como $\omega = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$ cuando el cambio de fase es de $-180°$, tenemos un margen de ganancia igual a

$$\frac{1}{|GH(j\omega)|} = \left[\frac{K_2\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}\right]^{-1} = \frac{1}{d}. \tag{9.46}$$

El margen de ganancia puede definirse en términos de una **medida logarítmica (decibelios)** como

$$\boxed{20\log\left(\frac{1}{d}\right) = -20\log d \text{ dB}} \tag{9.47}$$

Así, por ejemplo, cuando $\tau_1 = \tau_2 = 1$, el sistema es estable para $K \leq 2$. Por esto, cuando $K = K_2 = 0.5$, el margen de ganancia es igual a

$$\frac{1}{d} = \left[\frac{K_2\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}\right]^{-1} = 4 \tag{9.48}$$

o, en medida logarítmica,

$$20\log 4 = 12 \text{ dB}. \tag{9.49}$$

Por tanto, el margen de ganancia indica que la ganancia del sistema puede aumentar en un factor de cuatro (12 dB) antes de que se alcance el límite de la estabilidad.

El margen de ganancia es el aumento en la ganancia del sistema cuando la fase es de $-180°$ que resultará en un sistema marginalmente estable. También se define como el recíproco de la ganancia del punto $-1 + j0$ en el diagrama de Nyquist.

Una medida alternativa de la estabilidad relativa puede definirse en términos del margen del ángulo de fase entre un sistema específico y un sistema marginalmente estable. Cuando el lugar geométrico $GH(j\omega)$ corta el punto $u = -1$, $v = 0$ en el plano GH, varias raíces de la ecuación característica caen en el eje $j\omega$. Por tanto, una medida de la estabilidad relativa, el **margen de fase**, se define como **el ángulo de fase a través del cual debe girar el lugar geométrico $GH(j\omega)$ para que el punto de magnitud unitaria $|GH(j\omega)| = 1$ pase a través del punto $(-1, 0)$ en el plano $GH(j\omega)$.** Esta medida de la estabilidad relativa se conoce como margen de fase y es igual a la fase adicional que se necesita antes de que el sistema se vuelva inestable. Esta información puede determinarse a partir del diagrama de Nyquist como se muestra en la Figura 9.18. Para una ganancia $K = K_2$, puede sumarse al sistema un ángulo de fase adicional, ϕ_2, antes de que el sistema se vuelva inestable. Además, el margen de fase para la ganancia K_1 es igual ϕ_1, como se muestra en la Figura 9.18.

El margen de fase es la cantidad de desplazamiento de fase de $GH(j\omega)$ a la magnitud unidad que resultará en un sistema marginalmente estable con intersección del punto $-1 + j0$ en el diagrama de Nyquist.

El margen de ganancia y el de fase se calculan fácilmente por el diagrama de Bode, y como es preferible dibujar dicho diagrama en lugar del diagrama polar, vale la pena ilustrar las medidas de la estabilidad relativa para el diagrama de Bode. El punto crítico para la estabilidad es $u = -1$, $v = 0$ en el plano $GH(j\omega)$, lo cual es equivalente a una magnitud logarítmica de 0 dB y a un ángulo de fase de 180° (o −180°) en el diagrama de Bode.

Es relativamente directo examinar el diagrama de Nyquist de un sistema de fase mínima. Sin embargo, para los sistemas de fase no mínima se requiere especial cuidado y se debería estudiar el diagrama de Nyquist completo para determinar su estabilidad.

Los márgenes de ganancia y fase pueden calcularse fácilmente utilizando un programa de computador, suponiendo el sistema de fase mínima. Como contraste, para los sistemas de fase no mínima se debe construir el diagrama de Nyquist completo.

El diagrama de Bode de

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0.2j\omega + 1)} \tag{9.50}$$

se muestra en la Figura 9.19. El ángulo de fase, cuando la magnitud logarítmica es de 0 dB, es igual a 137°. Por esto, como se muestra en la Figura 9.19, el margen de fase es de 180° − 137° = 43°. La magnitud logarítmica, cuando el ángulo de fase es de −180°, es de −15 dB y, por tanto, el margen de ganancia es igual a 15 dB, como se muestra en la Figura 9.19.

La respuesta de frecuencia de un sistema puede representarse gráficamente en el diagrama de magnitud logarítmica-ángulo de fase. Para este diagrama, el punto de

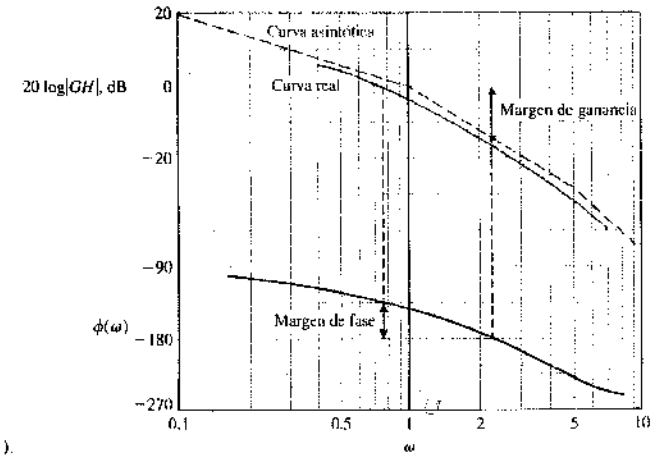


FIGURA 9.19
Diagrama de Bode para $GH_1(j\omega) = 1/j\omega(j\omega + 1)(0.2j\omega + 1)$.

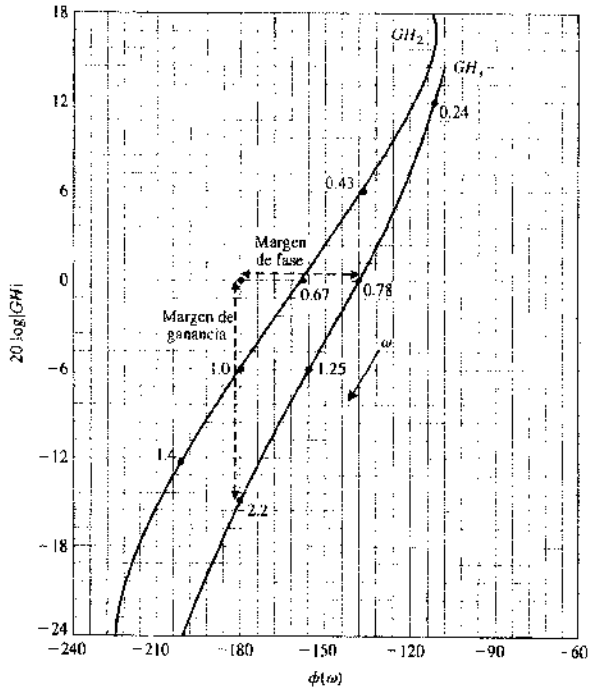


FIGURA 9.20
Curvas de fase-magnitud logarítmica para GH_1 y GH_2.

estabilidad crítica es el punto de 0 dB, −180°, y los márgenes de ganancia y fase se pueden determinar e indicar fácilmente en el diagrama. El lugar geométrico de la fase-magnitud logarítmica de

$$GH_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0.2j\omega + 1)} \tag{9.51}$$

se muestra en la Figura 9.20. El margen de fase indicado es de 43° y el de ganancia es de 15 dB. Por comparación, el lugar geométrico para

$$GH_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)^2} \tag{9.52}$$

también se muestra en la Figura 9.20. El margen de ganancia para GH_2 es igual a 5.7 dB y el de fase es de 20°. Evidentemente, el sistema de realimentación $GH_2(j\omega)$ es relativamente menos estable que $GH_1(j\omega)$. Sin embargo, aún queda la pregunta: ¿en qué medida es menos estable el sistema $GH_2(j\omega)$ en comparación con el sistema $GH_1(j\omega)$? En el siguiente párrafo se contesta a esta pregunta para un sistema de segundo orden; la utilidad de la relación que se desarrolle dependerá de la presencia de las raíces dominantes.

Se va a determinar ahora el margen de fase de un sistema de segundo orden y se va a relacionar este margen con la razón de amortiguamiento ζ de un sistema subamortiguado. Se considerará la función de transferencia del lazo que se muestra en la Figura 9.1, donde

$$GH(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}. \tag{9.53}$$

La ecuación característica para este sistema de segundo orden es

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0.$$

Por tanto, las raíces del lazo cerrado son

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

En el dominio de la frecuencia la forma de la Ecuación (9.53) es

$$GH(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)}. \tag{9.54}$$

La magnitud de la respuesta de frecuencia es igual a 1 en una frecuencia ω_c, y por esto

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_c(\omega_c^2 + 4\zeta^2\omega_n^2)} = 1. \tag{9.55}$$

Reordenando la Ecuación (9.55), se obtiene

$$(\omega_c^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2(\omega_c^2) - \omega_n^4 = 0. \tag{9.56}$$

Resolviendo para ω_c, resulta

$$\frac{\omega_c^2}{\omega_n^2} = (4\zeta^4 + 1)^{1/2} - 2\zeta^2.$$

El margen de fase para este sistema es

$$\begin{aligned}\phi_{mf} &= 180° - 90° - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n}\right)\\ &= 90° - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\zeta}\left[(4\zeta^4 + 1)^{1/2} - 2\zeta^2\right]^{1/2}\right)\\ &= \tan^{-1}\left(2\zeta\left[\frac{1}{(4\zeta^4 + 1)^{1/2} - 2\zeta^2}\right]^{1/2}\right).\end{aligned} \tag{9.57}$$

La Ecuación (9.57) es el vínculo entre la relación de amortiguamiento ζ y el margen de fase ϕ_{mf} que proporciona una correlación entre las respuestas en frecuencia y en tiempo. En la Figura 9.21 se muestra una gráfica de ζ frente a ϕ_{mf}. La curva real de ζ frente a ϕ_{mf} puede aproximarse por la línea punteada que se muestra en la Figura 9.21. La pendiente de la aproximación lineal es igual a 0.01 y, por tanto, una relación lineal aproximada entre la relación de amortiguamiento y el margen de fase es

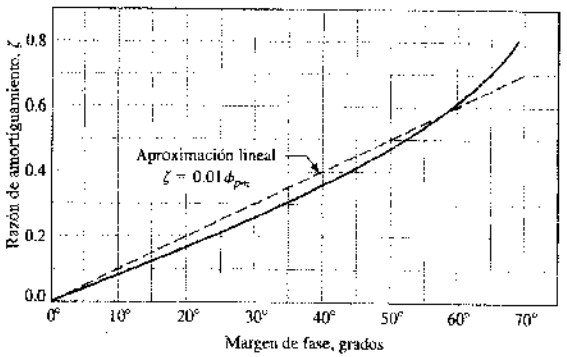


FIGURA 9.21
Razón de amortiguamiento frente a margen de fase para un sistema de segundo orden.

$$\boxed{\zeta = 0.01\phi_{mf},} \tag{9.58}$$

donde el margen de fase se mide en grados. Esta aproximación es razonablemente exacta para $\zeta \leq 0.7$ y es un índice útil para correlacionar la respuesta de frecuencia con el comportamiento transitorio de un sistema. La Ecuación (9.58) es una aproximación adecuada para un sistema de segundo orden y puede usarse para sistemas de orden mayor si podemos suponer que la respuesta transitoria del sistema se debe primordialmente a un par de raíces dominantes amortiguadas periódicas. La aproximación de un sistema de orden mayor mediante un sistema dominante de segundo orden es una aproximación verdaderamente útil. Si bien este método debe usarse con cuidado, los ingenieros de control consideran que es una técnica sencilla, pero lo suficientemente precisa, para establecer las especificaciones de un sistema de control.

Por tanto, para el sistema con una función de transferencia de lazo

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0.2j\omega + 1)}, \tag{9.59}$$

resulta que el margen de fase fue de 43°, como se mostró en la Figura 9.19. Por esto, la razón de amortiguamiento es aproximadamente

$$\zeta \simeq 0.01\phi_{mf} = 0.43. \tag{9.60}$$

Entonces, para este sistema la sobreelongación en tanto por ciento para una entrada de escalón es aproximadamente

$$\text{P.O.} = 22\%, \tag{9.61}$$

como se obtuvo de la Figura 5.8 para $\zeta = 0.43$.

Es posible desarrollar programas de computador que calculan y dibujan el margen de ganancia y de fase frente a la ganancia K para una $GH(j\omega)$ especificada. Considérese el sistema de la Figura 9.1 con

$$GH(s) = \frac{K}{s(s + 4)^2}.$$

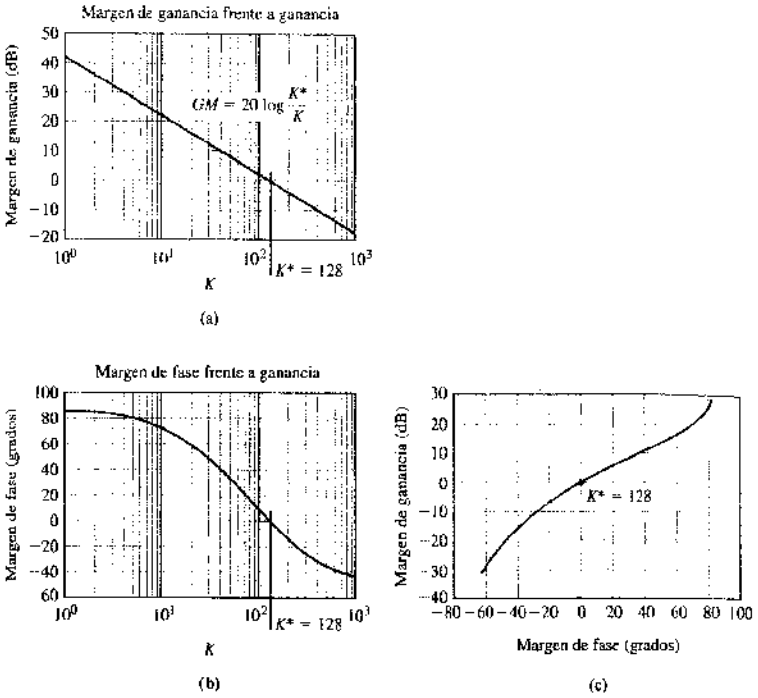


FIGURA 9.22
(a) Margen de ganancia frente a ganancia K.
(b) Margen de fase frente a ganancia K.
(c) Margen de ganancia frente a margen de fase.

La ganancia para la que el sistema es marginalmente estable es $K = K^* = 128$. En las Figuras 9.22(a) y (b) se muestran, respectivamente, el margen de ganancia y de fase frente a K. En la Figura 9.22(c) se muestra el margen de ganancia dibujado frente al margen de fase. Obsérvese que o bien el margen de ganancia o el de fase es una medida adecuada para determinar el comportamiento de un sistema. Normalmente se insistirá más en el margen de fase como especificación en el dominio de la frecuencia.

El margen de fase de un sistema es una medida de la respuesta de frecuencia muy adecuada para indicar el comportamiento transitorio esperado. Otro índice útil de comportamiento en el dominio de la frecuencia es M_{p_ω}, la magnitud máxima de la respuesta de frecuencia de lazo cerrado; se considerará ahora este índice práctico.

9.5. CRITERIOS DE COMPORTAMIENTO EN EL DOMINIO TEMPORAL ESPECIFICADOS EN EL DOMINIO FRECUENCIAL

El comportamiento transitorio de un sistema de realimentación se puede calcular a partir de la respuesta de frecuencia en lazo cerrado. La **respuesta en frecuencia en lazo cerrado** es la respuesta en frecuencia de la función de transferencia en lazo cerrado $T(j\omega)$. Para un sistema de un lazo sus respuestas de frecuencia de lazos abierto y cerrado se relacionan como sigue:

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + GH(j\omega)}. \tag{9.62}$$

El criterio de Nyquist y el índice de margen de fase se definieron para la función de transferencia de lazo abierto $GH(j\omega)$. Sin embargo, como se vio en la Sección 8.2, la magnitud máxima de la respuesta de frecuencia de lazo cerrado se puede relacionar con la relación de amortiguamiento de un sistema de segundo orden mediante

$$M_{p_\omega} = |T(\omega_r)| = (2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2})^{-1}, \quad \zeta < 0.707. \tag{9.63}$$

Esta relación se representa gráficamente en la Figura 8.11. Como ésta es una relación entre la respuesta en frecuencia en lazo cerrado y la respuesta transitoria es útil, sería bueno poder determinar M_{p_ω} a partir de las gráficas completas, para la investigación del criterio de Nyquist. Es decir, se desea obtener la respuesta de frecuencia de lazo cerrado (Ecuación 9.62) a partir de la respuesta en frecuencia de lazo abierto. Por supuesto, se podrían determinar las raíces del lazo cerrado de $1 + GH(s)$ y dibujar su respuesta de frecuencia. Sin embargo, una vez que se han dedicado todos los esfuerzos necesarios para encontrar las raíces del lazo cerrado de una ecuación característica, entonces no es necesaria su respuesta en frecuencia.

La relación entre la respuesta en frecuencia de lazo abierto y la de lazo cerrado se obtiene fácilmente considerando la Ecuación (9.62) cuando $H(j\omega) = 1$. Si de hecho el sistema no es de realimentación unitaria, donde $H(j\omega) = 1$, simplemente se definirá de nuevo la salida del sistema para que sea igual a la salida de $H(j\omega)$. Entonces la Ecuación (9.62) será

$$T(j\omega) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}. \tag{9.64}$$

La relación entre $T(j\omega)$ y $G(j\omega)$ se obtiene fácilmente en términos de las variables complejas utilizando el plano $G(j\omega)$. Las coordenadas del plano $G(j\omega)$ son u y v; se tiene entonces

$$G(j\omega) = u + jv. \tag{9.65}$$

Por tanto, la magnitud de la respuesta de lazo cerrado $M(\omega)$ es

$$M = \left|\frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}\right| = \left|\frac{u + jv}{1 + u + jv}\right| = \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}}{[(1 + u)^2 + v^2]^{1/2}}. \tag{9.66}$$

Elevando al cuadrado la Ecuación (9.66) y reordenando términos, se obtiene

$$(1 - M^2)u^2 + (1 - M^2)v^2 - 2M^2u = M^2. \tag{9.67}$$

Dividiendo la Ecuación (9.67) entre $(1 - M^2)$ y sumando el término $[M^2/(1 - M^2)]^2$ en ambos miembros de la Ecuación (9.67), se tiene

$$u^2 + v^2 - \frac{2M^2u}{1 - M^2} + \left(\frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 + \left(\frac{M^2}{1 - M^2}\right) + \left(\frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2. \tag{9.68}$$

Reordenando, se obtiene

$$\left(u - \frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{M}{1 - M^2}\right)^2, \tag{9.69}$$

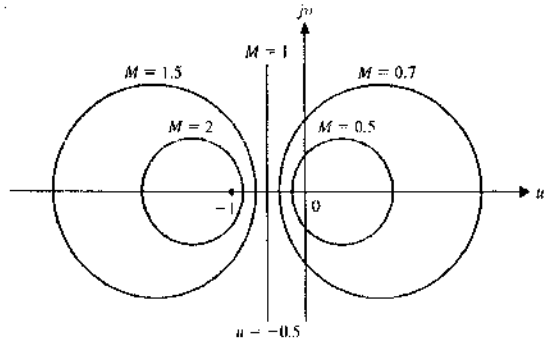


FIGURA 9.23
Círculos de M constante.

que es la ecuación de un círculo en el plano (u, v) con centro en

$$u = \frac{M^2}{1 - M^2}, \qquad v = 0.$$

El radio del círculo es igual a $|M/(1 - M^2)|$. Por tanto, se pueden dibujar varios círculos de magnitud constante M en el plano $[G(j\omega) = u + jv]$. En la Figura 9.23 se muestran varios círculos de M constante. Los círculos a la izquierda de $u = -1/2$ son para $M > 1$ y los círculos a la derecha de $u = -1/2$ son para $M < 1$. Cuando $M = 1$, el círculo se convertirá en la línea recta $u = -1/2$, lo cual es evidente por inspección de la Ecuación (9.67).

En la Figura 9.24 se muestra la respuesta de frecuencia de lazo abierto de un sistema para dos valores de ganancia, siendo $K_2 > K_1$. La curva de respuesta de frecuencia para el sistema con ganancia K_1 es tangente al círculo de magnitud M_1 en una frecuencia ω_{r_1}. De manera análoga, la curva de respuesta de frecuencia para la ganancia K_2 es tangente al círculo de magnitud M_2 en la frecuencia ω_{r_2}. Por tanto, las curvas de magnitud de la respuesta de frecuencia de lazo cerrado se calculan como se muestra en la Figura 9.25. Evidentemente, se puede obtener la respuesta en frecuencia de lazo cerrado de un sistema a partir del plano $(u + jv)$. Si la magnitud máxima, M_{p_w}, es la única información

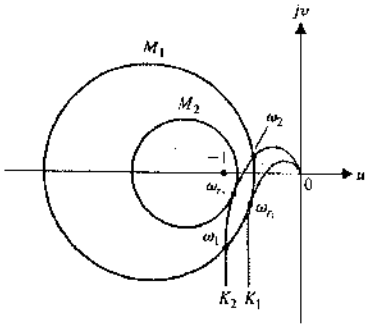


FIGURA 9.24. Diagrama polar de $G(j\omega)$ para dos valores de una ganancia ($K_2 > K_1$).

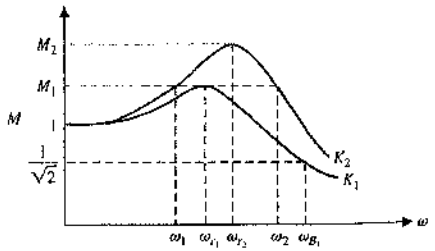


FIGURA 9.25. Respuesta de frecuencia de lazo cerrado de $T(j\omega) = G(j\omega)/1 + G(j\omega)$. Obsérvese que $K_2 > K_1$.

deseada, entonces es suficiente leer este valor directamente en el diagrama polar. La magnitud máxima de la respuesta de frecuencia de lazo cerrado, M_{p_w}, es el valor del círculo M que es tangente al lugar geométrico $G(j\omega)$. El punto de tangencia se presenta en la frecuencia ω_r, que es la frecuencia de resonancia. La respuesta completa de frecuencia de lazo cerrado de un sistema puede obtenerse leyendo la magnitud M de los círculos que el lugar geométrico $G(j\omega)$ cruza en varias frecuencias. Por tanto, el sistema con una ganancia $K = K_2$ tiene una magnitud M_1 de lazo cerrado en las frecuencias ω_1 y ω_2. Esta magnitud se lee en la Figura 9.24 y se muestra en la respuesta de frecuencia de lazo cerrado de la Figura 9.25. El **ancho de banda** $\mathbf{K_1}$ se muestra como ω_{B_1}.

Se puede mostrar empíricamente que la frecuencia de cruce del diagrama de Bode en lazo abierto, ω_c, está relacionada con el ancho de banda del sistema ω_B, por la aproximación $\omega_B = 1.6\ \omega_c$ para ζ en el rango de 0.2 a 0.8.

De manera análoga, se pueden obtener círculos de ángulos de fase constantes de lazo cerrado. Así, para la Ecuación (9.64), la relación del ángulo es

$$\phi = \underline{/T(j\omega)} = \underline{/(u + jv)/(1 + u + jv)}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v}{1 + u}\right). \tag{9.70}$$

Tomando la tangente de ambos miembros y reordenando, se tiene

$$u^2 + v^2 + u - \frac{v}{N} = 0. \tag{9.71}$$

donde $N = \tan\phi$ = constante. Sumando el término $1/4[(1 + (1/N^2)]$ en ambos miembros de la ecuación y simplificando, se obtiene

$$(u + 0.5)^2 + \left(v - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{N^2}\right), \tag{9.72}$$

que es la ecuación de un círculo con su centro en $u = -0.5$ y $v = +(1/2N)$. El radio del círculo es igual a $1/2[(1 + (1/N)^2]^{1/2}$. Por tanto, pueden obtenerse las curvas de ángulo de fase constante para varios valores de N en forma semejante a la de los círculos M.

Los círculos de M y N constantes pueden usarse para el análisis y diseño en el plano polar. Sin embargo, es mucho más fácil obtener el diagrama de Bode para un sistema, y sería preferible si los círculos de M y N constantes se trasladaran a un diagrama de fase-magnitud logarítmica. N. B. Nichols transformó los círculos de M y N constantes al diagrama de fase-magnitud logarítmica y la carta resultante se conoce como **carta de Nichols** [3, 7]. Los círculos M y N aparecen como contornos en la carta de Nichols según se muestra en la Figura 9.26. Las coordenadas del diagrama de fase-magnitud logarítmica son las usadas en la Sección 8.6. Sin embargo, superpuestas en el plano de fase-magnitud logarítmica encontramos líneas de M y N constantes. Las líneas de M constante están dadas en decibelios y las de N en grados. Un ejemplo ilustrará el uso de la carta de Nichols para determinar la respuesta de frecuencia de lazo cerrado.

EJEMPLO 9.7. Estabilidad utilizando la carta de Nichols

Considérese un sistema de realimentación con una función de transferencia de lazo

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0.2j\omega + 1)}, \tag{9.73}$$

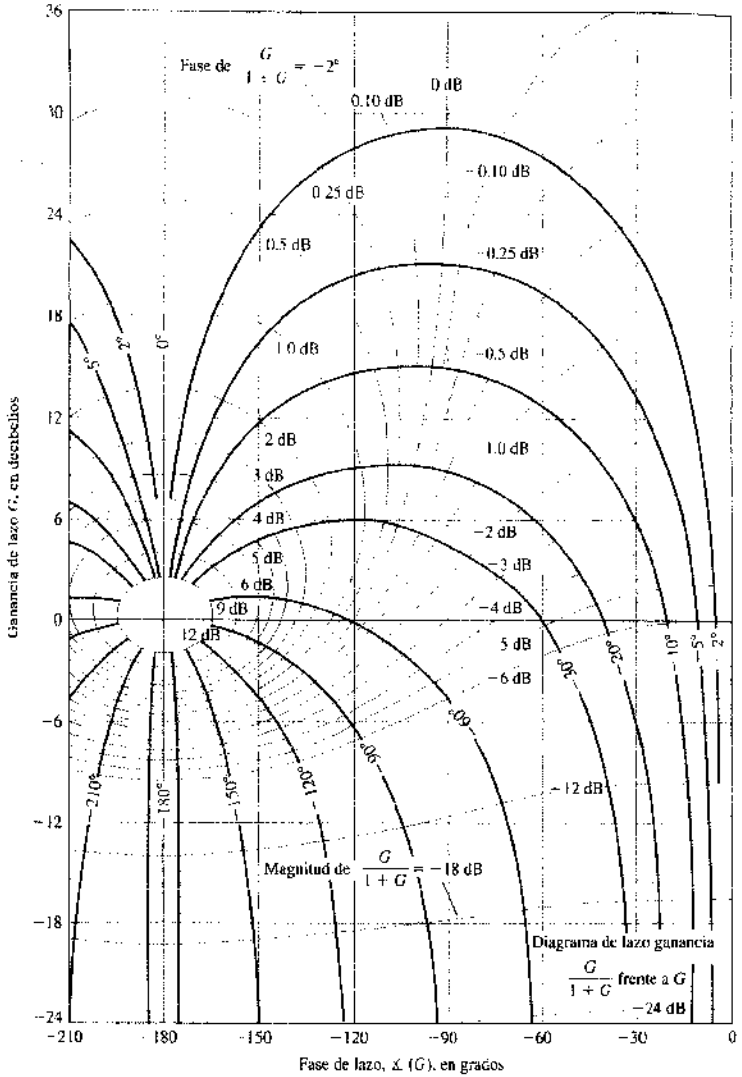


FIGURA 9.26
Carta de Nichols. Las curvas de fase para el sistema en lazo cerrado se muestran en trazo grueso.

El lugar geométrico $G(j\omega)$ se dibuja en la carta de Nichols y se muestra en la Figura 9.27. La magnitud máxima, M_{p_ω}, es igual a +2.5 dB y se presenta en una frecuencia $\omega_r = 0.8$. El ángulo de fase del lazo cerrado en ω_r es igual a $-72°$. El ancho de banda de lazo cerrado en 3 dB es igual a $\omega_B = 1.33$, como se muestra en la Figura 9.27. El ángulo de fase del lazo cerrado en ω_B es igual a $-142°$. ■

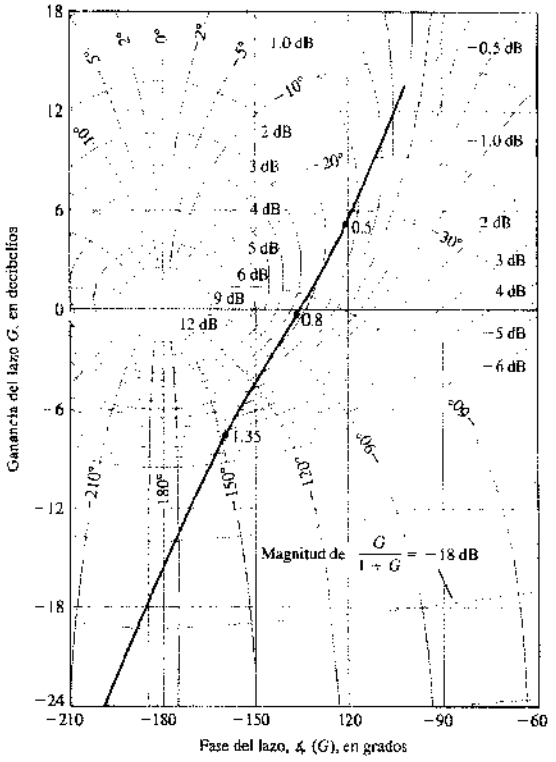


FIGURA 9.27
Diagrama de Nichols para $G(j\omega) = 1/j\omega(j\omega + 1)(0.2j\omega + 1)$. Se muestran tres puntos sobre la curva para $\omega = 0.5$, 0.8 y 1.35, respectivamente.

EJEMPLO 9.8. Sistema de tercer orden

Se considera un sistema con una función de transferencia en lazo abierto

$$G(j\omega) = \frac{0.64}{j\omega[(j\omega)^2 + j\omega + 1]}, \tag{9.74}$$

donde $\zeta = 0.5$ para los polos complejos y $H(j\omega) = 1$. El diagrama de Nichols para este sistema se muestra en la Figura 9.28. El margen de fase para este sistema, según se determina por la carta de Nichols, es de 30°. Con base en la fase, se estima la razón de amortiguamiento del sistema como $\zeta = 0.30$. La magnitud máxima es igual a +9 dB y se presenta en una frecuencia $\omega_r = 0.88$. Por tanto,

$$20 \log M_{p_\omega} = 9 \text{ dB} \quad \text{o} \quad M_{p_\omega} = 2.8.$$

Utilizando la Ecuación (9.63), se sigue que $\zeta = 0.18$.

Hay dos razones de amortiguamiento conflictivas, donde una se obtiene por una medida del margen de fase y la otra por una medida del pico de la respuesta de frecuencia.

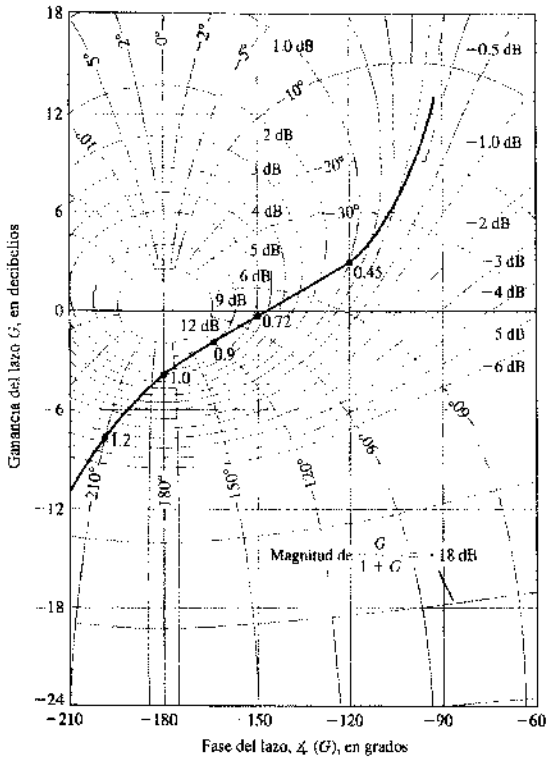


FIGURA 9.28
Diagrama de Nichols para $G(j\omega) = 0.64/j\omega[(j\omega)^2 + j\omega + 1]$.

En este caso se ha encontrado un ejemplo en el que la correlación entre los dominios de frecuencia y tiempo es confusa e incierta. Este conflicto aparente es causado por la naturaleza del lugar geométrico $G(j\omega)$ que se inclina rápidamente hacia la línea de 180° desde el eje de 0 dB. Si se determinan las raíces de la ecuación característica para $1 + GH(s)$, se obtiene

$$q(s) = (s + 0.77)(s^2 + 0.225s + 0.826) = 0. \tag{9.75}$$

La razón de amortiguamiento de las raíces complejas conjugadas es igual a 0.124; las raíces complejas no dominan la respuesta del sistema. Por tanto, la raíz real agregará algún amortiguamiento al sistema, y se podría estimar la razón de amortiguamiento como aproximadamente igual al valor determinado a partir del índice M_{p_ω}; esto es, $\zeta = 0.175$. Un diseñador debe usar con precaución las correlaciones entre los dominios de frecuencia y tiempo. Sin embargo, generalmente hay seguridad si a efectos de análisis y diseño se utiliza el valor más bajo de la relación de amortiguamiento que resulta de las relaciones del margen de fase y de M_{p_ω}. ■

La carta de Nichols puede usarse a efectos de diseño alterando en forma adecuada el lugar geométrico $G(j\omega)$ con el objeto de obtener una M_{p_ω} y un margen de fase deseables. La ganancia K del sistema se ajusta fácilmente para proporcionar un margen de fase y una M_{p_ω} adecuados inspeccionando la carta de Nichols. Por ejemplo, consideremos de nuevo el Ejemplo 9.8, donde

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega[(j\omega)^2 + j\omega + 1]}. \tag{9.76}$$

En la Figura 9.28 se muestra el lugar geométrico $G(j\omega)$ en la carta de Nichols para $K = 0.64$. Se va a determinar un valor adecuado para K de forma que el amortiguamiento del sistema sea mayor que 0.40. Examinando la Figura 8.11, se observa que se necesita que M_{p_ω} sea menor que 1.75 (4.9 dB). Mediante la Figura 9.28 se comprueba que el lugar geométrico $G(j\omega)$ será tangente a la curva de 4.9 dB si este lugar geométrico se reduce en un factor de 2.2 dB. Por tanto, K se reducirá 2.2 dB, o el antilogaritmo del factor (2.2/20) = 1.28. Por esto, la ganancia K debe ser menor que 0.64/1.28 = 0.50 para que la relación de amortiguamiento sea mayor que 0.30.

9.6. ANCHO DE BANDA DEL SISTEMA

El ancho de banda de un sistema en lazo cerrado es una medida excelente del rango de fidelidad de la respuesta del sistema. En sistemas en los que la magnitud a baja frecuencia es 0 dB en el diagrama de Bode, el ancho de banda se mide a la frecuencia de −3 dB. La velocidad de respuesta frente a una entrada escalón será proporcional a ω_B, y el tiempo de asentamiento es inversamente proporcional a ω_B. Por lo tanto, se pretende un ancho de banda grande compatible con componentes del sistema razonables [12].

Se consideran las dos funciones de transferencia de un sistema en lazo cerrado siguientes:

$$T_1(s) = \frac{1}{s + 1}$$

y

$$T_2(s) = \frac{1}{5s + 1}. \tag{9.77}$$

La respuesta en frecuencia de los dos sistemas se contrasta en la parte (a) de la Figura 9.29, y la respuesta de los sistemas frente a un escalón se muestra en la parte (b). El sistema con un ancho de banda mayor proporciona una respuesta más rápida frente a un escalón y una mayor fidelidad en la respuesta frente a una rampa.

Ahora se consideran los dos sistemas de segundo orden con funciones de transferencia en lazo cerrado

$$T_3(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$$

y

$$T_4(s) = \frac{900}{s^2 + 30s + 900}. \tag{9.78}$$

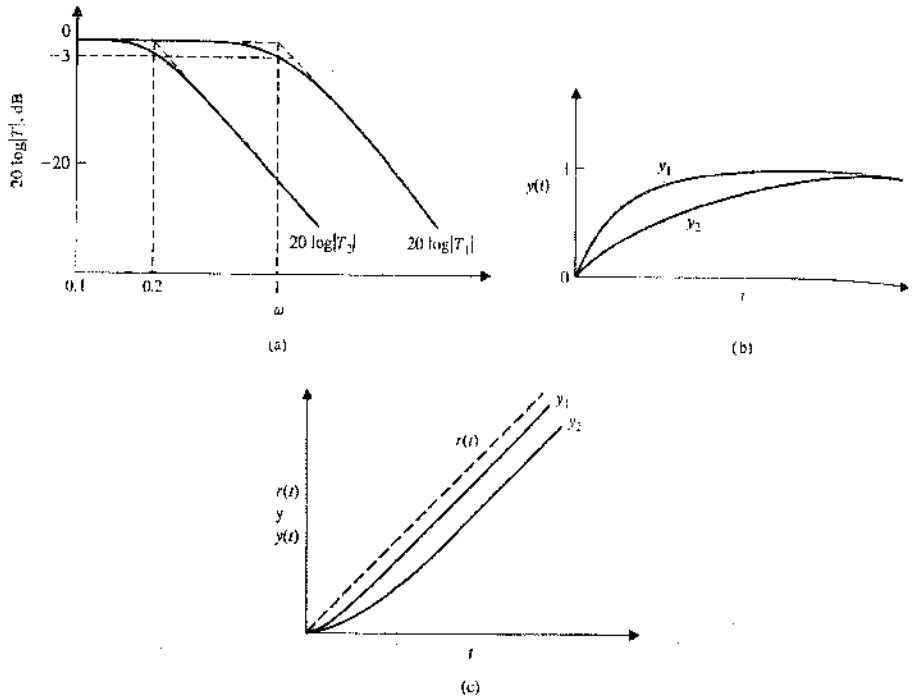


FIGURA 9.29. Respuesta de dos sistemas de primer orden.

Ambos sistemas tienen ζ de 0.5. En la Figura 9.30(a) se muestra la respuesta en frecuencia de ambos sistemas en lazo cerrado. La frecuencia natural es 10 y 30 para los sistemas T_3 y T_4, respectivamente. El ancho de banda es de 15 y 40 para los sistemas T_3 y T_4, respectivamente. Ambos sistemas tienen un 15% de sobreelongación, pero T_4 tiene un tiempo de pico de 0.12 segundos comparado con 0.36 que tiene T_3, tal y como se observa en la Figura 9.30(b). Se puede observar también que el tiempo de asentamiento es de 0.37 para T_4, mientras que para T_3 es de 0.9 segundos. El sistema con un ancho de banda mayor proporciona una respuesta más rápida.

9.7. ESTABILIDAD DE SISTEMAS DE CONTROL CON RETARDOS

En las secciones anteriores se ha analizado e ilustrado el criterio de la estabilidad de Nyquist para sistemas de control cuyas funciones de transferencia son polinomios racionales de $j\omega$. Existen muchos sistemas de control que tienen un atraso de tiempo dentro del lazo cerrado del sistema que afecta a su estabilidad. Un **tiempo de retardo** es el intervalo de tiempo entre el comienzo de un suceso en un punto de un sistema y la acción que resulta en otro punto del sistema. Afortunadamente, el criterio de Nyquist

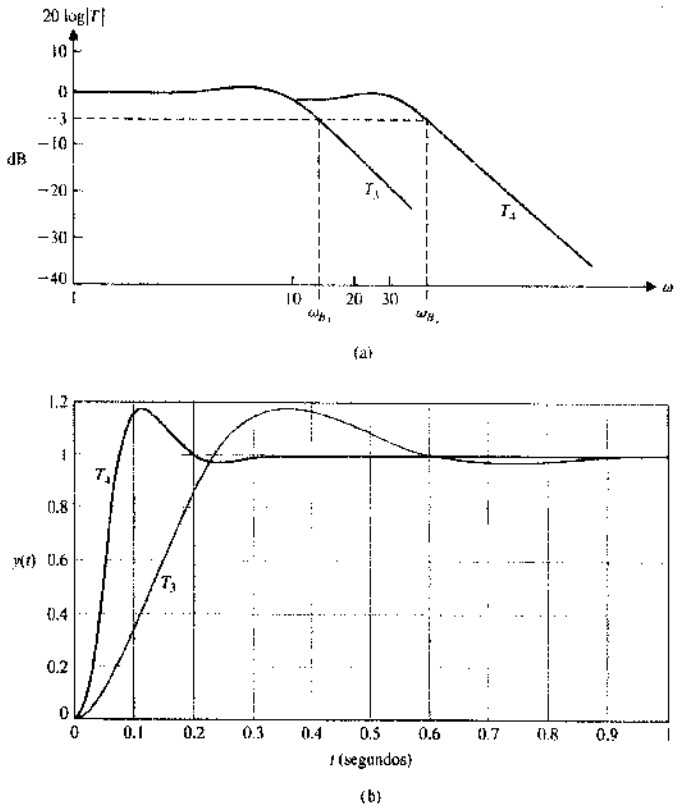


FIGURA 9.30
Respuesta de dos sistemas de segundo orden.

puede utilizarse para determinar el efecto del retardo de tiempo en la estabilidad relativa del sistema de realimentación. Un retardo temporal puro, sin atenuación, se representa por la función de transferencia

$$G_d(s) = e^{-sT}, \tag{9.79}$$

donde T es el tiempo de retardo. El criterio de Nyquist es válido para un sistema con un retardo temporal, pues el factor e^{-sT} no introduce ningún polo o cero adicional dentro del contorno. El factor agrega un cambio de fase a la respuesta de frecuencia sin alterar la curva de magnitud.

Este tipo de retardo temporal se presenta en aquellos sistemas en que se mueve un material que necesita un tiempo finito para pasar de un punto de entrada o control a uno de salida o medición [8, 9].

Por ejemplo, en la Figura 9.31 se muestra el sistema de control de una laminadora. El motor ajusta la separación de los rodillos de forma que se minimiza el error de

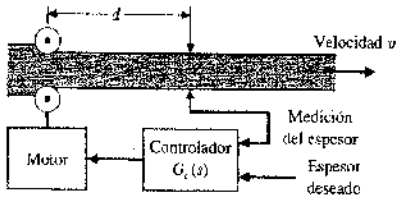


FIGURA 9.31
Sistema de control de una laminadora.

espesor. Si el acero se desplaza a una velocidad v, entonces el retardo temporal entre el ajuste de la laminadora y la medición es

$$T = \frac{d}{v}.$$

Por tanto, para tener un retardo temporal despreciable, se debe disminuir la distancia a la medición y aumentar la velocidad del flujo de acero. Por lo general, no se puede eliminar el efecto del retardo temporal, y por esto la función de transferencia del lazo es

$$G(s)G_c(s)e^{-sT}. \tag{9.80}$$

Sin embargo, se observa que la respuesta de frecuencia de este sistema se obtiene a partir de la función de transferencia del lazo

$$GH(j\omega) = GG_c(j\omega)e^{-j\omega T} \tag{9.81}$$

La acostumbrada función de transferencia del lazo se dibuja en el plano $GH(j\omega)$ y la estabilidad se investiga con relación al punto -1. De manera alternativa, se puede dibujar el diagrama de Bode, incluyendo el factor de atraso, e investigar la estabilidad con relación al punto 0 dB, $-180°$. El factor de atraso $e^{-j\omega T}$ da como resultado un cambio de fase

$$\boxed{\phi(\omega) = -\omega T} \tag{9.82}$$

y fácilmente se suma al cambio de fase que resulta de $GG_c(j\omega)$. Obsérvese que el ángulo está en radianes en la Ecuación (9.82). Un ejemplo mostrará la sencillez de este método en el diagrama de Bode.

EJEMPLO 9.9. Sistema de control de nivel de un líquido

En la Figura 9.32(a) se muestra un sistema de control de nivel y en la 9.32(b) se muestra su diagrama de bloques. El retardo temporal entre el ajuste de la válvula y la salida del fluido es $T = d/v$. Por tanto, si la rapidez del flujo es 5 m^3/s, la superficie de la sección transversal del tubo es de 1 m^2 y la distancia es igual a 5 m, se tiene un retardo temporal $T = 1$ s. La función de transferencia del lazo es entonces

$$GH(s) = G_A(s)G(s)G_f(s)e^{-sT}$$

$$= \frac{31.5}{(s+1)(30s+1)[(s^2/9)+(s/3)+1]}e^{-sT}. \tag{9.83}$$

El diagrama de Bode para este sistema se muestra en la Figura 9.33. El ángulo de fase se muestra para los factores del denominador solos y con la última fase adicional debida al retardo temporal. La curva de ganancia logarítmica cruza la línea de 0 dB en $\omega = 0.8$.

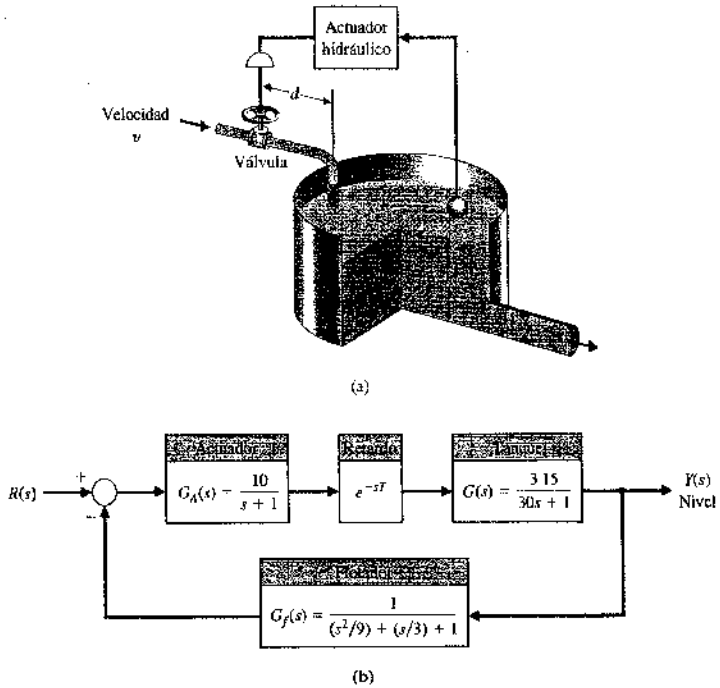


FIGURA 9.32
(a) Sistema de control del nivel de un líquido. (b) Diagrama de bloques.

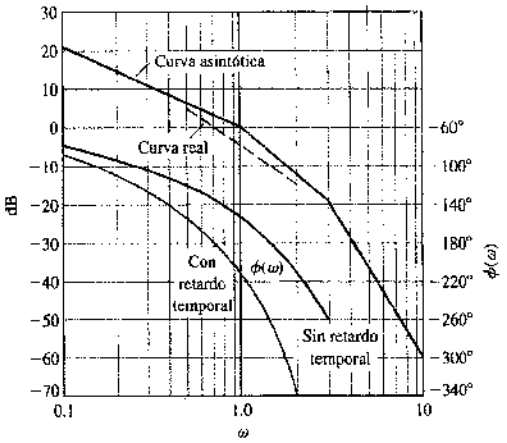


FIGURA 9.33
Diagrama de Bode para el sistema de control del nivel.

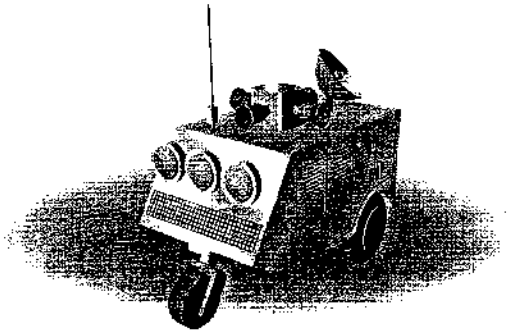
Por tanto, el margen de fase del sistema sin el atraso de tiempo puro sería de 40°. Sin embargo, sumando el tiempo de atraso, se observa que el margen de fase es igual a $-3°$, y el sistema es inestable. Por tanto, su ganancia debe reducirse con el objeto de proporcionar un margen de fase razonable. Para proporcionar un margen de fase de 30°, la ganancia deberá disminuirse en un factor de 5 dB a $K = 31.5/1.78 = 17.7$.

Un retardo temporal, e^{-sT}, en un sistema de realimentación introduce una última fase adicional y da como resultado un sistema menos estable. Por tanto, como los retardos temporales puros son inevitables en muchos sistemas, frecuentemente es necesario reducir la ganancia del lazo con el objeto de obtener una respuesta estable. Sin embargo, el precio de la estabilidad es el aumento resultante en el error del sistema en estado estacionario cuando se reduce la ganancia del lazo. ■

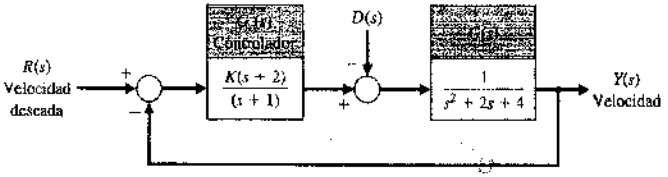
9.8. EJEMPLO DE DISEÑO: VEHÍCULO DE RECONOCIMIENTO CONTROLADO DE FORMA REMOTA

En la actualidad una idea que se puede llevar a cabo es el uso de vehículos controlados de forma remota para el reconocimiento en las misiones de paz de la ONU. En la Figura 9.34(a) se muestra un concepto de un vehículo todoterreno, y en la Figura 9.34(b) una propuesta de sistema de control de velocidad. La velocidad deseada $R(s)$ se transmite por radio al vehículo; la perturbación $D(s)$ representa las colinas y las rocas. El objetivo es lograr un buen control con un error en estado estacionario pequeño y una sobreelongación pequeña frente a entradas escalón, $R(s)$ [13].

En primer lugar, para lograr un error pequeño en estado estacionario frente a un escalón unidad, se calcula



(a)



(b)

FIGURA 9.34
(a) Vehículo de reconocimiento controlado remotamente. (b) Control de velocidad de un sistema. Este vehículo podría utilizarse por las Naciones Unidas en misiones de paz.

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s)$$
$$= \lim_{s\to 0} s\left[\frac{R(s)}{1 + G_c G(s)}\right]$$
$$= \frac{1}{1 + G_c G(s)} = \frac{1}{1 + K/2}. \tag{9.84}$$

Si se selecciona $K = 20$, se obtendrá un error en estado estacionario del 9% de la magnitud de la entrada. Si $K = 20$, se reformula $G(s)$ para calcular el diagrama de Bode, y se obtiene

$$G(s) = \frac{10(1 + s/2)}{(1 + s)(1 + s/2 + s^2/4)}. \tag{9.85}$$

En la Tabla 9.4 se muestran datos resumidos de los cálculos para $0 \leqslant \omega \leqslant 6$. El diagrama de Nichols para $K = 20$ es el que aparece en la Figura 9.35. Si se examina la carta de Nichols, se sigue que M_{p_ω} es 12 dB, y el margen de fase es de 15 grados. La respuesta frente a un escalón para este sistema es subamortiguada y se puede predecir una sobreelongación excesiva de aproximadamente el 61%.

Para reducir la sobreelongación frente a una entrada escalón se puede reducir la ganancia para lograr una sobreelongación predicha. Para limitar la sobreelongación al 25% se selecciona un ζ deseado para la raíz dominante de 0.4 (*véase* la Figura 5.8) y, por lo tanto, se requiere $M_{p_\omega} = 1.35$ (*véase* la Figura 8.11) o $20 \log M_{p_\omega} = 2.6$ dB. Para disminuir la ganancia se moverá la respuesta en frecuencia verticalmente y hacia abajo en la carta de Nichols, como se muestra en la Figura 9.35. En $\omega_1 = 2.8$ se intersecan los 2.6 dB con la curva en lazo cerrado. La reducción (desplazamiento vertical) en la ganancia es igual a 13 dB, o a un factor de 4.5. Por lo tanto, $K = 20/4.5 = 4.44$. Para esta ganancia reducida, el error en estado estacionario es

$$e_{ss} = \frac{1}{(1 + 4.4/2)} = 0.31,$$

de manera que se tiene un error en estado estacionario del 31%.

Como se muestra en la Figura 9.36, la respuesta en frecuencia real cuando $K = 4.44$ tiene una sobreelongación del 32%. Si se utiliza una ganancia de 10, se tiene una sobreelongación del 48% con un error en estado estacionario del 17%. En la Tabla 9.5 se resume el comportamiento del sistema. Como solución de compromiso, se selecciona $K = 10$ y se dibuja la respuesta en frecuencia en una carta de Nichols moviendo la respuesta de $K = 20$ hacia abajo en $20 \log 2 = 6$ dB, como se muestra en la Figura 9.35.

Si se examina la carta de Nichols para $K = 10$, se tiene $M_{p_\omega} = 7$ dB y un margen de fase de 26 grados. Por lo tanto, se estima un ζ para las raíces dominantes de 0.34, lo que debería proporcionar una sobreelongación del 30% frente a una entrada escalón. En la Tabla 9.5 se resume la respuesta real. El ancho de banda del sistema es de $\omega_B \simeq 5$. Por lo tanto, se puede predecir un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{(0.34)(\omega_B/1.4)} = 3.3 \text{ segundos},$$

Tabla 9.4 Datos de la respuesta en frecuencia para el ejemplo de diseño

ω	0	1.2	1.6	2.0	2.8	4	6
dB	20	18.4	17.8	16.0	10.5	2.7	−5.2
Grados	0	−65	−86	−108	−142	−161	−170

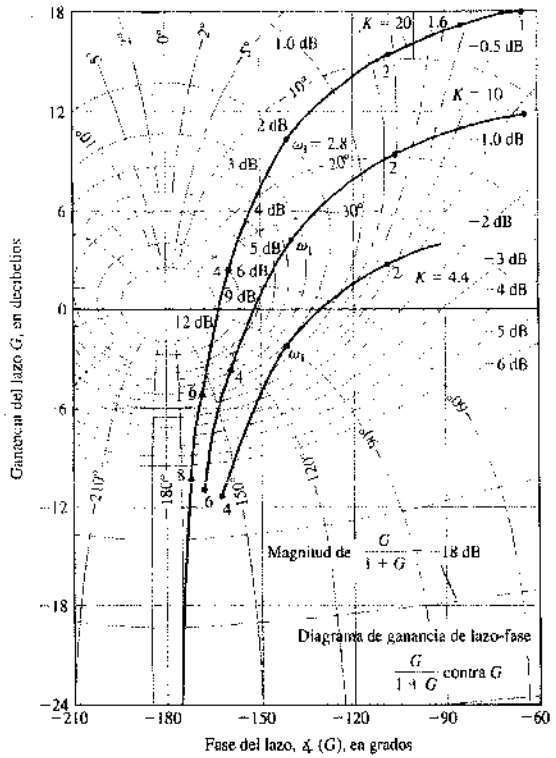


FIGURA 9.35
Diagrama de Nichol para el ejemplo de diseño cuando $K = 20$ y para dos ganancias reducidas.

puesto que $\omega_B \simeq 1.4\omega_n$ para $\zeta = 0.34$. Como se muestra en la Figura 9.36, el tiempo de asentamiento real es aproximadamente de 5.4 segundos.

El efecto en estado estacionario de una perturbación de entrada escalón unidad se puede determinar utilizando el teorema del valor final con $R(s) = 0$ como sigue:

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s\left[\frac{G(s)}{1 + GG_c(s)}\right]\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{4 + 2K}. \tag{9.86}$$

Por lo tanto, la perturbación unidad se reduce en un factor $(4 + 2K)$. Para $K = 10$, se tiene $y(\infty) = 1/24$, o lo que es lo mismo, la perturbación en estado estacionario se

Tabla 9.5 Respuesta real para las ganancias seleccionadas

K	4.44	10	20
Tanto por ciento de sobreelongación	32.4	48.4	61.4
Tiempo de asentamiento (segundos)	4.94	5.46	6.58
Tiempo de pico (segundos)	1.19	0.88	0.67
e_{ss}	31%	16.7%	9.1%

Nota: El tanto por ciento de sobreelongación está definido en la Ecuación (5.12).

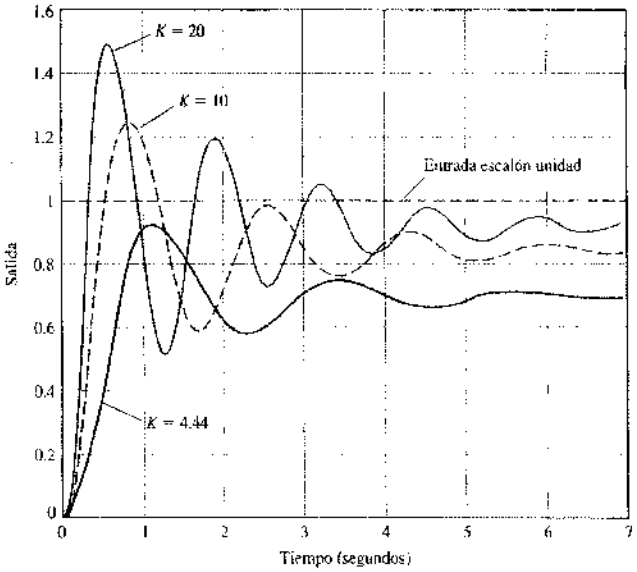


FIGURA 9.36
La respuesta del sistema para tres valores de K para una entrada escalón unidad, $r(t)$.

reduce al 4% de la magnitud de la perturbación. Esto es, se logra un resultado razonable con $K = 10$.

La mejor solución de compromiso de diseño sería $K = 10$, dado que se logra un valor del error en estado estacionario del 16.7%. Si la sobreelongación y el tiempo de asentamiento son excesivos, se tiene que volver a calcular el lugar de $G(j\omega)$ en la carta de Nichols utilizando los métodos que se describen en el Capítulo 10.

9.9. CONTROLADORES PID EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

El controlador PID posee un término proporcional, un término integral y uno derivativo (*véase* la Sección 7.7). Entonces la función de transferencia de un controlador PID está dada por

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s. \tag{9.87}$$

Si $K_D = 0$ se tiene un controlador PI

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}. \tag{9.88}$$

Si $K_I = 0$ se tiene un controlador PD

$$G_c(s) = K_P + K_D s. \tag{9.89}$$

De manera general, los controladores PID son particularmente útiles para reducir el error en estado estacionario y mejorar la respuesta transitoria cuando $G(s)$ tiene uno o dos polos (o puede ser aproximada por una planta de segundo orden).

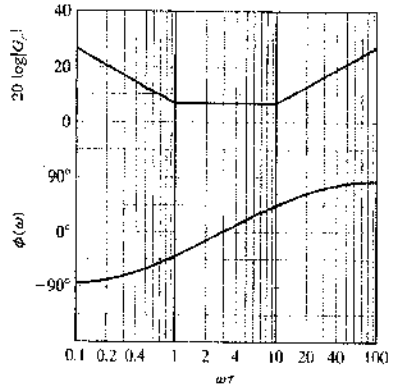


FIGURA 9.37
Diagrama de Bode para un controlador PID utilizando la aproximación asintótica para la curva de magnitud.

Se pueden utilizar los métodos de respuesta en frecuencia para representar la adición de un controlador PID. El controlador PID, Ecuación (9.87), se puede reescribir como

$$G_c(s) = \frac{K_I\left(\frac{K_D}{K_I}s^2 + \frac{K_P}{K_I}s + 1\right)}{s} = \frac{K_I(\tau s + 1)\left(\frac{\tau}{\alpha}s + 1\right)}{s}. \tag{9.90}$$

En la Figura 9.37 se muestra el diagrama de Bode de la Ecuación (9.90) para $\omega\tau$, $K_I = 2$ y $\alpha = 10$. El controlador PID es un tipo de compensador cuya curva de respuesta en frecuencia presenta una atenuación grande y de pendiente pronunciada (o de supresión de banda) con una ganancia variable K_I. Por supuesto, es posible que el controlador tenga ceros complejos y un diagrama de Bode que dependerá del ζ de los ceros complejos. La contribución de los ceros al diagrama de Bode se puede visualizar revisando la Figura 8.10 para polos complejos y observando que la fase y la magnitud cambian cuando ζ varía. El controlador PID con ceros complejos es

$$G_c(\omega) = \frac{K_I[1 + (2\zeta/\omega_n)j\omega - (\omega/\omega_n)^2]}{j\omega}. \tag{9.91}$$

Normalmente se escoge $0.9 > \zeta > 0.7$.

9.10. ESTABILIDAD EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA UTILIZANDO MATLAB

Ahora se presenta la estabilidad utilizando una herramienta como MATLAB. Esta sección vuelve sobre el diagrama de Nyquist, la carta de Nichols y el diagrama de Bode en el análisis de la estabilidad relativa. Se ilustra con dos ejemplos la aproximación de diseño en el dominio de la frecuencia. Se utilizará la respuesta en frecuencia de una función de transferencia en lazo cerrado, $T(j\omega)$, así como la función de transferencia del lazo $GH(j\omega)$. También se presenta un ejemplo ilustrativo que muestra cómo tratar con un retardo temporal en un sistema utilizando la aproximación de Padé [6].

Las funciones de MATLAB que se utilizan en esta sección son nyquist, nichols, margin, pade y ngrid.

Normalmente es más difícil generar manualmente el diagrama de Nyquist que el de Bode. Sin embargo, se puede utilizar MATLAB para generar el diagrama de Nyquist

utilizando la función nyquist, como se muestra en la Figura 9.38. Cuando se utiliza nyquist sin argumentos en la parte izquierda, se genera el diagrama de Nyquist de manera automática; de otra manera, se devuelven las partes real e imaginaria de la respuesta en frecuencia. En la Figura 9.39 se muestra una ilustración de la función nyquist.

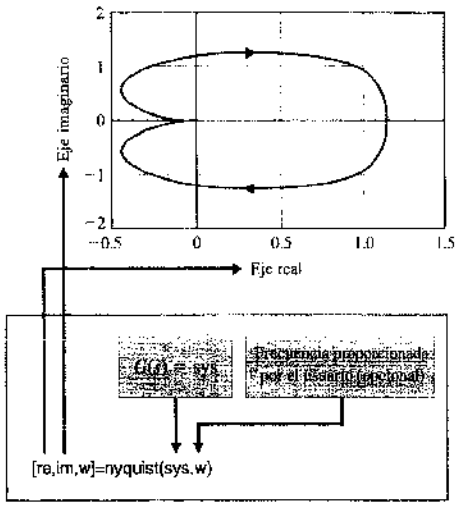


FIGURA 9.38
La función nyquist.

```
>>num=[0.5]; den=[1 2 1 0.5 ];
>>sys=tf(num,den);
>>nyquist(sys)
```

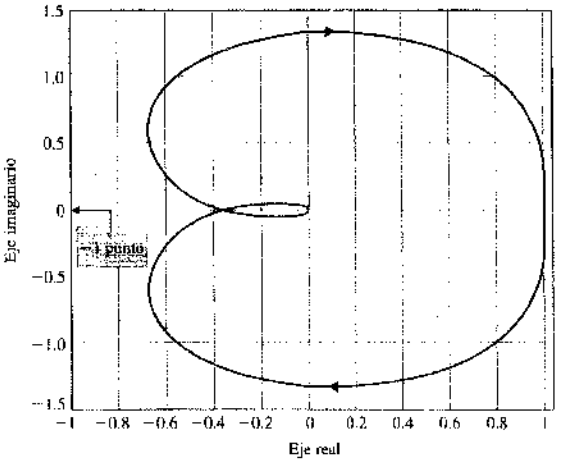


FIGURA 9.39
Un ejemplo de la función nyquist.

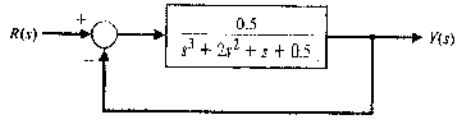


FIGURA 9.40
Un ejemplo de sistema de control en lazo cerrado para Nyquist y Bode con estabilidad relativa.

Como se analizó en la Sección 9.4, se pueden determinar las medidas de la estabilidad relativa del **margen de ganancia** y del **margen de fase** a partir del diagrama de Nyquist o del diagrama Bode. El margen de ganancia es una medida de cuánto debería aumentar la ganancia del sistema para que el lugar de $GH(j\omega)$ pase a través del punto $(-1, 0)$, resultando por lo tanto un sistema inestable. El margen de fase es una medida del retardo de fase requerido antes de que el sistema se haga inestable. Tanto el margen de ganancia como el de fase se pueden determinar a partir del diagrama de Nyquist o del diagrama de Bode.

Considérese el sistema que se muestra en la Figura 9.40. La estabilidad relativa se puede determinar a partir del diagrama de Bode utilizando la función margin, lo que se muestra en la Figura 9.41. Si la función margin se llama sin argumentos en la parte izquierda, el diagrama de Bode se genera automáticamente con los márgenes de ganancia y de fase etiquetados sobre el diagrama. Esto se ilustra en la Figura 9.42 para el sistema que se muestra en la Figura 9.40.

El código para generar el diagrama de Nyquist para el sistema de la Figura 9.40 se muestra en la Figura 9.43. En este caso, el número de polos de $GH(s)$ con partes reales positivas es cero, y el número de rodeos al punto -1 en sentido contrario al de las agujas del reloj es cero; por tanto, el sistema en lazo cerrado es estable. También se puede determinar el margen de ganancia y el margen de fase como se indica en la Figura 9.43.

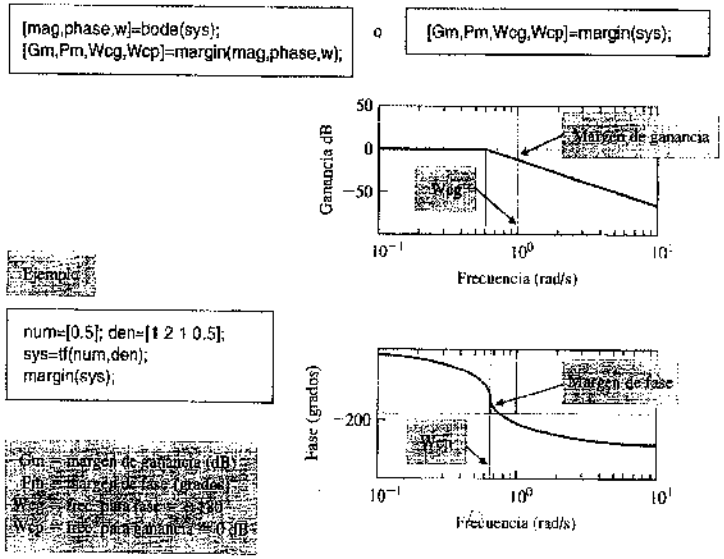
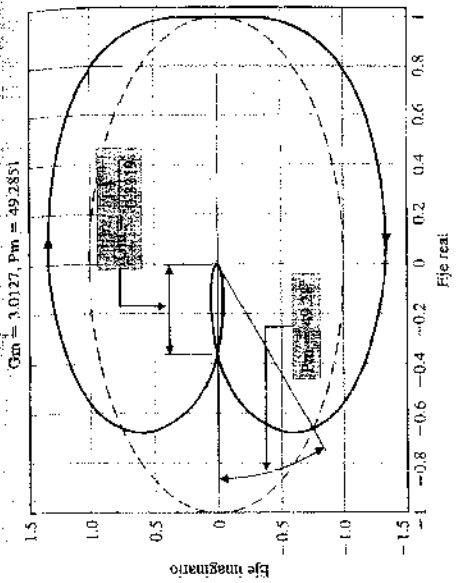


FIGURA 9.41
La función margin.



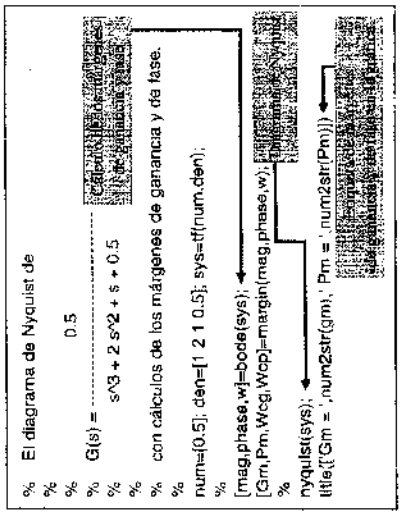


FIGURA 9.43. (a) El diagrama de Nyquist para el sistema de la Figura 9.40 con márgenes de ganancia y fase. (b) Código MATLAB.

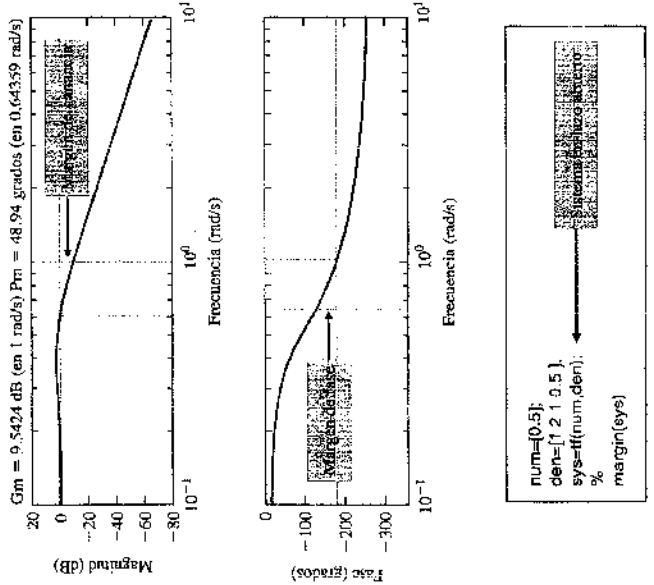


FIGURA 9.42. El diagrama de Bode para el sistema de la Figura 9.40 con el margen de ganancia y el margen de fase que se indican en los diagramas.

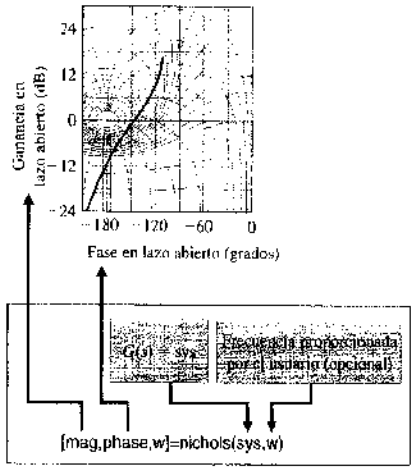


FIGURA 9.44
La función **nichols**.

Carta de Nichols. Las cartas de Nichols se pueden generar utilizando la función nichols que se muestra en la Figura 9.44. Si se llama a la función nichols sin argumentos en la parte izquierda, se genera la carta de Nichols de forma automática; de otra forma, la función nichols devuelve la magnitud y la fase en grados (junto con la frecuencia ω). Una carta de Nichols con mallado se puede generar sobre una gráfica existente utilizando la función ngrid. La carta de Nichols que se muestra en la Figura 9.45 corresponde a la del sistema

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0.2j\omega + 1)}. \tag{9.92}$$

EJEMPLO 9.10. Sistema de control de nivel de un líquido

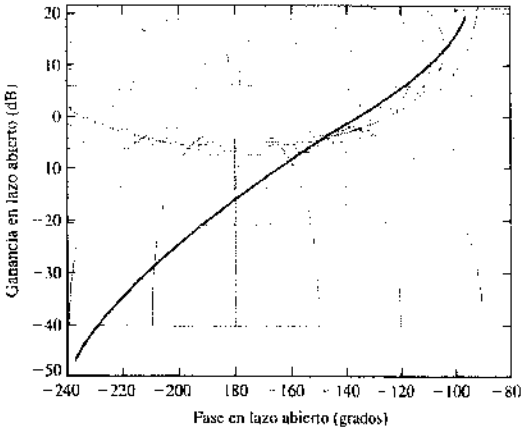
Se considera el sistema de control de nivel de un líquido descrito por el diagrama de bloques que se muestra en la Figura 9.32 (*véase* el Ejemplo 9.9). Obsérvese que el sistema presenta un retardo temporal. La función de transferencia de lazo está dada por

$$GH(s) = \frac{31.5e^{-sT}}{(s + 1)(30s + 1)(s^2/9 + s/3 + 1)}. \tag{9.93}$$

En primer lugar se cambia la Ecuación (9.93) de manera que $GH(s)$ tenga forma de función de transferencia con polinomios en el numerador y en el denominador. Para hacer esto, se realiza una aproximación a e^{-sT} con la función pade, como se muestra en la Figura 9.46.

Por ejemplo, se supone que nuestro retardo es $T = 1$ segundo, y que se quiere una aproximación de segundo orden $n = 2$. Utilizando la función pade, se sigue que

$$e^{-s} \simeq \frac{s^2 - 6s + 12}{s^2 + 6s + 12}. \tag{9.94}$$



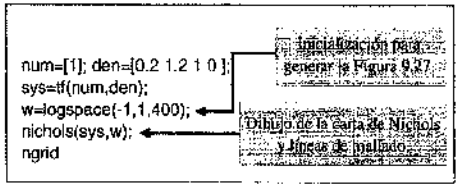


FIGURA 9.45
Carta de Nichols para el sistema de la ecuación (9.92).

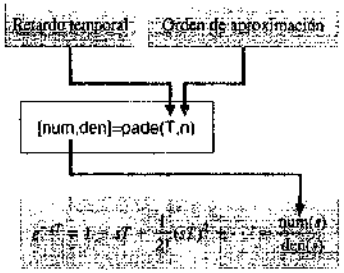
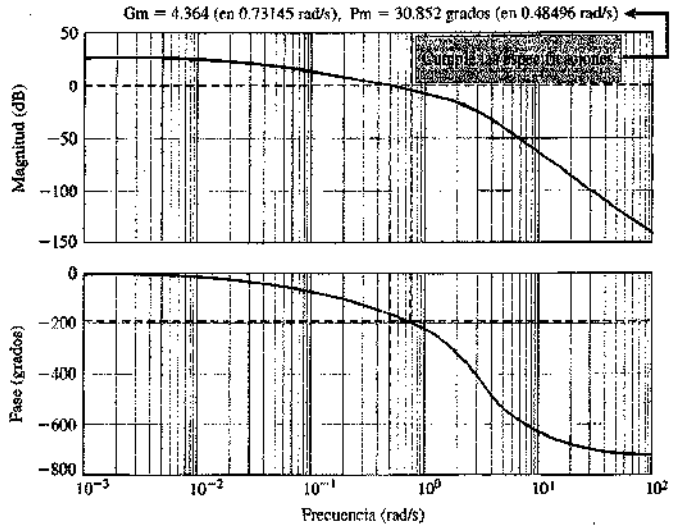
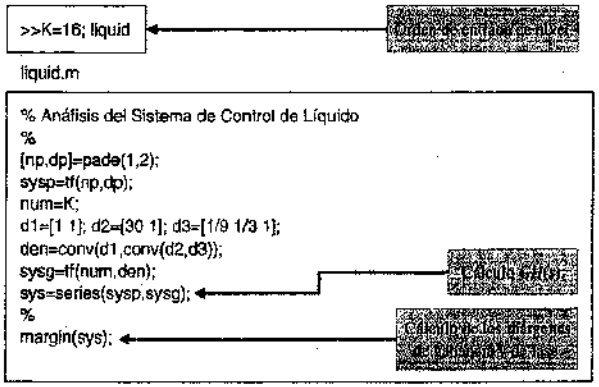


FIGURA 9.46
La función **pade**.



(a)



(b)

FIGURA 9.47
(a) Diagrama de Bode para un sistema de control de nivel de líquido. (b) Código MATLAB.

Sustituyendo la Ecuación (9.94) en la Ecuación (9.93) se tiene que

$$GH(s) \simeq \frac{31.5(s^2 - 6s + 12)}{(s + 1)(30s + 1)(s^2/9 + s/3 + 1)(s^2 + 6s + 12)}.$$

Ahora se puede escribir un código para investigar la estabilidad relativa del sistema utilizando el diagrama de Bode. El objetivo es lograr un margen de fase de 30°. El código asociado se muestra en la Figura 9.47. Para hacer el código interactivo, se permite que la ganancia K (ahora fija en $K = 31.5$) sea ajustable y se pueda definir fuera del código a nivel de órdenes. Entonces se fija K y se ejecuta el código para comprobar el margen de fase y, si es necesario, se itera. La selección final de la ganancia es $K = 16$. Se recuerda que en el análisis se ha utilizado una aproximación de Padé de segundo orden del retardo temporal. ■

EJEMPLO 9.11. Vehículo de reconocimiento controlado de forma remota

Se considera el vehículo de reconocimiento controlado de manera remota que se muestra en la Figura 9.34. El objetivo del diseño es lograr un buen control con un error en estado estacionario pequeño y una sobreelongación pequeña frente a un escalón. Escribir un código va a permitir llevar a cabo muchas iteraciones de diseño de forma rápida y eficientemente. En primer lugar se investiga la especificación del error en estado estacionario. El error estacionario frente a un escalón unitario es

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K/2}. \tag{9.95}$$

El efecto de la ganancia K en el error en estado estacionario es claro a partir de la Ecuación (9.95): Si $K = 20$, el error es del 9% de la magnitud de entrada; si $K = 10$, el error es del 17% de la magnitud de entrada.

Ahora se puede investigar la especificación de la sobreelongación en el dominio de la frecuencia. Se supone que se requiere un porcentaje de sobreelongación menor que el 50%. Resolviendo

$$\text{P.O.} \simeq 100 \exp^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \leqslant 50$$

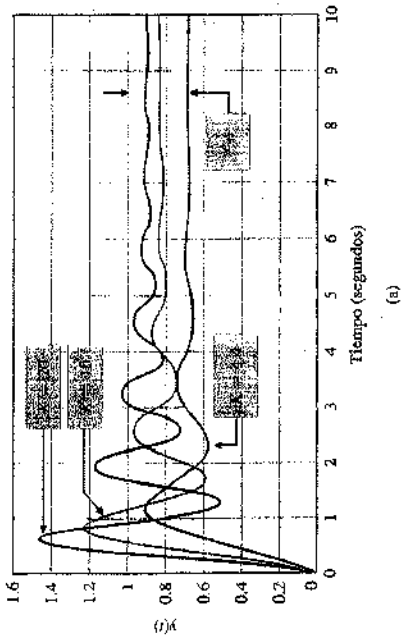
para ζ resulta

$$\zeta \geqslant 0.215.$$

A partir de la Figura 8.11 se sigue que $M_{p_{lu}} \leqslant 2.45$. Se debe tener en cuenta que la información de la Figura 8.11 es únicamente para sistemas de segundo orden y que se puede utilizar aquí sólo como guía. Ahora se calcula el diagrama de Bode del lazo cerrado y se comprueban los valores de $M_{p_{cl}}$. Cualquier ganancia para la que $M_{p_{lu}} \leqslant 2.45$ puede ser una ganancia válida para el diseño, pero habrá que investigar más allá para incluir respuestas frente a escalón a fin de comprobar la sobreelongación real. El código de la Figura 9.48 resuelve esta cuestión. Con el mismo espíritu que en los pasos de diseño seguidos en la Sección 9.8, se investigan las ganancias $K = 20$, 10 y 4.44 (incluso aunque $M_{p_{lu}} > 2.45$ para $K = 20$). Como se muestra en la Figura 9.49, se pueden dibujar las respuestas frente a una entrada escalón para cuantificar la sobreelongación.

Además, se podría haber utilizado una carta de Nichols para ayudar en el proceso de diseño, como se muestra en la Figura 9.50.

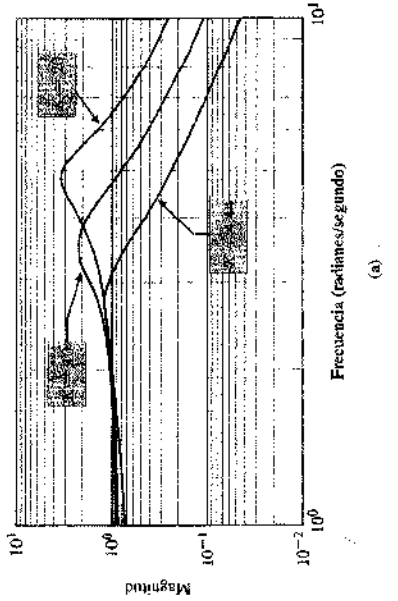
En la Tabla 9.5 se resumen los resultados del análisis para $K = 20$, 10 y 4.44. Se escoge $K = 10$ como ganancia del diseño. A continuación, y tal como se muestra en la Figura 9.51, se obtiene el diagrama de Nyquist y se comprueba la estabilidad relativa. El margen de ganancia es $MG = 49.56$ dB y el margen de fase es $MF = 26.11°$. ■




```
t=[0:0.01:10]; K=[20,10,4.44];
y=zeros(length(t), length(K));
%
for i=1:3
  numgc=K(i)*[1 2]; dengc=[1 1]; sysgc=tf(numgc,dengc);
  numg=[1]; deng=[1 2 4]; sysg=tf(numg,deng);
  sys=series(sysgc,sysg);
  sys=feedback(sys,[1]);
  y(:,i)=step(sys,t);
end
%
plot(t,y(:,1),t,y(:,2),t,y(:,3)),grid
xlabel('Tiempo (segundos)'), ylabel('y(t)')
```

(b)

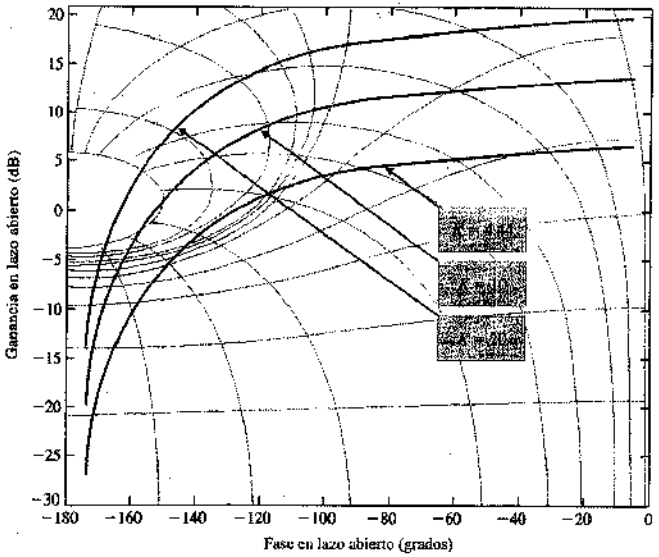
FIGURA 9.49. Vehículo controlado remotamente. (a) Respuesta a un salto. (b) Código MATLAB.




```
w=logspace(0,1,200); K=[20,10,4.44];
%
for i=1:3
  numgc=K(i)*[1 2]; dengc=[1 1]; sysgc=tf(numgc,dengc);
  numg=[1]; deng=[1 2 4]; sysg=tf(numg,deng);
  [sys]=series(sysgc,sysg); sys=feedback(sys,[1]);
  [mag,phase,w]=bode(sys,w);
  mag_save(i,:)=mag(:,1,:);
end
%
loglog(w,mag_save(1,:),w,mag_save(2,:),w,mag_save(3,:))
xlabel('Frecuencia (radianes/segundo)'), ylabel('Magnitud'), grid on
```

(b)

FIGURA 9.48. Vehículo controlado remotamente. (a) Diagrama de Bode del sistema en lazo cerrado. (b) Código MATLAB.




```
% Vehiculo de batalla controlado remotamente
%
numgc=[1 2]; dengc=[1 1]; sysgc=tf(numgc,dengc);
numg=[1]; deng=[1 2 4]; sysg=tf(numg,deng);
sys=series(sysgc,sysg);
%
w=logspace(-1,1,200);
%
K=[20,10,4.44];
hold off, clf
for i=1:3
  nichols(K(i)*sys,w), ngrid
hold on
end
```

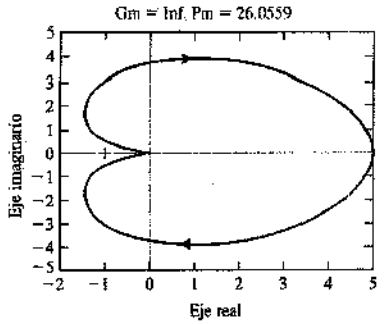
(b)

FIGURA 9.50
Vehículo controlado remotamente.
(a) Carta de Nichols.
(b) Código MATLAB.

9.11. EJEMPLO DE DISEÑO SECUENCIAL: SISTEMA DE LECTURA DE UNA UNIDAD DE DISCO

En este capítulo se examinará el sistema descrito en el Capítulo 8 utilizando el sistema representado en la Figura 8.42. Este sistema incluye el efecto de la resonancia de flexión e incorpora un controlador PD con un cero en $s = -1$. Se determinará el margen de ganancia y el margen de fase utilizando MATLAB cuando $K = 400$.

En la Figura 9.52 se muestra el diagrama de Bode para el sistema de la Figura 8.42 cuando $K = 400$. El margen de ganancia es 22.9 dB y el de fase es 37.2°. En la Figura 9.53 se muestra la gráfica de la respuesta a una entrada escalón de este sistema. El tiempo de asentamiento de este diseño es $T_s = 9.6$ ms.



(a)

```
% Vehículo controlado remotamente
% Diagrama de Nyquist para K=10
%
numgc=10*[1 2]; dengc=[1 1]; sysgc=tf(numgc,dengc);
numg=[1]; deng=[1 2 4]; sysg=tf(numg,deng);
sys=series(sysgc,sysg);
%
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(sys);
%
nyquist(sys);
title(['Gm = ',num2str(Gm),'  Pm = ',num2str(Pm)])
```

(b)

FIGURA 9.51
(a) Carta de Nyquist para el vehículo controlado remotamente con $K = 10$. (b) Código MATLAB.

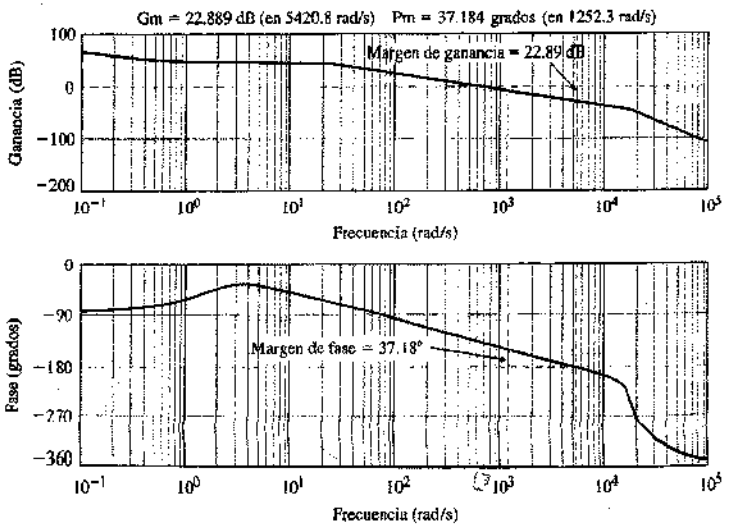

Gm = 22.889 dB (en 5420.8 rad/s) Pm = 37.184 grados (en 1252.3 rad/s)
Margen de ganancia = 22.89 dB
Ganancia (dB)
Frecuencia (rad/s)
Margen de fase = 37.18°
Fase (grados)
Frecuencia (rad/s)

FIGURA 9.52
Diagrama de Bode del sistema mostrado en la Figura 8.42.

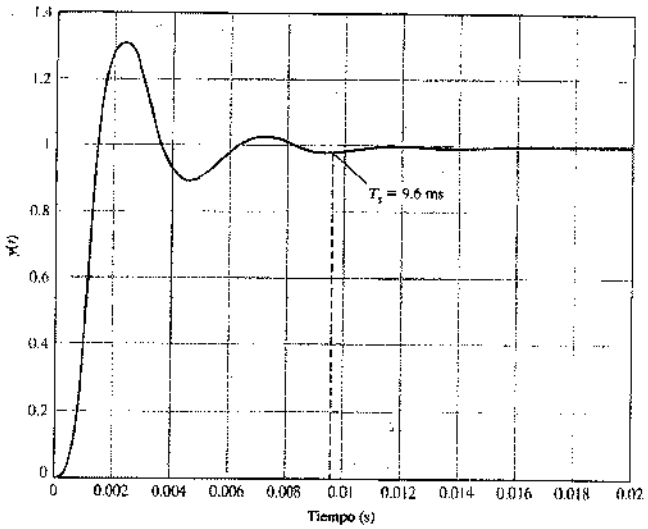


FIGURA 9.53
Respuesta del sistema a una entrada escalón.

9.12. RESUMEN

La estabilidad de un sistema de control con realimentación puede determinarse en el dominio de la frecuencia utilizando el criterio de Nyquist. Además, este criterio proporciona dos medidas de la estabilidad relativa: (1) el margen de ganancia y (2) el margen de fase. Estas medidas de la estabilidad relativa pueden utilizarse como índices del comportamiento transitorio con base en las correlaciones establecidas entre la respuesta en el dominio de la frecuencia y la respuesta transitoria. La magnitud y la fase del sistema de lazo cerrado se pueden determinar a partir de la respuesta de frecuencia de la función de transferencia de lazo abierto, utilizando en la gráfica polar círculos de fase y magnitud constante. De manera alternativa, se puede utilizar un diagrama de fase-magnitud logarítmica con curvas superpuestas de fase y magnitud de lazo cerrado (llamado carta de Nichols) para obtener la respuesta de frecuencia de lazo cerrado. Una medida de la estabilidad relativa, la magnitud máxima de la respuesta de frecuencia de lazo cerrado, M_{p_ω}, se obtiene por la carta de Nichols. La medida de la frecuencia, M_{p_ω}, puede correlacionarse con la relación de amortiguamiento de la respuesta del tiempo, lo cual constituye un índice útil del comportamiento. Finalmente, se expone cómo un sistema de control con un retardo temporal puro se puede investigar de forma semejante a la usada para sistemas sin dicho retardo. En la Tabla 9.6 se presenta un resumen sobre el criterio de Nyquist, las medidas de la estabilidad relativa y el diagrama de Nichols, para varias funciones de transferencia.

La Tabla 9.6 es muy útil e importante para el diseñador y el analista de sistemas de control. Si se tiene un modelo de un proceso $G(s)$ y un controlador $G_c(s)$, entonces se puede determinar $G(s)G_c(s)$. Con esta función de transferencia se puede examinar la tabla de *las funciones de transferencia* en la columna 1. Esta tabla contiene quince funciones de transferencia típicas. Para una función de transferencia particular, la tabla proporciona el diagrama de Bode, el diagrama de Nichols y el lugar de las raíces. Con esta información el diseñador puede determinar o estimar el comportamiento del sistema y considerar el añadir o alterar el controlador $G_c(s)$.

Tabla 2-6 Gráficas de funciones de transferencia típicas (continúa)

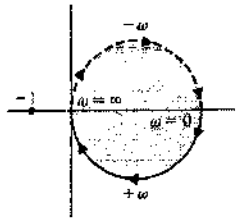
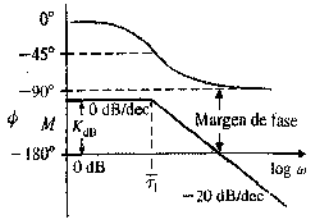
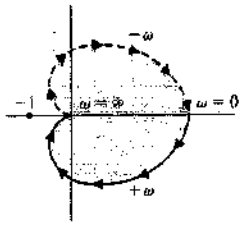
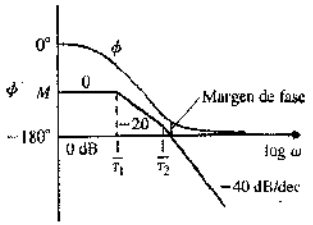
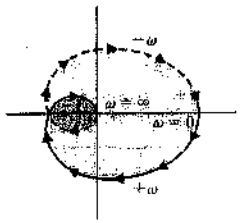
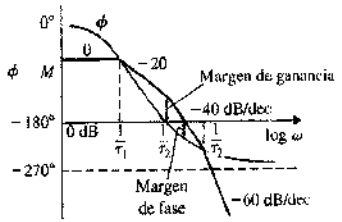
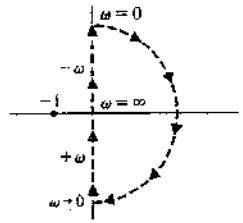
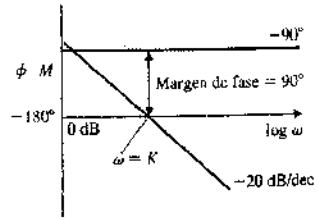
$G(s)$	Diagrama polar	Diagrama de Bode
1. $\dfrac{K}{s\tau_1 + 1}$		
2. $\dfrac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$		
3. $\dfrac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)}$		
4. $\dfrac{K}{s}$		

Tabla 2-6 Continúa (Cont.)

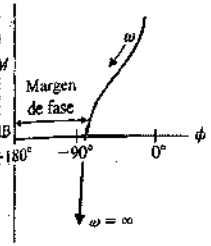
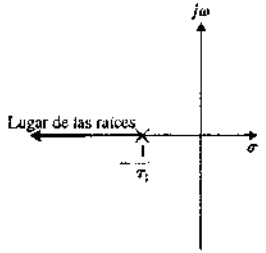
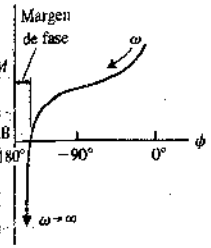
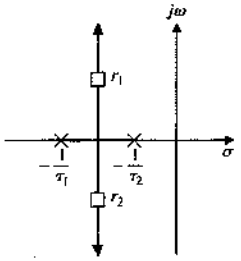
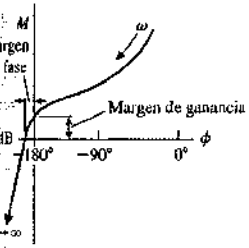
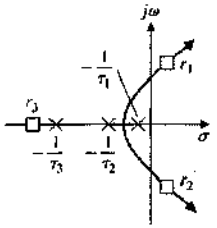
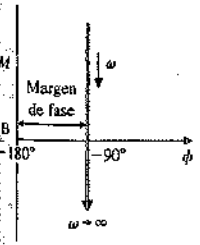
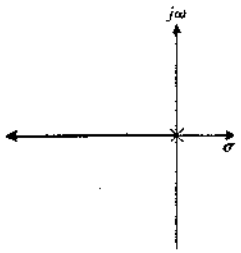
Diagrama de Nichols	Lugar de las raíces	Comentarios
		Estable; margen de ganancia = ∞
		Controlador elemental; estable, margen de ganancia = ∞
		Controlador con componente adicional de almacenamiento de energía; inestable, pero se puede estabilizar reduciendo la ganancia
		Integrador ideal; estable

Tabla 9-6 (Continuación)

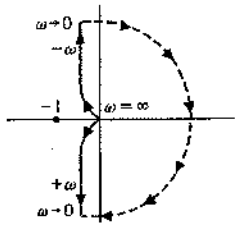
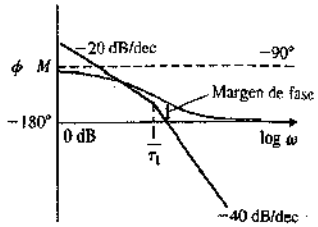
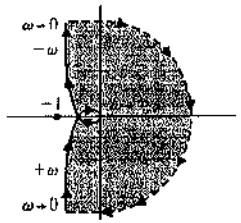
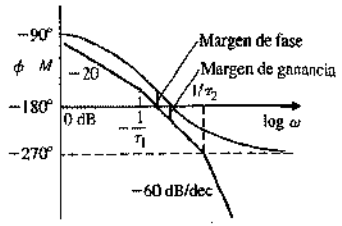
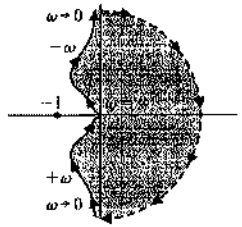
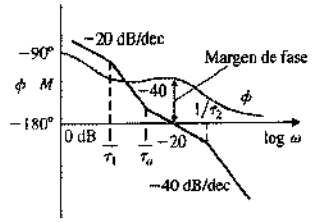
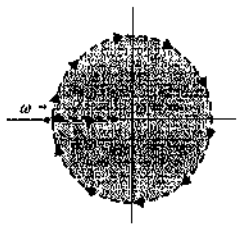
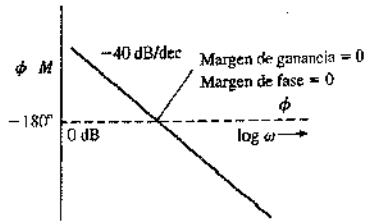
$G(s)$	Diagrama polar	Diagrama de Bode
5. $\dfrac{K}{s(s\tau_1+1)}$		
6. $\dfrac{K}{s(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$		
7. $\dfrac{K(s\tau_a+1)}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$		
8. $\dfrac{K}{s^2}$		

Tabla 9-6 (Continuación)

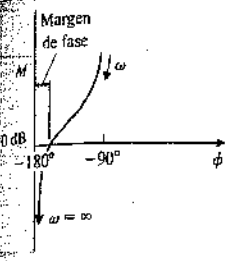
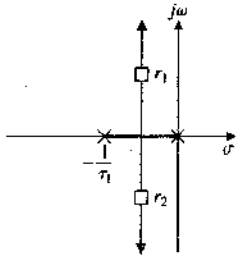
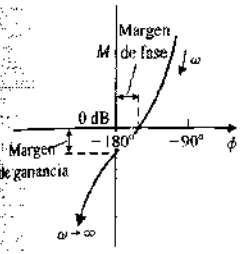
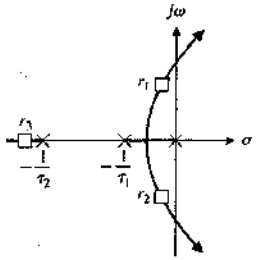
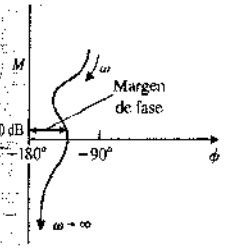
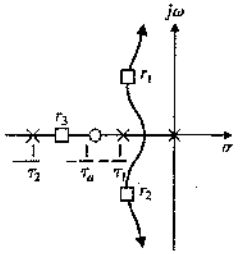
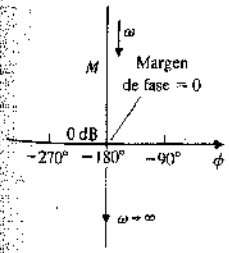
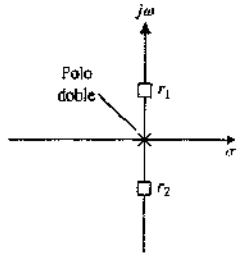
Diagrama de Nichols	Lugar de las raíces	Comentarios
		Servoinstrumento elemental; inherentemente estable; margen de ganancia = ∞
		Servoinstrumento con motor de control por campo o servopotencia con mando elemental Ward-Leonard; como se muestra es estable, pero se puede desestabilizar aumentando la ganancia
		Servoinstrumento elemental con controlador de adelanto de fase (derivativo); estable
		Inherentemente marginalmente estable; se debe compensar

Tabla 9.6 (Continuación)

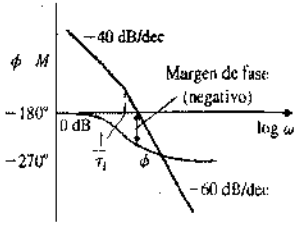
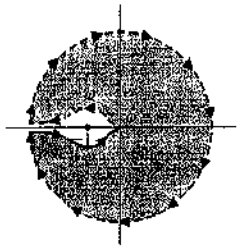
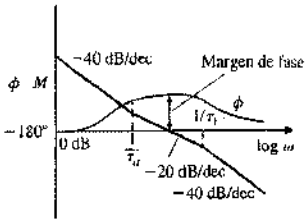
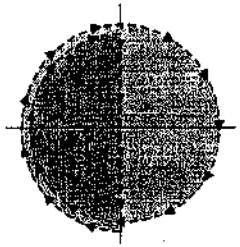
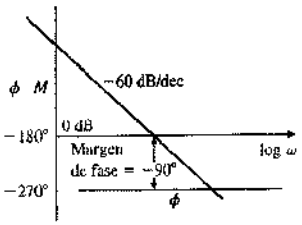
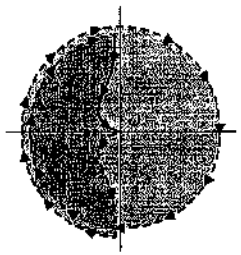
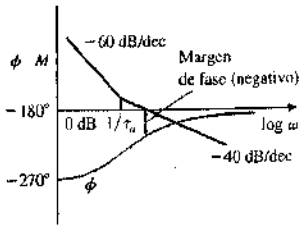
$G(s)$	Diagrama polar	Diagrama de Bode
9. $\dfrac{K}{s^2(s\tau_1+1)}$		
10. $\dfrac{K(s\tau_a+1)}{s^2(s\tau_1+1)}$ $\tau_a > \tau_1$		
11. $\dfrac{K}{s^3}$		
12. $\dfrac{K(s\tau_a+1)}{s^3}$		

Tabla 9.6 (Continuación)

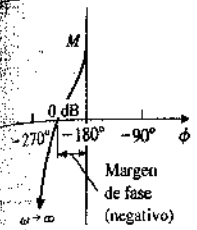
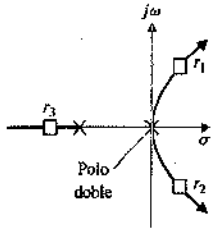
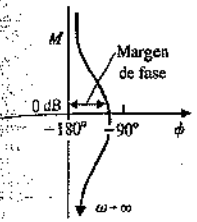
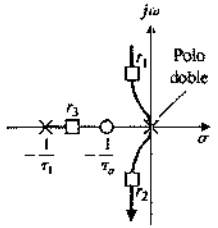
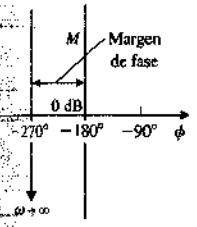
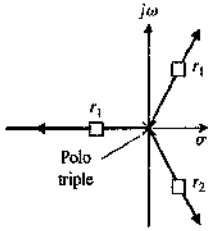
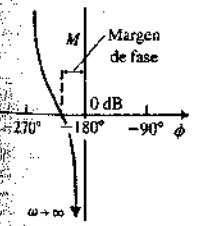
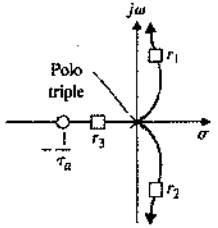
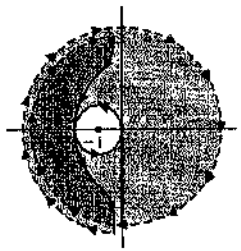
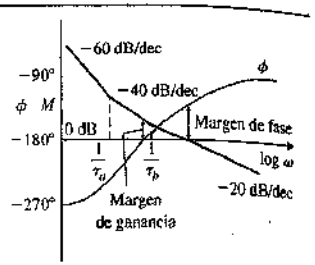
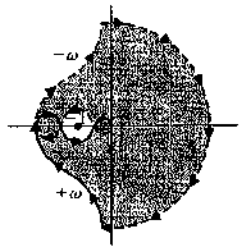
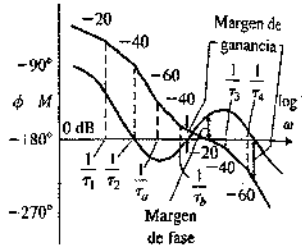
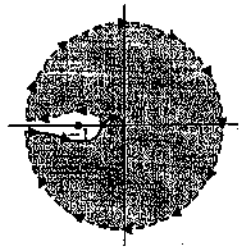
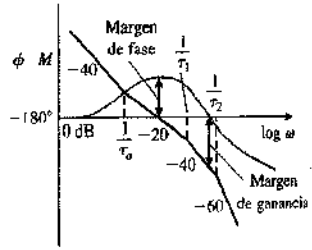
Diagrama de Nichols	Lugar de las raíces	Comentarios
		Inherentemente inestable; se debe compensar
		Estable para todas las ganancias
		Inherentemente inestable
		Inherentemente inestable

TABLA 9.5 *(continuación)*

$G(s)$	Diagrama polar	Diagrama de Bode
13. $\dfrac{K(s\tau_a + 1)(s\tau_b + 1)}{s^3}$		
14. $\dfrac{K(s\tau_a + 1)(s\tau_b + 1)}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)(s\tau_4 + 1)}$		
15. $\dfrac{K(s\tau_a + 1)}{s^2(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$		

EJERCICIOS

E9.1. Un sistema tiene una función de transferencia

$$G(s) = \frac{4(1 + s/3)}{s(1 + 2s)(1 + s/7 + s^2/49)}.$$

Dibujar el diagrama de Bode para el intervalo de frecuencia de 0.1 a 10. Demostrar que el margen de fase es aproximadamente de 30° y que el margen de ganancia es de unos 16 dB.

E9.2. Un sistema tiene una función de transferencia

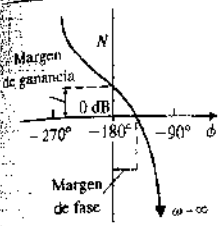
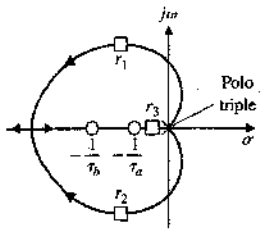
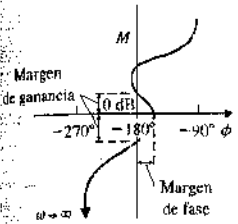
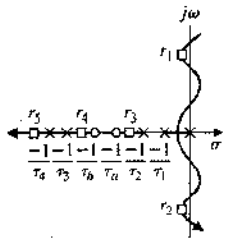
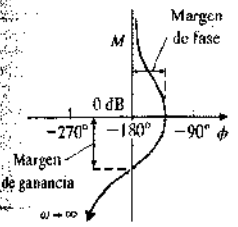
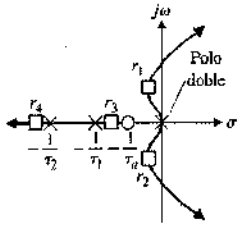
$$G(s) = \frac{K(1 + s/5)}{s(1 + s/2)(1 + s/10)},$$

donde $K = 6.14$. Demostrar que la frecuencia de cruce del sistema (0 dB) es de 3.5 rad/s y que el margen de fase es de 45°.

E9.3. Para regular el voltaje de salida de un suministro de energía, se dispone de un lazo integrado para utilizar como sistema de realimentación. En la Figura E9.3 se muestra el diagrama de Bode de la función de transferencia requerida del lazo, $GH(j\omega)$. Estimar los márgenes de ganancia y de fase del regulador.

Respuesta: $MG = 25$ dB, $MF = 75°$

TABLA 9.5 *(continuación)*

Diagrama de Nichols	Lugar de las raíces	Comentarios
		Condicionalmente estable; se hace inestable si la ganancia es demasiado baja
		Condicionalmente estable; estable a baja ganancia, se convierte en inestable cuando se aumente la ganancia, de nuevo se estabiliza si la ganancia se aumenta más y se convierte en inestable para ganancias muy elevadas
		Condicionalmente estable; se convierte en inestable para ganancias altas

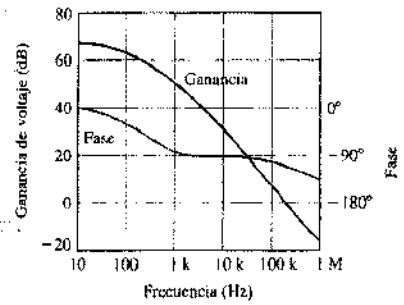


FIGURA E9.3. Potencia proporcionada por el regulador.

E9.4. Considerar un sistema con una función de transferencia de lazo

$$G(s) = \frac{100}{s(s + 10)},$$

donde $H(s) = 1$. Para el sistema de lazo cerrado, se desea obtener un pico de resonancia $M_{p_{\omega}} = 3.0$ dB. El pico ocurre entre 6 y 9 rad/s y es sólo de 1.25 dB. Dibujar la carta de Nichols para un intervalo de frecuencia de 6 a 15 rad/s. Demostrar que la ganancia del sistema ha de aumentarse de 4.6 dB a 171. Determinar la frecuencia de resonancia para el sistema ajustado.

Respuesta: $\omega_r = 11$ rad/s

E9.5. Un lazo digital integrado CMOS se puede representar por medio del diagrama de Bode que se muestra en la Figura E9.5. (a) Determinar los márgenes de ganancia y de fase del circuito. (b) Calcular cuánto sería necesario disminuir la ganancia del sistema (dB) para obtener un margen de fase de 60°.

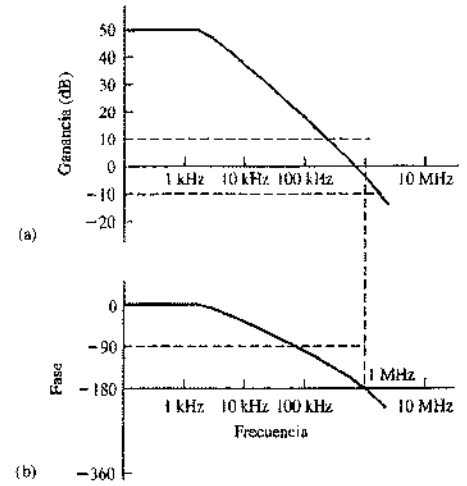


FIGURA E9.5. Circuito CMOS.

E9.6. Un sistema tiene una función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{K(s + 100)}{s(s + 10)(s + 40)}.$$

Cuando $K = 500$, el sistema es inestable. Si la ganancia se reduce a 50, demostrar que el pico de resonancia es de 3.5 dB. Hallar el margen de fase del sistema con $K = 50$.

E9.7. Un sistema con realimentación unidad tiene un proceso

$$G(s) = \frac{K}{(s - 1)}.$$

Utilizando el diagrama polar, determinar el rango de K para el que el sistema es estable.

E9.8. Considerar un sistema con realimentación unitaria con

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}.$$

(a) Para $K = 4$, demostrar que el margen de ganancia es de 3.5 dB.
(b) Si se desea alcanzar un margen de ganancia igual a 16 dB, determinar el valor de la ganancia K.

Respuesta: (b) $K = 0.98$

E9.9. Para el sistema del E9.8, averiguar el margen de fase para $K = 5$.

E9.10. Considerar el sistema de control del túnel de viento del Problema 7.31. Dibujar el diagrama de Bode y demostrar que el margen de fase es de 25° y el de ganancia es de 10 dB. Igualmente, demostrar que el ancho de banda del sistema de lazo cerrado es de 6 rad/s.

E9.11. Considerar un sistema con realimentación unidad con

$$G(s) = \frac{40(1 + 0.4s)}{s(1 + 2s)(1 + 0.24s + 0.04s^2)}.$$

(a) Dibujar el diagrama de Bode utilizando el programa MATLAB u otro equivalente. (b) Determinar el margen de ganancia y el margen de fase.

E9.12. Un sistema en lazo cerrado, como el que se muestra en la Figura 9.1, tiene $H(s) = 1$ y

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)},$$

donde $\tau_1 = 0.02$ y $\tau_2 = 0.2$ segundos. (a) Seleccionar una ganancia K de forma que el error en estado estacionario para una entrada rampa sea del 10% de la magnitud de la función rampa A, donde $r(t) = At$, $t \geq 0$. (b) Dibujar el diagrama de Bode de $G(s)$ y determinar los márgenes de fase y de ganancia. (c) Utilizando la carta de Nichols, determinar el ancho de banda ω_B, el pico de resonancia M_{P_w} y la frecuencia de resonancia ω_r del sistema en lazo cerrado.

Respuesta: (a) $K = 10$
(b) $MF = 32°$, $MG = 15$ dB
(c) $\omega_B = 10.3$, $M_{P_w} = 1.84$, $\omega_r = 6.5$

E9.13. Un sistema con realimentación unidad tiene un proceso

$$G(s) = \frac{150}{s(s + 5)}.$$

(a) Determinar la máxima magnitud de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado utilizando la carta de Nichols. (b) Calcular el ancho de banda y la frecuencia de resonancia de este sistema. (c) Utilizar las medidas en frecuencia para estimar la sobreelongación del sistema como respuesta a un escalón.

Respuesta: (a) 7.5 dB, (b) $\omega_B = 19$, $\omega_r = 12.6$

E9.14. En la Figura E9.14 se presenta una carta de Nichols para un sistema donde se dibuja $G(j\omega)$. Utilizando la tabla adjunta, determinar (a) el pico de resonancia M_{P_w} en dB; (b) la frecuencia de resonancia ω_r; (c) el ancho de banda de 3 dB y (d) el margen de fase de sistema.

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
rad/s	1	3	6	10

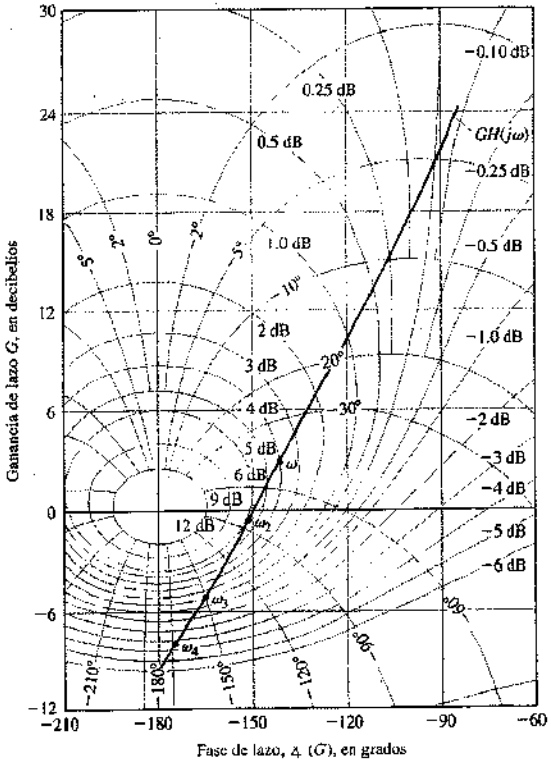


FIGURA E9.14
Carta de Nichols para $G(j\omega)$.

E9.15. Considerar un sistema con realimentación unidad con

$$G(s) = \frac{1000}{(s + 100)}.$$

Determinar el ancho de banda del sistema en lazo abierto y del sistema en lazo cerrado y comparar los resultados.

Respuesta: lazo abierto $\omega_B = 100$, lazo cerrado $\omega_B = 1100$

E9.16. El retardo temporal puro e^{-sT} se puede aproximar por una función de transferencia como

$$e^{-sT} \simeq \frac{(1 - Ts/2)}{(1 + Ts/2)}$$

Para $0 < \omega < 2/T$. Obtener el diagrama de Bode para la función de transferencia real y la aproximada para $T = 2$ y para $0 < \omega < 1$.

E9.17. Un sistema con realimentación unidad tiene una planta

$$G(s) = \frac{K(s + 2)}{s^3 + 2s^2 + 15s}.$$

(a) Dibujar el diagrama de Bode y (b) determinar la ganancia K que se requiere para obtener un margen de fase de 30°. ¿Cuál es el error en estado estacionario para una entrada rampa para la ganancia del apartado (b)?

E9.18. Un actuador para un controlador de disco utiliza un montaje amortiguador para absorber la energía vibratoria a 60 Hz aproximadamente [14]. En la Figura E9.18 se muestra el diagrama de Bode de $G(s)$ del sistema de control. (a) Determinar el tanto por ciento de sobreelongación esperado para una entrada escalón para el sistema en lazo cerrado; (b) estimar el ancho de banda del sistema en lazo cerrado, y (c) estimar el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) del sistema.

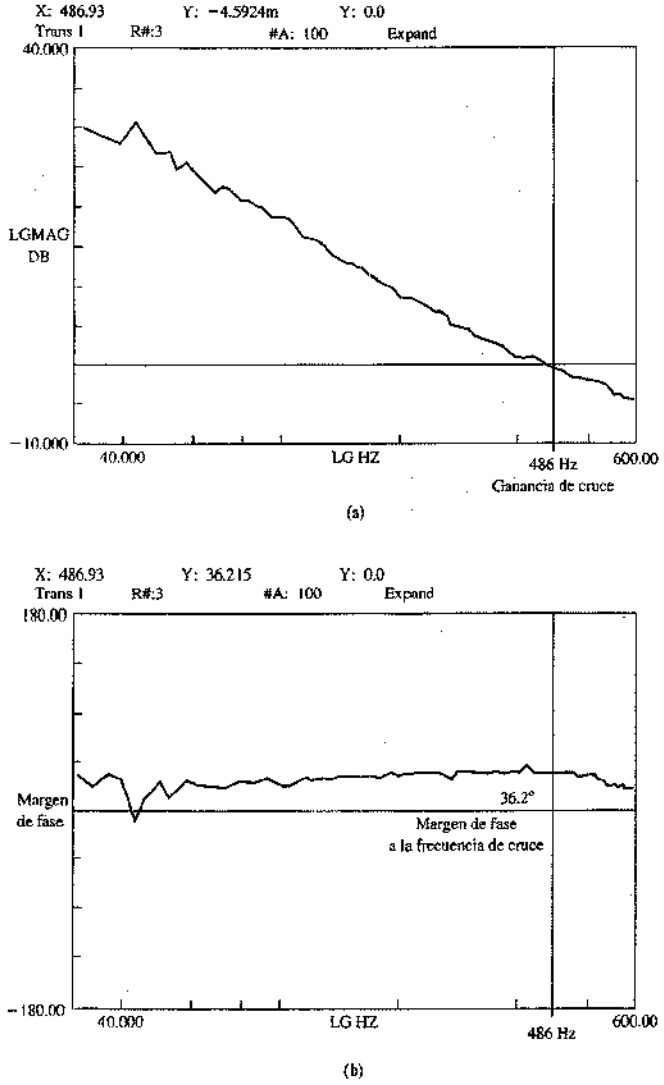


FIGURA E9.18
Diagrama de Bode del controlador de disco, $G(s)$.

E9.19. Un sistema con realimentación unidad con $G_c(s) = K$ tiene

$$G(s) = \frac{e^{-0.1s}}{(s + 10)}.$$

Seleccionar una ganancia K de forma que el margen de fase del sistema sea de 50°. Determinar el margen de fase para la ganancia seleccionada, K.

E9.20. Considerar un modelo simple de un conductor de automóvil que sigue a otro coche por un autopista a gran velocidad. El modelo que se muestra en la Figura E9.20 incorpora el tiempo de reacción del conductor, T. Un conductor tiene $T = 1$ segundo y otro tiene $T = 1.5$ segundos. Determinar el tiempo de respuesta, $y(t)$, de los sistemas para ambos conductores para un cambio en la señal de entrada, $R(s) = -1/s$, debido a la frenada del coche de delante.

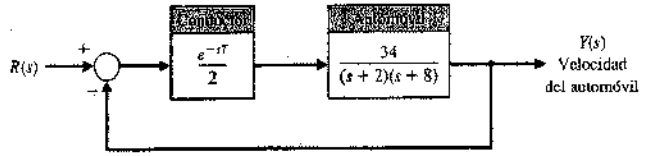


FIGURA E9.20

E9.21. Un sistema de control con realimentación unidad tiene una planta

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 2)(s + 50)}.$$

Determinar el margen de fase, la frecuencia de cruce y el margen de ganancia cuando $K = 1300$.

Respuestas: $MF = 16.6°$, $\omega_c = 4.9$, $MG = 4$ o 12 dB

E9.22. Un sistema de control con realimentación unidad tiene una planta

$$G(s) = \frac{K(s + 1)}{(s - 1)(s - 6)}.$$

(a) Utilizando el Diagrama de Bode para $K = 8$, determinar el margen de fase del sistema. (b) Seleccionar una ganancia K de forma que el margen de fase sea al menos de 45°.

E9.23. Considerar de nuevo el sistema del E9.21 cuando $K = 438$. Determinar el ancho de banda del sistema en lazo cerrado, la frecuencia de resonancia y $M_{p_{cl}}$ utilizando la carta de Nichols.

Respuestas: $\omega_B = 4.25$ rad/s, $\omega_r = 2.7$, $M_{p_{cl}} = 1.7$

E9.24. Un sistema de control con realimentación unidad tiene una planta

$$G(s) = \frac{K}{(-1 + \tau s)},$$

donde $K = 1/2$ y $\tau = 1$. El diagrama polar para $G(j\omega)$ se muestra en la Figura E9.24. Utilizando el criterio de Nyquist, determinar si el sistema es estable.

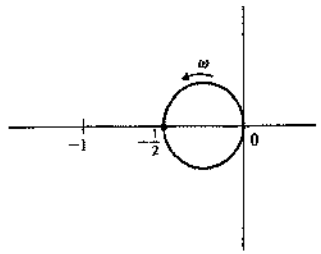


FIGURA E9.24

E9.25. Un sistema de control con realimentación unidad tiene una planta

$$G(s) = \frac{11.7}{s(1 + 0.05s)(1 + 0.1s)}.$$

Determinar el margen de fase y la frecuencia de cruce.

Respuestas: $MF = 27.7°$, $\omega_c = 8.31$ rad/s

E9.26. Para el sistema del E9.25 determinar, utilizando la carta de Nichols, $M_{p_{cl}}$, ω_r y ω_B para la respuesta en frecuencia en lazo cerrado.

E9.27. Un sistema de control con realimentación unidad tiene una planta

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 6)^2}.$$

Determinar la máxima ganancia, K, para la que el margen de fase es al menos de 40° y el margen de ganancia es al menos de 6 dB. ¿Cuáles son los márgenes de ganancia y de fase para este valor de K?

E9.28. Un sistema de control con realimentación unidad tiene una planta

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 0.2)}.$$

(a) Determinar el margen de fase del sistema cuando $K = 0.16$. (b) Utilizar el margen de fase para estimar ζ y predecir la sobreelongación. (c) Calcular la respuesta real para este sistema de segundo orden y comparar el resultado con lo estimado en el apartado (b).

E9.29. Una función de transferencia es

$$GH(s) = \frac{1}{s + 2}.$$

Utilizar el contorno en el plano s que se muestra en la Figura E9.29 para determinar el contorno correspondiente en el plano $F(s)$ ($B = -1 + j$).

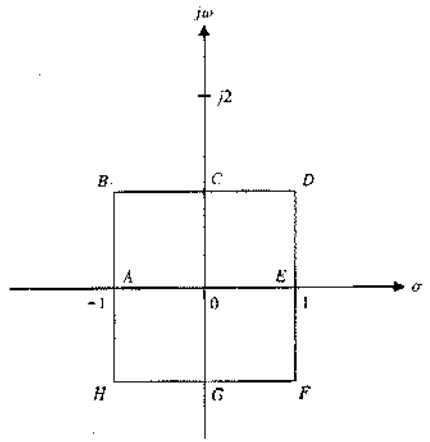


FIGURA E9.29

E9.30. Considerar el sistema cuya representación en variables de estado es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -100 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [1000 \quad 0] \text{ y } \mathbf{D} = [0].$$

Dibujar el diagrama de Bode.

E9.31. En la Figura E9.31 se muestra un sistema realimentado en lazo cerrado. Dibujar el diagrama de Bode y determinar el margen de fase.

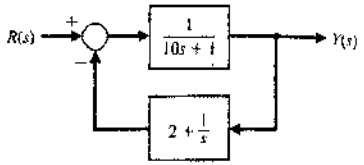


FIGURA E9.31. Sistema de realimentación no unitaria.

PROBLEMAS

P9.1. Con las gráficas polares del Problema P8.1, utilizar el criterio de Nyquist para investigar la estabilidad de los diferentes sistemas. En cada caso especificar los valores de N, P y Z.

P9.2. Dibujar los diagramas polares de las siguientes funciones de transferencia de lazo $GH(s)$ y, utilizando el criterio de Nyquist, determinar si el sistema es estable:

(a) $GH(s) = \dfrac{K}{s(s^2 + s + 4)}$.

(b) $GH(s) = \dfrac{K(s + 2)}{s^2(s + 4)}$.

Si el sistema es estable, hallar el valor máximo de K determinando el punto donde la gráfica polar cruza el eje u.

P9.3. (a) Hallar un contorno adecuado Γ_s en el plano s que pueda usarse para determinar si todas las raíces de la ecuación característica tienen razones de amortiguamiento mayores que ζ_1. (b) Hallar un contorno adecuado Γ_s en el plano s que pueda usarse para determinar si todas las raíces de la ecuación característica tienen partes reales menores que $s = -\sigma_1$. (c) Usando el contorno del apartado (b) y el teorema de Cauchy, determinar si la siguiente ecuación característica tiene raíces con partes reales menores que $s = -1$:

$$q(s) = s^3 + 11s^2 + 56s + 96.$$

P9.4. En la Figura P9.4 se muestra el diagrama polar de un sistema condicionalmente estable para una ganancia específica K. (a) Determinar si el sistema es estable y calcular el número de raíces (si existen) en la parte derecha del plano s. El sistema no tiene polos de $GH(s)$ en la parte derecha del plano. (b) Determinar si el sistema es estable si el punto -1 yace sobre el eje en la parte punteada.

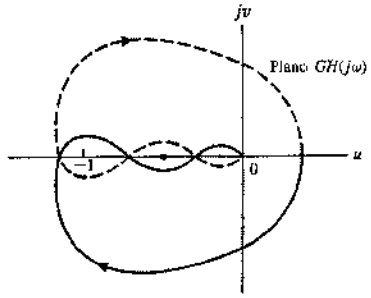


FIGURA P9.4. Diagrama polar para sistema condicionalmente estable.

P9.5. En la Figura P9.5 se muestra un control de velocidad para un motor de gasolina. Debido a la restricción en la entrada del carburador y la capacitancia de la reducción múltiple, se presenta el retraso τ, que es igual a 1 segundo. La constante de tiempo del motor τ_e es igual a $J/b = 3$ segundos. La medida de la constante de tiempo de la velocidad es $\tau_m = 0.4$ segundos. (a) Determinar la ganancia necesaria K si el error de velocidad en estado estacionario se requiere que sea menor que el 10% del asentamiento de la velocidad de referencia. (b) Con la ganancia determinada en la parte (a), utilizar el criterio de Nyquist para investigar la estabilidad del sistema. (c) Determinar el margen de fase y el de ganancia del sistema.

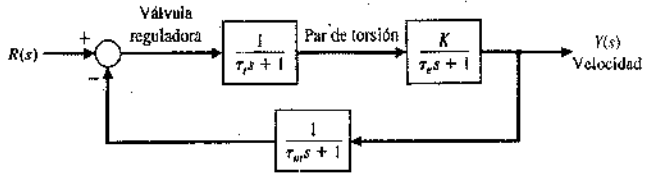


FIGURA P9.5
Control de velocidad de un motor.

P9.6. Un brazo de transmisión es una innovación mecánica en la que no se emplean reductores entre los motores y sus cargas. Como los rotores de los motores están acoplados directamente a las cargas, los sistemas de transmisión no tienen retroceso por vibración, y son de baja fricción y alta rigidez mecánica, todas ellas características importantes para un posicionamiento rápido y preciso, que se maneja con un complejo control del momento de torsión.

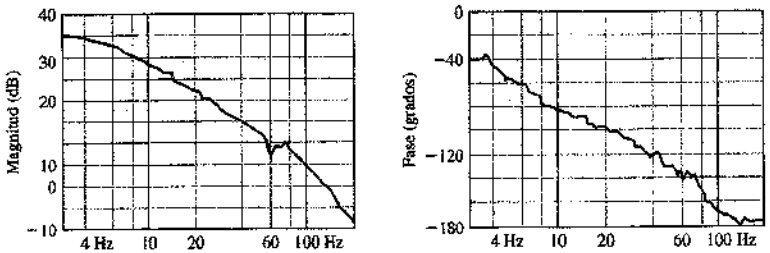
El objetivo del proyecto del brazo de transmisión directa del MIT es alcanzar en el brazo velocidades de 10 m/s [15]. El brazo tiene unos momentos de torsión de hasta 660 n-m (475 pies-libras). Cada motor tiene realimentación y un conjunto de sensores de velocidad y posicionamiento. En la Figura P9.6(a) se muestra el brazo, con uno de los motores visible. En la Figura P9.6(b) se muestra la respuesta de frecuencia de una articulación del brazo. Los dos polos aparecen en 3.7 Hz y 68 Hz. La Figura P9.6(b) muestra la respuesta de escalón cuando se emplea la realimentación en la velocidad y la posición. La constante de tiempo del sistema de lazo cerrado es de 82 ms. Desarrollar el diagrama de bloques del sistema de movimiento y demostrar que 82 ms es un resultado razonable.

P9.7. Un aeroplano de despegue vertical (VTOL) es un vehículo inherentemente inestable y requiere un sistema automático de estabilización. En la Figura P9.7 aparece el diseño, en forma de diagrama de bloques, para un sistema de estabilización de posición del aeroplano VTOL del ejército de Estados Unidos, el K-16B [16]. A 40 nudos, la dinámica del vehículo se representa aproximadamente por la función de transferencia

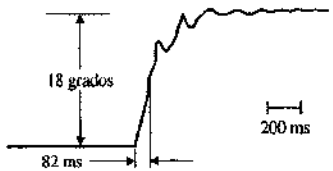
$$G(s) = \frac{10}{(s^2 + 0.36)}.$$

El actuador y el filtro se representan por la función de transferencia

$$G_1(s) = \frac{K_1(s + 7)}{(s + 3)}.$$



(a)



(b)

FIGURA P9.6
El brazo del MIT.
(a) Respuesta de frecuencia.
(b) Respuesta de posición.

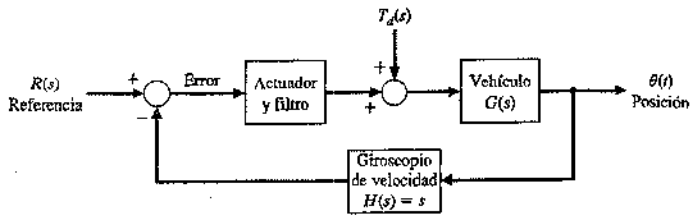
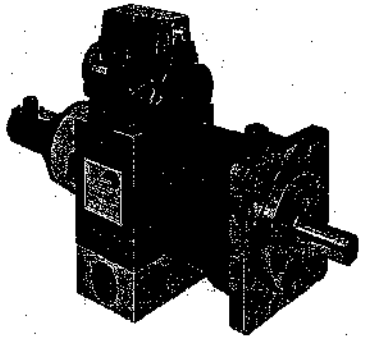


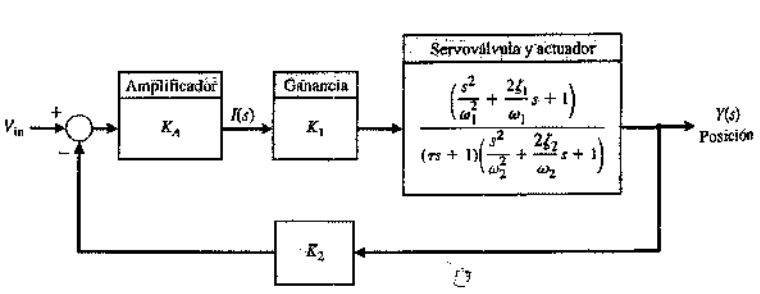
FIGURA P9.7
Sistema de estabilización de un aeroplano VTOL.

(a) Obtener el diagrama de Bode de la función de transferencia del lazo $G_1(s)G(s)H(s)$ cuando la ganancia es $K_1 = 2$. (b) Determinar el margen de ganancia y el de fase de este sistema. (c) Determinar el error en estado estacionario para un viento perturbador de $T(s) = 1/s$. (d) Determinar la amplitud máxima del pico de resonancia de la respuesta de frecuencia de lazo cerrado, así como la frecuencia de resonancia. (e) Calcular la relación de amortiguamiento del sistema a partir de $M_{p_{ul}}$ y el margen de fase.

P9.8. Los servomecanismos electrohidráulicos se utilizan en sistemas de control que requieren una respuesta rápida para una masa grande. Uno de estos servomecanismos puede proporcionar una salida de 100 kW o mayor [17]. En la Figura P9.8(a) se muestra una fotografía de una servoválvula y el actuador. El sensor de salida produce una medición de la posición del actuador, la cual se compara con V_{in}. El error se amplifica y controla la posición de la válvula hidráulica, y con ello se controla el flujo del fluido hacia el actuador. En la Figura P9.8(b) se muestra el diagrama de bloques de un servomecanismo electrohidráulico de lazo cerrado que emplea realimentación de presión para obtener el amortiguamiento [17, 18]. Los valores típicos para este sistema son $\tau = 0.02$ segundos y para el sistema hidráulico son $\omega_2 = 7(2\pi)$ y $\zeta_2 = 0.05$. La resonancia estructural ω_1 es igual a $10(2\pi)$ y el amortiguamiento es $\zeta_1 = 0.05$. La ganancia del lazo es $K_1K_2 = 1.0$. (a) Dibujar el diagrama de Bode y determinar el margen de fase del sistema. (b) El amortiguamiento del sistema puede aumentarse haciendo un pequeño agujero en el pistón, de forma que $\zeta_2 = 0.25$. Dibujar el diagrama de Bode y determinar el margen de fase de este sistema.



(a)



(b)

FIGURA P9.8
(a) Una servoválvula y actuador. (Cortesía de Moog, Inc., Industrial Division.)
(b) Diagrama de bloques.

P9.9. El transbordador espacial, que se muestra en la Figura P9.9(a), lleva grandes cargas al espacio y las devuelve a la Tierra para usarlas nuevamente [19]. El transbordador emplea aletas en el borde de salida de las alas y un freno sobre la cola para controlar el vuelo. En la Figura P9.9(b) se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de la relación de inclinación. El sensor se representa por una ganancia, $H(s) = 0.5$, y el vehículo por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{0.30(s + 0.05)(s^2 + 1600)}{(s^2 + 0.05s + 16)(s + 70)}.$$

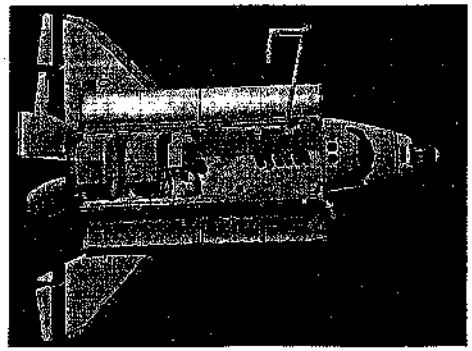
El controlador $G_c(s)$ puede ser una ganancia o cualquier función de transferencia adecuada. (a) Dibujar el diagrama de Bode del sistema cuando $G_c(s) = 2$ y determinar el margen de estabilidad. (b) Dibujar el diagrama de Bode del sistema cuando

$$G_c(s) = K_1 + K_2/s \quad \text{y} \quad K_2/K_1 = 0.5.$$

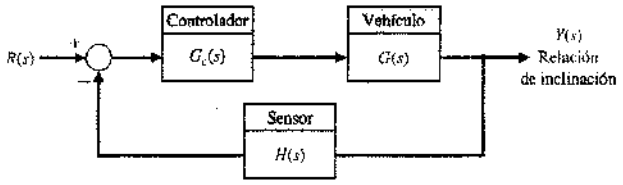
Se deberá seleccionar la ganancia K_1 de forma que el margen de ganancia sea de 10 dB.

P9.10. Las máquinas herramientas a menudo se controlan automáticamente mediante un lector de cinta perforada, como se muestra en la Figura P9.10. Estos sistemas automáticos frecuentemente se conocen como controles mecánicos numéricos [9]. Considerando un eje, la posición deseada de la máquina herramienta se compara con la posición real y se usa para activar un solenoide y el eje de un actuador hidráulico. La función de transferencia del actuador (*véase* la Tabla 2.7) es

$$G_a(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{K_a}{s(\tau_a s + 1)}.$$



(a)



(b)

FIGURA P9.9. (a) El transbordador espacial orbitando la Tierra sobre el fondo oscuro del espacio. En esta vista desde arriba tomada por satélite se aprecian el manipulador robótico remoto y las puertas de la bodega de carga abiertas. (b) Sistema de control de la relación de inclinación. (Por cortesía de la NASA.)

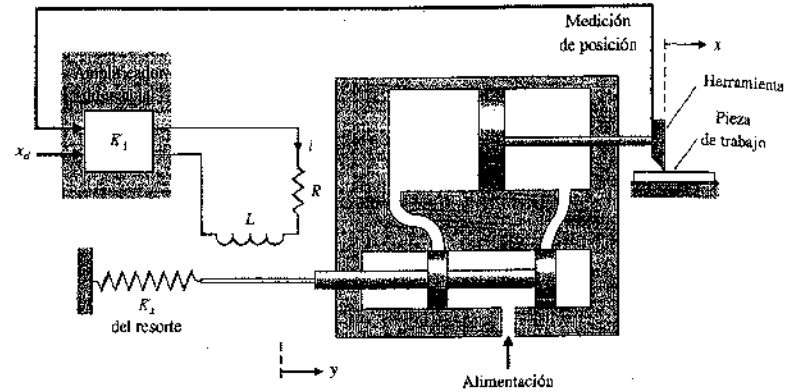


FIGURA P9.10
Control de máquina de herramientas.

donde $K_a = 1$ y $\tau_a = 0.4$ segundos. El voltaje de salida del amplificador diferencial es

$$E_0(s) = K_1(X(s) - X_d(s)),$$

donde $x_d(t)$ es la entrada deseada según el lector de cinta. La fuerza sobre el eje es proporcional a la corriente i, de tal forma que $F = K_2 i(t)$, donde $K_2 = 3.0$. La constante del resorte K_1 es igual a 1.5, $R = 0.1$ y $L = 0.2$.

(a) Determinar la ganancia K_1 que dé como resultado un sistema con un margen de fase de 30°. (b) Para la ganancia K_1 de la parte (a), determinar M_{p_ω}, ω_r y el ancho de banda del sistema de lazo cerrado. (c) Calcular la sobreelongación porcentual de la respuesta transitoria para una entrada de escalón, $X_d(s) = 1/s$ y el tiempo de asentamiento (dentro del 2% del valor final).

P9.11. En la Figura P9.11 se muestra un sistema de control para una concentración química. El sistema recibe una

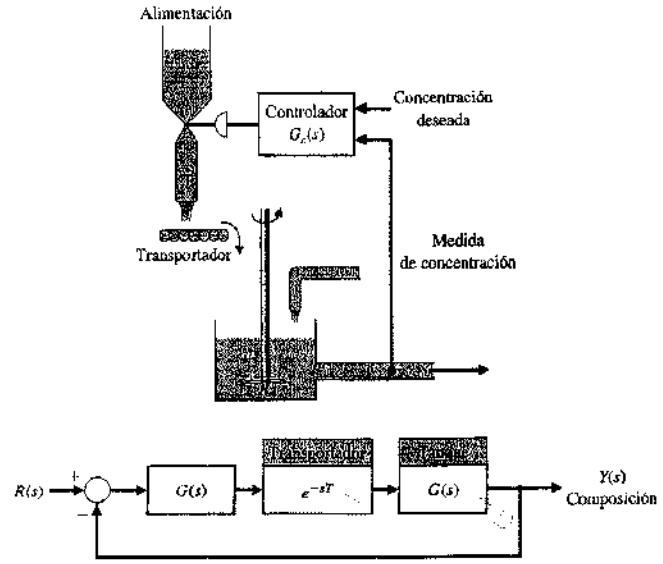


FIGURA P9.11
Sistema de control para una concentración química.

alimentación granular de composición variable; se desea mantener una composición constante de la mezcla de salida ajustando la válvula del flujo de alimentación. La función de transferencia del depósito y la válvula de salida es

$$G(s) = \frac{5}{5s + 1},$$

y el regulador es

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}.$$

El paso de la alimentación por el transportador requiere un tiempo de transporte (o retardo), $T = 1.5$ segundos. (a) Dibujar el diagrama de Bode cuando $K_1 = K_2 = 1$ e investigar la estabilidad del sistema. (b) Trazar el diagrama de Bode cuando $K_1 = 0.1$ y $K_2 = 0.04$ e investigar la estabilidad del sistema. (c) Cuando $K_1 = 0$, utilizar el criterio de Nyquist para calcular la ganancia máxima permisible K_2 para que el sistema permanezca estable.

P9.12. En la Figura P9.12 se muestra un modelo simplificado del sistema de control para regular la abertura de la pupila del ojo humano [20]. La ganancia K representa la ganancia de la pupila y τ es la constante de tiempo de la pupila, que es de 0.6 segundos. El retardo temporal T es igual a 0.15 segundos. La ganancia de la pupila es igual a 3.8.
(a) Suponiendo que el retardo temporal es despreciable, dibujar el diagrama de Bode para el sistema. Determinar el margen de fase del sistema. (b) Incluir el efecto del retardo temporal sumando el cambio de fase debido a dicho retardo. Determinar el margen de fase del sistema con el retardo del tiempo incluido.

P9.13. A fin de controlar la temperatura de un molde para la fabricación de componentes plásticos, se emplea un regulador como el de la Figura P9.13. Se estima que el valor del retardo temporal es de 1.2 segundos. (a) Empleando el criterio de Nyquist, determinar la estabilidad del sistema para $K = K_a = 1$. (b) Determinar un valor adecuado de K_a para obtener un sistema estable que consiga un margen de fase mayor que 50° cuando $K = 1$.

P9.14. Tanto la electrónica como los computadores se están utilizando para controlar automóviles. La Figura P9.14 es un ejemplo de un sistema de control de un automóvil, el control de dirección para el automóvil. La palanca de control se utiliza para dirigir. Un conductor normal tiene un tiempo de reacción de $T = 0.2$ segundos.

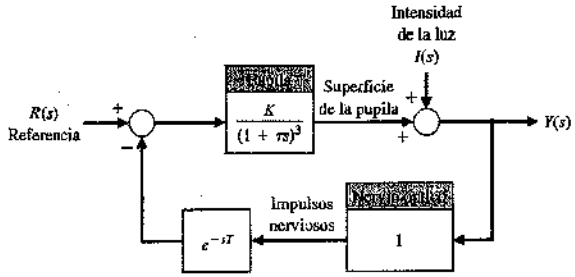


FIGURA P9.12
Control de la apertura de la pupila humana.

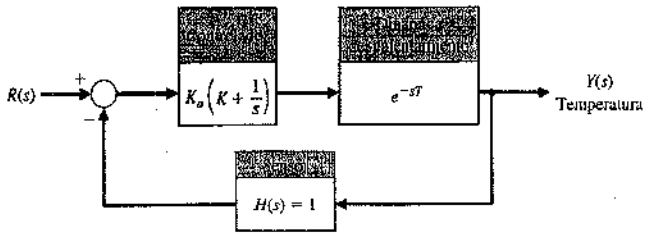


FIGURA P9.13
Controlador de temperatura.

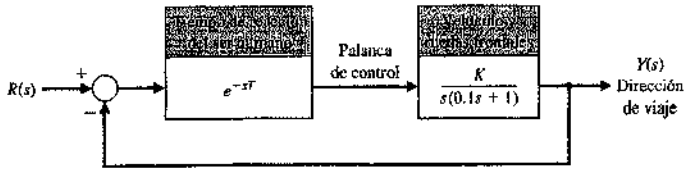


FIGURA P9.14
Control de la dirección de un automóvil.

(a) Utilizando la carta de Nichols, determinar la magnitud de la ganancia K que dé como resultado un sistema lazo cerrado con una magnitud pico de la respuesta de frecuencia $M_{p_{cl}}$ de lazo cerrado menor o igual que 2 dB.
(b) Calcular la razón de amortiguamiento del sistema basándose en (1) $M_{p_{cl}}$ y (2) el margen de fase. Comparar los resultados y explicar la diferencia, si la hay.
(c) Determinar el ancho de banda del sistema en 3 dB de lazo cerrado.

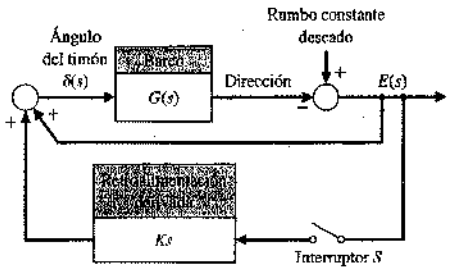
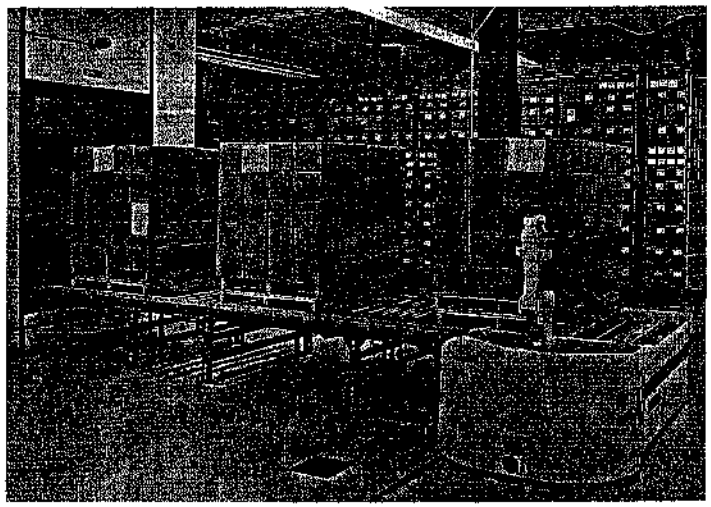


FIGURA P9.15. Controlador de temperatura.

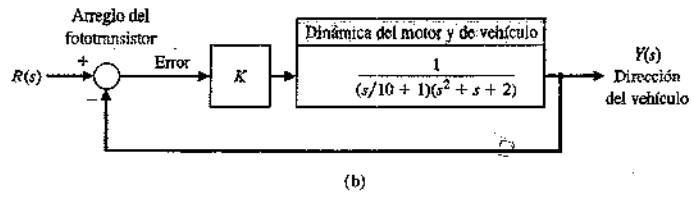
P9.15. Considerar el sistema de dirección automática del barco del Problema P8.11. La respuesta en frecuencia de la parte de lazo abierto en el sistema de control de dirección del barco se muestra en la Figura P8.11. La desviación del barco respecto a la trayectoria recta se mide por medio del radar y se usa para generar la señal de error, como se muestra en la Figura P9.15. Esta señal de error se usa para controlar el ángulo del timón $\delta(s)$.

(a) ¿Es éste un sistema estable? Analizar, en términos de la respuesta transitoria del sistema, lo que indica un sistema inestable de dirección de un barco. Recordar que el sistema considerado es un barco que trata de seguir un rumbo recto.
(b) ¿Es posible estabilizar este sistema bajando la ganancia de la función de transferencia $G(s)$?
(c) ¿Es posible estabilizar este sistema? ¿Se puede sugerir un compensador de realimentación adecuado?
(d) Repetir los apartados (a), (b) y (c) para el caso en que se cierra el interruptor S.

P9.16. En la Figura P9.16(a) se muestra un transportador eléctrico que sigue automáticamente una banda tendida sobre el piso de una fábrica [15]. Para controlar la conducción y la velocidad del vehículo, se emplean sistemas con realimentación en lazo cerrado. Por medio de un arreglo de 16 fototransistores, el vehículo es sensible a la trayectoria de la cinta. En la Figura P9.16(b) se muestra el diagrama de bloques del sistema de dirección. Seleccionar una ganancia K de manera que el margen de fase sea aproximadamente de 30°.



(a)



(b)

FIGURA P9.16
(a) Vehículo transportador eléctrico. (Fotografía por cortesía de Control Engineering Corporation.)
(b) Diagrama de bloques.

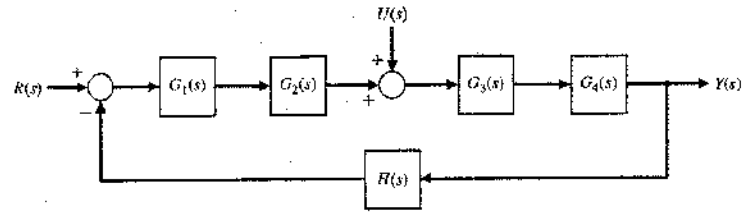


FIGURA P9.17
Control de reactor químico.

P9.17. El objetivo principal de muchos sistemas de control es mantener la variable de salida en la condición deseada o de referencia cuando el sistema está sujeto a una perturbación [23]. En la Figura P9.17 se muestra el esquema de control de un reactor químico estándar. La perturbación se representa por $U(s)$ y el proceso químico por G_3 y G_4. El controlador se representa por G_1 y la válvula por G_2. El sensor de realimentación es $H(s)$ y se supondrá igual a uno. Se supondrá también que G_2, G_3 y G_4 son de la forma

$$G_i(s) = \frac{K_i}{1 + \tau_i s}$$

donde $\tau_3 = \tau_4 = 4$ segundos y $K_3 = K_4 = 0.1$. Las constantes de la válvula son $K_2 = 20$ y $\tau_2 = 0.5$ segundos. Se desea mantener un error en estado estacionario menor que el 5% de la posición de referencia deseada.

(a) Cuando $G_1(s) = K_1$, calcular la ganancia necesaria para satisfacer el requisito de la constante de error. Para esta condición, determinar la sobreelongación esperada para un cambio de escalón en la señal de referencia $r(t)$.
(b) Si el regulador tiene un término proporcional más un término integral, de forma que $G_1(s) = K_1(1 + 1/s)$, determinar una ganancia adecuada para producir un sistema con una sobreelongación menor que el 30%, pero mayor que el 5%. Para los apartados (a) y (b), utilizar la aproximación de la razón de amortiguamiento en función del margen de fase que produzca $\zeta = 0.01\phi_{m_f}$. Para estos cálculos, supóngase que $U(s) = 0$.
(c) Calcular el tiempo de estabilización de la respuesta de escalón del sistema para el controlador de los apartados (a) y (b).
(d) Se espera que el sistema esté sujeto a una perturbación de escalón $U(s) = A/s$. Por facilidad, suponer que cuando el sistema se ha estabilizado, la referencia deseada es $r(t) = 0$. Determinar la respuesta del sistema del apartado (b) para la perturbación.

P9.18. En la Figura P9.18 se muestra un modelo de un conductor de automóvil que intenta seguir una trayectoria, donde $K = 5.3$. (a) Determinar la respuesta en frecuencia y los márgenes de ganancia cuando el tiempo de reacción T es cero. (b) Determinar el margen de fase cuando el tiempo de reacción es 0.1 segundos. (c) Determinar el tiempo de reacción que hará que el sistema esté en la frontera de estabilidad (margen de fase = 0°).

P9.19. En Estados Unidos se gastan anualmente más de 5 billones de dólares en la recolección y el tratamiento de desechos sólidos. En la Figura P9.19 se muestra un sistema que emplea un brazo de recolección de control remoto para recoger bolsas de basura. La función de transferencia de lazo abierto del brazo recolector remoto es

$$GH(s) = \frac{0.5}{s(5s + 1)(s + 2)}$$

(a) Dibujar la carta de Nichols y demostrar que el margen de ganancia es aproximadamente de 19 dB. (b) Determinar el margen de fase y la $M_{p_{cl}}$ para el lazo cerrado, así como el ancho de banda.

P9.20. El Bell-Boeing V-22 Osprey Tiltrotor es a la vez un avión y un helicóptero. Su ventaja es la posibilidad que tiene de poder rotar sus motores 90° desde una posición vertical, tal y como se muestra en la Figura P7.33(a), en los despegues y aterrizajes y después cambiar los motores a posición horizontal para los cruceros como avión. En la Figura P9.20 se muestra el sistema de control de altitud en modo helicóptero.

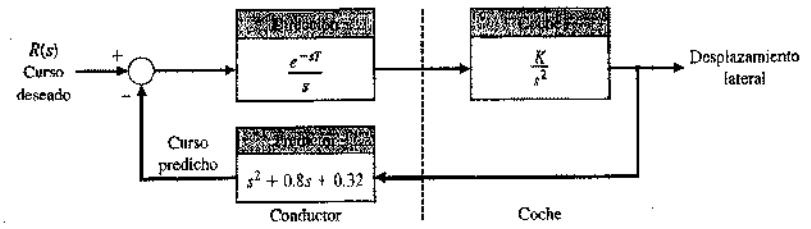


FIGURA P9.18
Control de automóvil y conductor.

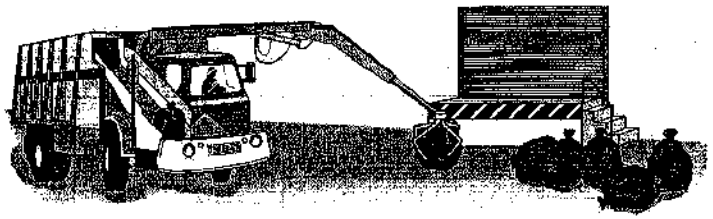


FIGURA P9.19
Sistema de recolección de bolsas de basura.

(a) Obtener la respuesta en frecuencia del sistema para $K = 100$. (b) Determinar el margen de ganancia y el margen de fase para este sistema. (c) Seleccionar una ganancia apropiada K de forma que el margen de fase sea de 40°. (Disminuir la ganancia desde $K = 100$). (d) Determinar la respuesta $y(t)$ del sistema para la ganancia seleccionada en el apartado (c).

P9.21. Considerar un sistema de realimentación unidad con

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}.$$

(a) Dibujar el diagrama de Bode para $K = 4$. Determinar (b) el margen de ganancia, (c) el valor de K requerido para proporcionar un margen de ganancia igual a 12 dB, y (d) el valor de K que consiga un error en estado estacionario del 25% de la magnitud A para una entrada rampa, $r(t) = At$, $t > 0$. ¿Puede lograrse con esta ganancia un comportamiento aceptable?

P9.22. En la Figura P9.22 se muestra el diagrama de Nichols para $GH(j\omega)$ de un sistema en lazo cerrado. La frecuencia en cada punto de la gráfica es la que se indica en la tabla siguiente:

Puntos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ω	1	2.0	2.6	3.4	4.2	5.2	6.0	7.0	8.0

Determinar (a) la frecuencia de resonancia, (b) el ancho de banda, (c) el margen de fase y (d) el margen de ganancia. (e) Estimar la sobreelongación y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de la respuesta a una entrada escalón.

P9.23. Un sistema en lazo cerrado tiene una función de transferencia de lazo

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+3)}.$$

(a) Determinar la ganancia K de forma que el margen de fase sea de 60°. (b) Para la ganancia seleccionada en el apartado (a), determinar el margen de ganancia del sistema.

P9.24. Un sistema en lazo cerrado con realimentación unidad tiene una función de transferencia de lazo

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+20)}{s^2}.$$

(a) Determinar la ganancia K de forma que el margen de fase sea de 45°. (b) Para la ganancia K seleccionada en el apartado (a), determinar el margen de ganancia. (c) Predecir el ancho de banda del sistema en lazo cerrado.

P9.25. Un sistema en lazo cerrado tiene una función de transferencia de lazo

$$GH(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s}.$$

(a) Determinar la ganancia K de forma que el margen de fase sea de 60° cuando $T = 0.2$. (b) Dibujar el margen de fase frente al tiempo de retardo T para la K calculada en el apartado (a).

P9.26. Una tienda de maquinaria especializada está mejorando la eficiencia de su proceso de pulido de superficies [22]. La máquina existente está en perfecto estado de funcionamiento pero opera manualmente. Automatizar la máquina liberaría al operador de otras tareas y así incrementaría la producción total de la tienda de maquinaria. En la Figura P9.26(a) se muestra la pulidora con los tres ejes automatizados con motores y sistemas realimentados. En la Figura P9.26(b) se muestra el sistema de control para el eje y. Para lograr un error en estado estacionario pequeño frente a una entrada rampa, se selecciona $K = 10$. Dibujar el diagrama de Bode del sistema en lazo abierto y obtener el dibujo de la carta de Nichols. Determinar los márgenes de ganancia y de fase del sistema y el ancho de banda del sistema en lazo cerrado. Estimar la ζ del sistema y determinar la sobreelongación y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%).

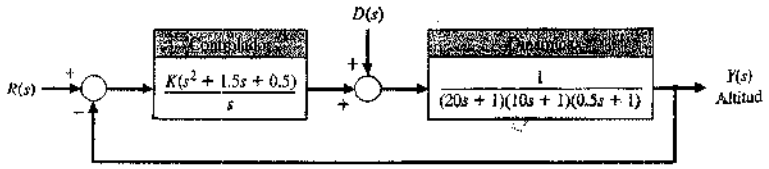


FIGURA P9.20
Control de un avión Tiltrotor.

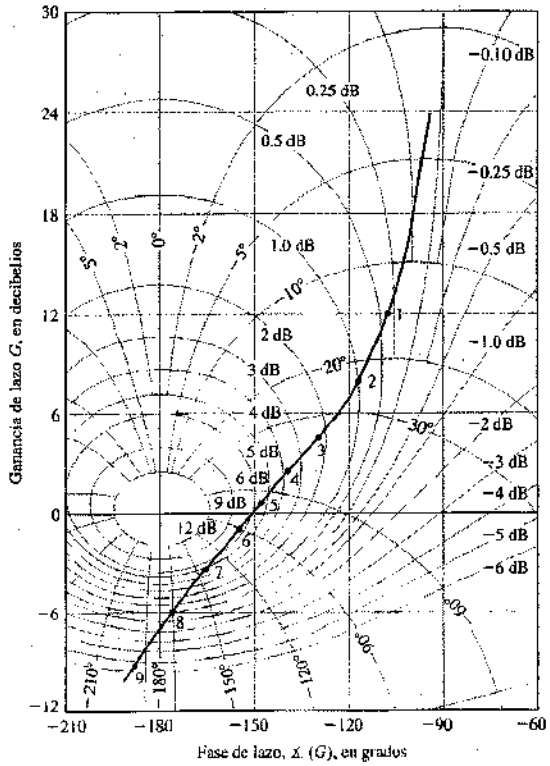


FIGURA P9.22
Carta de Nichols.

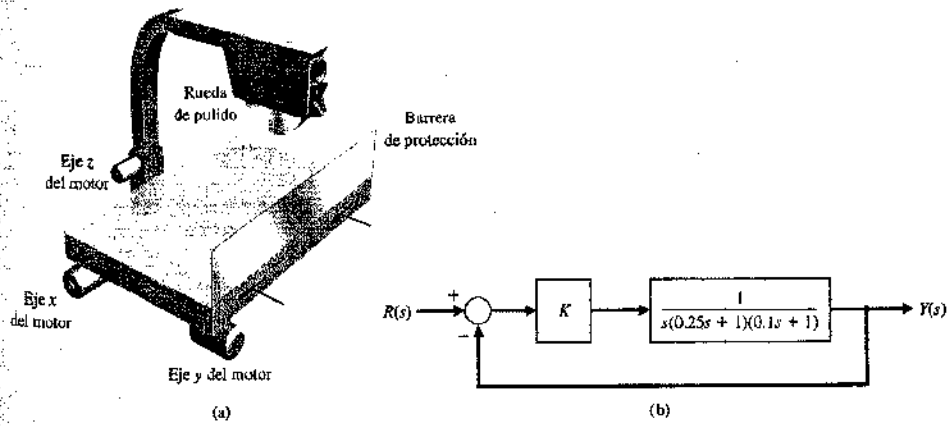


FIGURA P9.26. Sistema de control de pulido de superficies.

PROBLEMAS AVANZADOS

PA9.1. Las naves espaciales sufren cambios considerables de propiedades y configuración de su masa durante el tiempo de vida en el que están operativas [26]. Por ejemplo, las inercias cambian considerablemente durante las operaciones. Considerar el sistema de control de orientación que se muestra en la Figura PA9.1.

(a) Dibujar el diagrama de Bode y determinar los márgenes de ganancia y de fase cuando $M_{p_{cl}} = 15.267$. (b) Repetir el apartado (a) cuando $M_{p_{cl}} = 9500$. Obsérvese el efecto de cambiar $M_{p_{cl}}$ por 38%.

PA9.2. La anestesia se utiliza en la cirugía para inducir inconsciencia. Un problema con la inconsciencia producida es las diferencias grandes en las repuestas de los distintos pacientes. Además, la respuesta del paciente cambia durante una operación. En la Figura PA9.2 se muestra un modelo del control de la anestesia inducida. El indicador de la inconsciencia es la presión arterial de la sangre.

(a) Dibujar el diagrama de Bode y determinar el margen de ganancia y el margen de fase cuando $T = 0.05$ segundos. (b) Repetir el apartado (a) cuando $T = 0.1$ segundos. Describir el efecto de un aumento del 100% del tiempo de retardo T. (c) Utilizando el margen de fase, predecir la sobreelongación para una entrada escalón para los apartados (a) y (b).

PA9.3. Los procesos de soldadura se han automatizado en las décadas pasadas. Las características de calidad de la soldadura, tales como la metalurgia final y la mecánica de juntas, normalmente no son medibles para el control directo. Por lo tanto, es necesaria alguna forma indirecta de controlar la calidad de la soldadura. Un enfoque completo del proceso de control de la soldadura incluye tanto aspectos geométricos de la perla (tales como las características de la sección transversal de anchura, profundidad y altura) como aspectos térmicos (tales como el ancho de la zona afectada por el calentamiento y la velocidad de enfriamiento). La profundidad de la perla de la soldadura, que es un atributo geométrico clave de la

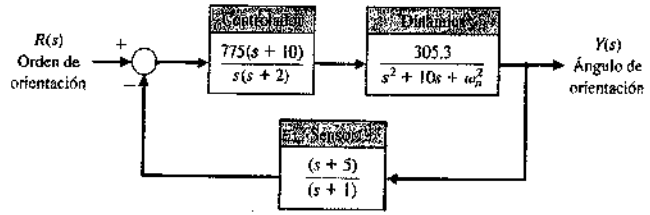


FIGURA PA9.1
Sistema de control de orientación de naves espaciales.

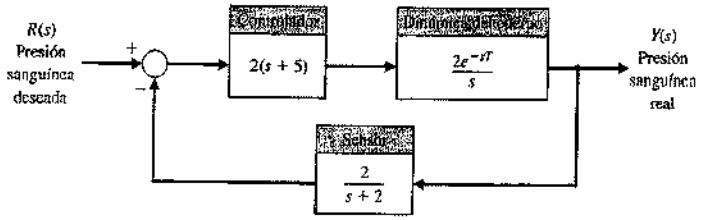


FIGURA PA9.2
Control de la presión sanguínea mediante anestesia.

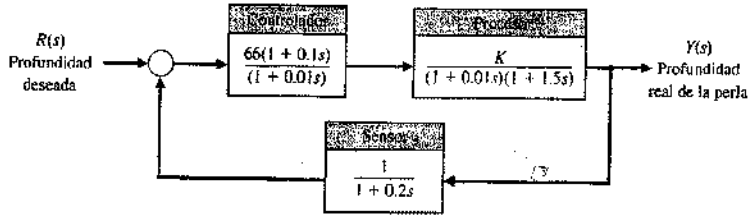


FIGURA PA9.3
Sistema de control de soldadura.

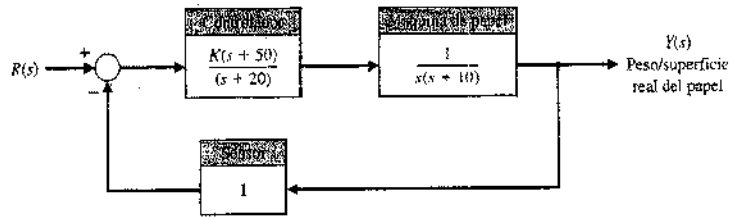


FIGURA PA9.4
Máquina de control papelera.

mayoría de los tipos de soldaduras, es muy difícil de medir directamente, pero se ha desarrollado un método para estimar la profundidad utilizando medidas de temperatura [27]. En la Figura PA9.3 se muestra un modelo de sistema de control de la soldadura.

(a) Determinar el margen de fase y el margen de ganancia para el sistema cuando $K = 1$. (b) Repetir el apartado (a) cuando $K = 1.5$. (c) Determinar el ancho de banda del sistema para $K = 1$ y $K = 1.5$ utilizando la carta de Nichols. (d) Estimar el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) como respuesta a un escalón para $K = 1$ y $K = 1.5$.

PA9.4. El control de una máquina papelera es bastante complejo [28]. El objetivo consiste en depositar la cantidad adecuada de suspensión de fibra (pulpa) a la velocidad adecuada y de manera uniforme. Después tienen lugar en este orden los siguientes procesos: eliminación del agua, deposición de la fibra, taminación y secado. El control del peso de papel por unidad de superficie es muy importante. Para el sistema de control que se muestra en la Figura PA9.4, seleccionar K de manera que el margen de fase $\geq 40°$ y el margen de ganancia ≥ 10 dB. Dibujar la respuesta frente a un escalón para la ganancia seleccionada. Determinar el ancho de banda del sistema en lazo cerrado.

PA9.5. La NASA está planeando muchas misiones en Marte con vehículos todoterreno. Un todoterreno típico es un vehículo accionado por energía solar que verá adónde se dirige mediante cámaras de TV y que medirá las distancias a objetos utilizando telémetros láser. Podrá escalar pendientes de 30° sobre tierra seca y portará un espectrómetro que pueda determinar la composición química de la superficie de las rocas. Se controlará de forma remota desde la Tierra.

Para el modelo de sistema de control de posición que se muestra en la Figura PA9.5, determinar la ganancia K que maximiza el margen de fase. Determinar la sobreelongación para una entrada escalón con la ganancia seleccionada.

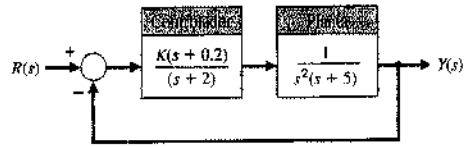


FIGURA PA9.5

PA9.6. La acidez del agua que se filtra en una mina de carbón a menudo se controla añadiendo óxido de calcio al agua. Una válvula controla la cantidad de óxido de calcio que se añade y un sensor se coloca corriente abajo. Para el modelo del sistema que se muestra en la Figura PA9.6, determinar K y la distancia D para mantener la estabilidad. Se requiere $D > 2$ para que se produzca una mezcla completa antes de la medida.

PA9.7. La construcción de ascensores está limitada a 800 metros. Para alturas superiores, los cables del ascensor resultan demasiado gruesos y demasiado pesados para su uso práctico. Una solución consiste en eliminar el cable. La clave para los ascensores sin cable consiste en la tecnología de motores lineales que se está aplicando en el desarrollo de sistemas de transporte que levitan magnéticamente. Se considera un motor síncrono lineal que propulsa a un coche de pasajeros a lo largo de un montante de guía que se dispone en

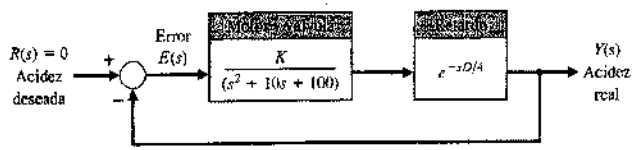


FIGURA PA9.6
Control de la acidez del agua de una mina.

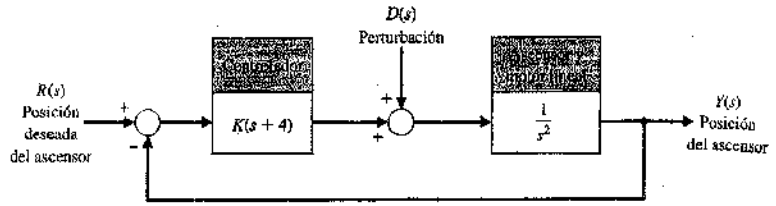


FIGURA PA9.7
Control de posición de un ascensor.

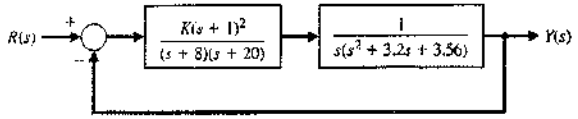


FIGURA PA9.8
Selección de ganancia.

toda la longitud del eje del ascensor. El motor funciona por interacción de un campo electromagnético de las corrientes eléctricas de las vías con los magnéticos sobre el coche [29].

Si se supone que el motor tiene fricción despreciable, el sistema se puede representar mediante el modelo que se muestra en la Figura PA9.7. Determinar K de forma que el margen de fase del sistema sea de 45°. Determinar el ancho de banda para la ganancia K seleccionada. Calcular también el máximo valor de la salida frente a una perturbación escalón unidad para la ganancia seleccionada.

PA9.8. En la Figura PA9.8 se muestra un sistema de control. La ganancia K es mayor que 500 y menor que 3000. Seleccionar una ganancia que haga que la respuesta a un escalón tenga una sobreelongación menor que el 18%. Dibujar el diagrama de Nichols y calcular el margen de fase.

PA9.9. Considérese de nuevo el sistema de la Figura PA7.13 que utiliza un controlador PI. Suponiendo

$$\frac{K_I}{K_P} = 0.2,$$

determinar la ganancia K_P que proporciona el margen de fase máximo.

PROBLEMAS DE DISEÑO

PDC9.1. El sistema de la Figura PDC4.1 utiliza un controlador $G_c(s) = K_p$. Determinar el valor de K_p de forma que el margen de fase sea de 70°. Determinar la respuesta de este sistema frente a una entrada escalón.

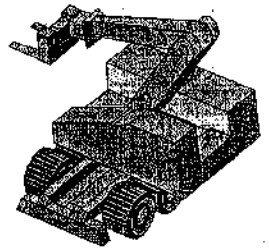
PD9.1. En la Figura PD9.1(a) se muestra un robot móvil para la limpieza de residuos tóxicos [24]. El control de velocidad en lazo cerrado está representado en la Figura 9.1 con $H(s) = 1$. La carta de Nichols en la Figura PD9.1(b) muestra el diagrama de $G(j\omega)/K$ frente a ω. Los valores de la frecuencia en los puntos indicados son los que se muestran en la tabla siguiente:

Puntos	1	2	3	4	5
ω	2	5	10	20	50

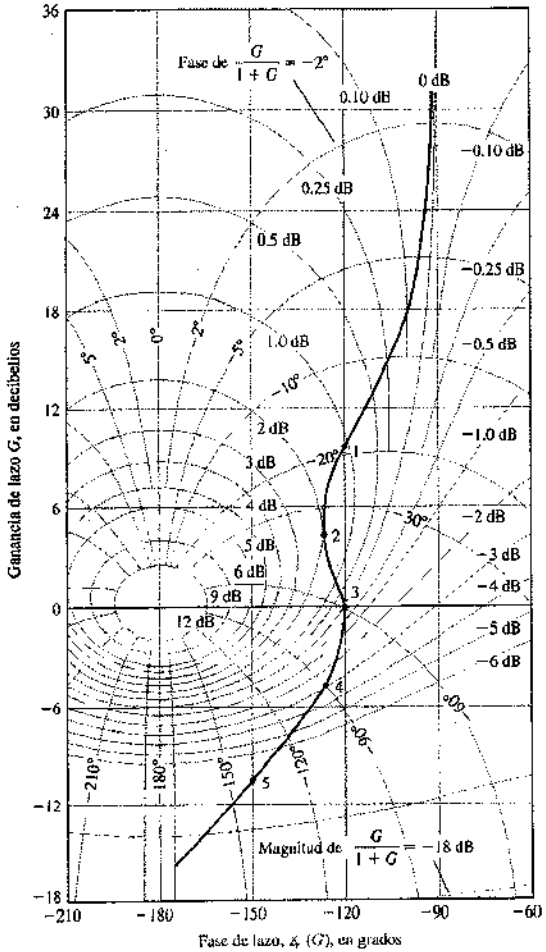
(a) Determinar los márgenes de ganancia y de fase del sistema en lazo cerrado cuando $K = 1$. (b) Determinar el pico de resonancia en dB y la frecuencia de resonancia para $K = 1$. (c) Determinar el ancho de banda del sistema y estimar del tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) y el tanto por ciento de sobreelongación de este sistema para una entrada escalón. (d) Determinar la ganancia K apropiada de forma que la sobreelongación frente a una entrada escalón sea del 30% y estimar el tiempo de asentamiento del sistema.

PD9.2. Las juntas flexibles de los brazos de robot se construyen con materiales de pesos ligeros y presentan dinámica en lazo abierto ligeramente subamortiguada [15]. En la Figura PD9.2 se muestra un sistema de control realimentado para un brazo flexible. Seleccionar K de forma que el sistema tenga un margen de fase máximo. Predecir la sobreelongación para una entrada escalón basándose en el margen de fase obtenido y compararla con la sobreelongación real para una entrada escalón. Determinar el ancho de banda del sistema en lazo cerrado. Predecir el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) del sistema frente a una entrada escalón y compararlo con el tiempo de asentamiento real. Comentar si es adecuado o no este sistema de control.

PD9.3. Un sistema automático de dosificación de medicamentos se utiliza para regular los cuidados de pacientes críticos que sufren fallos cardíacos [25]. El objetivo es mantener estable al paciente dentro de unos límites. Considérese el uso de un sistema para la regulación de la presión de la sangre mediante la administración de un medicamento. En la



(a)



(b)

FIGURA PD9.1
(a) Robot móvil para la limpieza de residuos tóxicos. (b) Carta de Nichols.

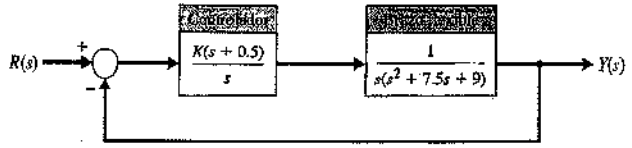


FIGURA PD9.2
Control de un brazo de robot flexible.

Figura PD9.3 se muestra un sistema de control realimentado. Seleccionar una ganancia K apropiada que mantenga una pequeña desviación en la presión sanguínea mientras logra una buena respuesta dinámica.

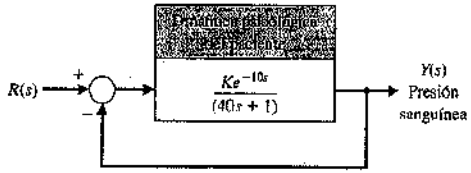
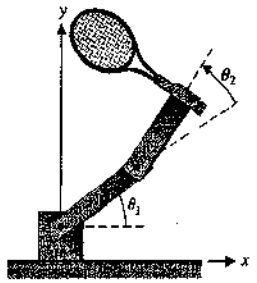
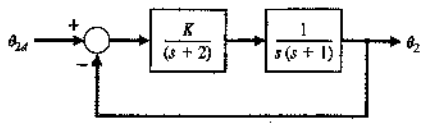


FIGURA PD9.3. Expendedor automático de medicamentos.

PD9.4. En la Figura PD9.4(a) se muestra un robot que juega al tenis, y en la Figura PD9.4(b) se muestra un sistema de control simplificado para $\theta_2(t)$. El objetivo del sistema de control consiste en lograr la mejor respuesta frente a un escalón mientras se logra una K_v elevada para el sistema. Seleccionar $K_{v_1} = 0.325$ y $K_{v_2} = 0.45$, y determinar el margen de fase, el margen de ganancia y el ancho de banda en lazo cerrado en cada caso. Determinar la respuesta frente a un escalón para cada caso y seleccionar el mejor valor para K.



(a)



(b)

FIGURA PD9.4. (a) Un robot jugador de tenis con dos articulaciones. (b) Sistema de control simplificado.

PD9.5. Como se muestra en la Figura PD9.5 se utiliza un actuador electrohidráulico para actuar sobre grandes cargas en un robot manipulador [17]. El sistema está sujeto a una entrada escalón y se desea minimizar el error en estado estacionario. Sin embargo, se quiere mantener la sobreelongación menor que el 10%. Sea $T = 0.8$ segundos.

(a) Seleccionar la ganancia K cuando $G_c(s) = K$ y determinar la sobreelongación resultante, el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) y el error en estado estacionario. (b) Repetir el apartado (a) cuando $G_c(s) = K_1 + K_2/s$ seleccionando K_1 y K_2. Dibujar la carta de Nichols para las ganancias seleccionadas K_1 y K_2.

PD9.6. La representación física de un tren de laminación de acero es un sistema amortiguador-resorte [8]. La salida del sensor de grosor está localizada a una distancia despreciable de la salida del tren laminador, y el objetivo es mantener el grosor tan próximo al valor de referencia como sea posible. Cualquier cambio del grosor de la banda de entrada se tiene en cuenta como una perturbación. Se trata de un sistema con realimentación no unitaria, como se muestra en la Figura PD9.6. Dependiendo del mantenimiento del tren laminador, el parámetro varía cuando $80 \leq b < 300$.

Determinar el margen de fase y el margen de ganancia para los dos valores extremos de b cuando el valor normal de la ganancia es $K = 170$. Recomendar una reducción en el valor de la ganancia K de forma que el margen de fase sea mayor de 40° y el margen de fase sea mayor que 8 dB para el rango de b.

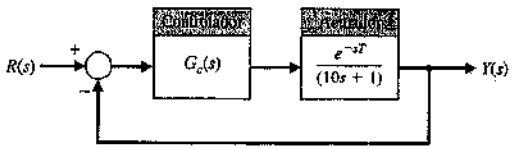


FIGURA PD9.5
Actuador electrohidráulico.

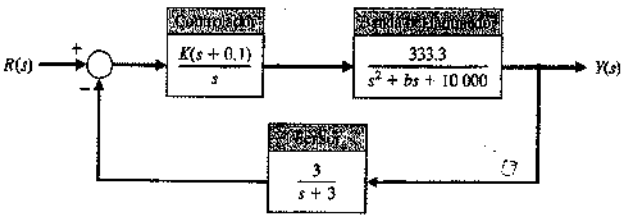


FIGURA PD9.6
Tren de laminación de acero.

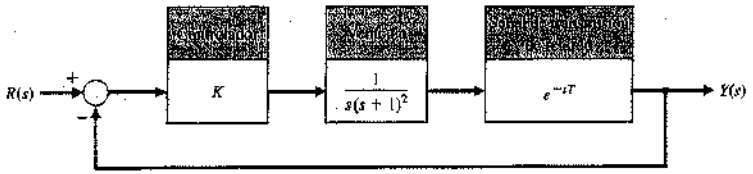


FIGURA PD9.7
Vehículo de control lunar.

PD9.7. Los vehículos para construcción y trabajos de exploración lunar necesitarán condiciones muy diferentes de las encontradas en la Tierra. Además, serán controlados mediante control remoto. En la Figura PD9.7 se muestran diagrama de bloques de tal vehículo y su control. Seleccionar una ganancia adecuada K cuando $T = 0.5$ segundos. El objetivo es lograr una respuesta rápida frente a un escalón con una sobreelongación menor del 20%.

PD9.8. El control de un tren de laminación de acero de alta velocidad es un problema complejo. El objetivo es mantener el espesor del líquido extraído de manera precisa y ajustable rápidamente. En la Figura PD9.8 se muestra el modelo del sistema de control. Diseñar un sistema de control seleccionando K de forma que la respuesta del sistema sea lo más rápido posible con una sobreelongación menor del 0.5% y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 4 segundos. Utilizar el lugar de las raíces para seleccionar K y calcular las raíces para la K seleccionada. Describir las raíces dominantes del sistema.

PD9.9. Un sistema de dos tanques que contiene líquido caliente tiene el modelo que se muestra en la Figura PD9.9(a),

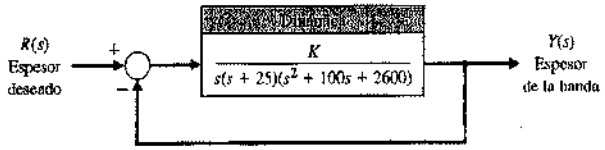
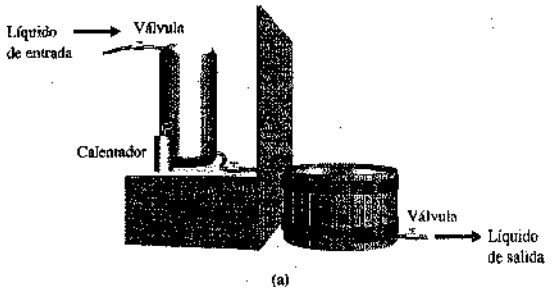
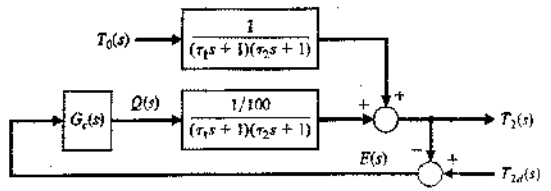


FIGURA PD9.8
Control del tren de laminación de acero.



(a)



(b)

FIGURA PD9.9
Temperatura de control de dos tanques.

donde T_0 es la temperatura del fluido que entra en el primer tanque y T_2 es la temperatura del líquido que sale del segundo tanque. El diagrama de bloques del modelo se muestra en la Figura PD9.9(b). El sistema de dos tanques tiene un calentador en el tanque 1 con una entrada de calor controlable, Q. Las constantes de tiempo son $\tau_1 = 10$ segundos y $\tau_2 = 50$ segundos.

(a) Determinar $T_2(s)$ en función de $T_0(s)$ y $T_{2d}(s)$.
(b) Si la temperatura de salida deseada, $T_{2d}(s)$, se cambia instantáneamente de $T_{2d}(s) = A/s$ a $T_{2d}(s) = 2A/s$, determinar la respuesta transitoria de $T_2(t)$ cuando $G_c(s) = K = 500$. Supóngase que antes del cambio brusco de temperatura, el sistema es estable en estado estacionario.
(c) Determinar el error en estado estacionario, e_{ss}, para el sistema del apartado (b), donde $E(s) = T_{2d}(s) - T_2(s)$.
(d) Repetir los apartados (b) y (c) si $G_c(s) = K/s$. Utilizar una ganancia K de forma que la sobreelongación porcentual sea menor que el 10%.
(e) Diseñar un controlador tal que el sistema tenga un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de $T_s < 150$ segundos y una sobreelongación porcentual menor que el 10%, mientras se mantiene un error nulo en estado estacionario cuando

$$G_c(s) = \left(K_1 + \frac{K_2}{s}\right).$$

(f) Realizar una tabla en la que se compare la sobreelongación porcentual, el tiempo de asentamiento y el error en estado estacionario para los diseños de los apartados (b) y (e).

PD9.10. En la Figura PD9.10(a) se muestra un controlador por computador para un robot que coge piezas metálicas calientes y que las coloca en un tanque de enfriamiento. El robot se sitúa sobre la pieza y se mueve hacia abajo a lo largo del eje y. El sistema de control se muestra en la Figura PD9.10(b), donde

$$G(s) = \frac{e^{-sT}}{(s+1)^2}$$

y $T = \pi/4$ segundos. Diseñar un controlador que reduzca el error en estado estacionario para una entrada escalón al 10% de la magnitud de la entrada mientras mantenga la sobreelongación menor del 10% cuando

$$G_c(s) = \left(K_1 + \frac{K_2}{s}\right).$$

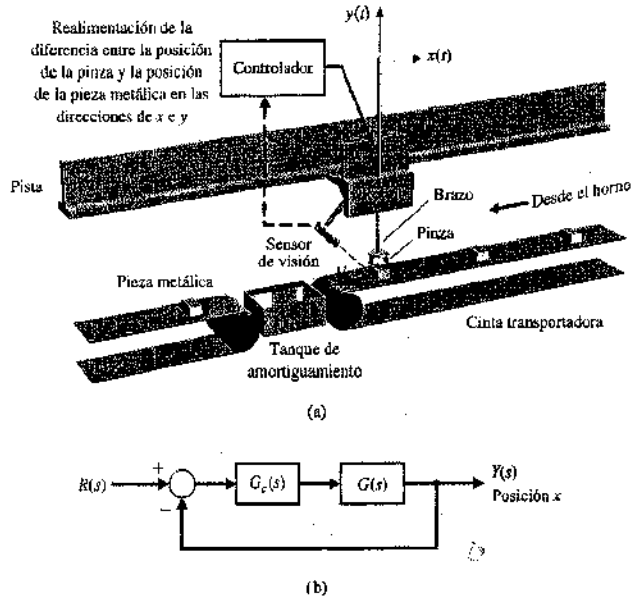


FIGURA PD9.10
Control de robot de piezas metálicas calientes.

PROBLEMAS CON MATLAB

PM9.1. Considérese un sistema de control con realimentación unidad negativa con

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 4s + 10}.$$

Utilizando MATLAB, verificar que el margen de ganancia es ∞ y el margen de fase es 24°.

PM9.2. Utilizando la función nyquist, obtener el diagrama polar de las siguientes funciones de transferencia:

(a) $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$;

(b) $G(s) = \dfrac{20}{s^2 + 8s + 14}$;

(c) $G(s) = \dfrac{10}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$.

PM9.3. Utilizando las funciones nichols y logspace, obtener la carta de Nichols de las siguientes funciones de transferencia:

(a) $G(s) = \dfrac{1}{s + 0.1}$;

(b) $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 1}$;

(c) $G(s) = \dfrac{24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$.

Determinar los márgenes de fase y de ganancia aproximados a partir de las cartas de Nichols y etiquetar las cartas de manera adecuada.

PM9.4. Un sistema de control con realimentación negativa tiene

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s+1}.$$

(a) Utilizando la función margin, determinar K de manera que el margen de fase sea 45°, cuando $T = 0.1s$. (b) Obtener un diagrama del margen de fase frente a T para la K determinada en el apartado (a), con $0 \leq T \leq 0.2s$.

PM9.5. Considérese el control de la máquina papelera que se muestra en la Figura PA9.4. Utilizando MATLAB, obtener un diagrama del ancho de banda del sistema en lazo cerrado cuando K varía en el intervalo $1 \leq K \leq 50$.

PM9.6. En la Figura PM9.6 se muestra un diagrama de bloques de un sistema de control de la aceleración vertical de un misil. La entrada es la orden de aceleración vertical (en g's) y la salida es la aceleración vertical del misil (en g's). Se especifica que el controlador es un controlador proporcional integral (PI). El valor nominal de b_0 es 0.5.

(a) Utilizando la función margin, calcular el margen de fase, margen de ganancia y frecuencia de cruce (0 dB), suponiendo el valor nominal de b_0.
(b) Utilizando el margen de ganancia del apartado (a), determinar el máximo valor de b_0 para que el sistema sea estable. Verificar la respuesta mediante el análisis de la ecuación característica haciendo uso del criterio de Routh-Hurwitz.

PM9.7. Un laboratorio de ingeniería ha presentado un plan para operar un satélite que orbite la Tierra que esté controlado desde una estación terrestre. En la Figura PM9.7 se muestra un diagrama de bloques del sistema propuesto. Una señal tarda T segundos en llegar a la lanzadera desde la estación terrestre y el retardo es el mismo para la señal de vuelta. El controlador propuesto es un controlador proporcional-derivativo (PD), donde

$$G_c(s) = K_P + K_D s.$$

(a) Supóngase que no hay retardo de transmisión (es decir, $T = 0$). Diseñar el controlador con las especificaciones siguientes: (1) sobreelongación porcentual menor que el 20% frente a una entrada escalón unidad y (2) tiempo de pico menor que 30 segundos.

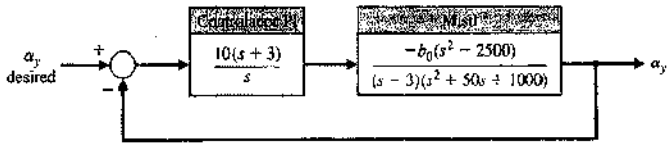


FIGURA PM9.6
Un sistema de control realimentado de la aceleración vertical para un misil.

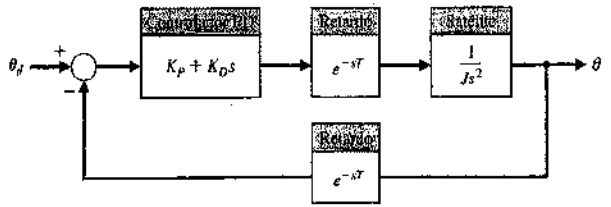


FIGURA PM9.7
Un diagrama de bloques de un satélite controlado desde tierra.

(b) Calcular el margen de fase con el controlador en el lazo pero suponiendo un tiempo de retardo en la transmisión nulo. Estimar la cantidad de tiempo de retardo permitido para que el sistema sea estable a partir del cálculo del margen de fase.
(c) Utilizando una aproximación de Padé de segundo orden para el tiempo de retardo, determinar el máximo retardo permitido, T_{max}, para que el sistema sea estable desarrollando un código en MATLAB que utilice la función pade y calcule los polos del sistema en lazo cerrado en función del tiempo de retardo, T. Comparar la respuesta con la obtenida en el apartado (b).

PM9.8. Considérese el sistema representado en variables de estado de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 22 \end{bmatrix}u$$

$$y = [10 \quad 0]\mathbf{x} + [0]u$$

Obtener el diagrama polar utilizando la función nyquist.

PM9.9. Para el sistema del problema PM9.8 utilizar la función nichols para obtener la carta de Nichols y determinar el margen de fase y el margen de ganancia.

PM9.10. En la Figura PM9.31 se muestra un sistema de control realimentado en lazo cerrado. (a) Obtener el diagrama de Nyquist y determinar el margen de fase. Supóngase que el tiempo de retardo $T = 0$ s. (b) Calcular el margen de fase cuando $T = 0.05$ s. (c) Determinar el mínimo retardo temporal que desestabiliza el sistema en lazo cerrado.

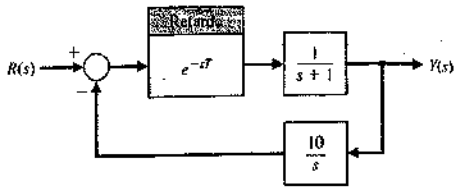


FIGURA PM9.31. Sistema con realimentación no unitaria con un retardo temporal.

TÉRMINOS Y CONCEPTOS

Ancho de banda. Frecuencia a la que la respuesta cae 3 dB de su valor a baja frecuencia.

Carta de Nichols. Carta que presenta las curvas de las relaciones entre las respuestas en frecuencia en lazo abierto y lazo cerrado.

Criterio de estabilidad de Nyquist. Un sistema realimentado es estable si, y sólo si, el contorno en el plano $G(s)$ no rodea al punto $(-1, 0)$ cuando el número de polos de $G(s)$ en el lado derecho del plano s es cero. Si $G(s)$ tiene P polos en el semiplano derecho, entonces el número de rodeos en el sentido contrario al de las agujas del reloj al punto $(-1, 0)$ debe ser igual a P para un sistema estable.

Margen de fase. Cantidad de desplazamiento de fase de la $GH(j\omega)$ cuando la magnitud es unidad que resultará en un sistema marginalmente estable en la intersección con el punto $(-1, 0)$ sobre el diagrama de Nyquist.

Margen de ganancia. Aumento en la ganancia del sistema cuando la fase $= -180°$ que resultará en un sistema marginalmente estable con la intersección del punto $-1 + j0$ en el diagrama de Nyquist.

Medida logarítmica (decibelios). Medida del margen de ganancia definida como $20\log_{10}(1/d)$, donde $\frac{1}{d} = \frac{1}{|GH(j\omega)|}$ cuando el desplazamiento de fase es $-180°$.

Principio del argumento. *Véase* Teorema de Cauchy.

Respuesta en frecuencia en lazo cerrado. Respuesta en frecuencia de la función de transferencia en lazo cerrado $T(j\omega)$.

Teorema de Cauchy. Si un contorno encierra Z ceros y P polos de $F(s)$ en el sentido de las agujas del reloj, el contorno correspondiente en la plano $F(s)$ encierra al origen del plano $F(s)$ $N = Z - P$ veces en el sentido de las agujas del reloj.

Tiempo de retardo. Retardo temporal puro T, de forma que lo que suceda en un tiempo t en un punto del sistema ocurre en otro punto del sistema pasado un tiempo $t + T$.

Transformación conforme. Transformación de un contorno que retiene los ángulos del plano s en el plano $F(s)$.

Transformación de contorno. Contorno o trayectoria en un plano que se transforma en otro plano mediante la relación $F(s)$.

Diseño de sistemas de control con realimentación

10

10.1. Introducción 582
10.2. Enfoques en el diseño de sistemas 583
10.3. Redes de compensación en cascada 585
10.4. Diseño por adelanto de fase utilizando el diagrama de Bode 589
10.5. Diseño por adelanto de fase utilizando el lugar de las raíces 595
10.6. Diseño de sistemas utilizando redes de integradores 601
10.7. Diseño por retardo de fase utilizando el lugar de las raíces 604
10.8. Diseño por retardo de fase utilizando el diagrama de Bode 608
10.9. Diseño de sistemas en el diagrama de Bode utilizando métodos analíticos y por computador 613
10.10. Sistemas con un prefiltro 615
10.11. Diseño para respuesta plana 617
10.12. Ejemplo de diseño: Sistema de control del bobinado de un rotor 620
10.13. Ejemplo de diseño: El trazador gráfico *X-Y* 623
10.14. Diseño de sistemas utilizando MATLAB 626
10.15. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 633
10.16. Resumen 634

SINOPSIS

En este capítulo se trata como tema central el diseño de controladores. Haciendo uso de métodos descritos en los capítulos anteriores, se desarrollan distintas técnicas en el dominio de la frecuencia que permiten obtener el comportamiento adecuado en el sistema. Se introducen los controladores de adelanto y retardo y se utilizan en distintos ejemplos de diseño. Se presenta el diseño de controladores de adelanto y retardo de fase utilizando el lugar de las raíces y los diagramas de Bode. Se vuelve a tratar sobre el controlador proporcional-integral (PI) en el contexto de lograr alta precisión en el seguimiento en estado estacionario. En el Capítulo 11 se considerará el diseño de sistemas de control utilizando métodos de variables de estado. El capítulo concluye con el diseño de un controlador proporcional-derivativo (PD) con prefiltro para el Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de Lectura de una Unidad de Disco.

10.1. INTRODUCCIÓN

El comportamiento de los sistemas de control con realimentación es de primordial importancia. Este tema se analizó extensamente en el Capítulo 5 y se desarrollaron las medidas cuantitativas del comportamiento. Se ha determinado que un sistema adecuado de control es estable y que para una orden de entrada da como resultado una respuesta aceptable, es menos sensible a los cambios en los parámetros del sistema, produce un error mínimo en estado estacionario para órdenes de entrada y, finalmente, puede eliminar el efecto de perturbaciones indeseables. Un sistema de control con realimentación que proporcione un comportamiento óptimo sin necesidad de ningún ajuste es verdaderamente raro. Generalmente, es necesario transigir entre muchas especificaciones conflictivas y exigentes, y ajustar los parámetros del sistema para proporcionar un comportamiento adecuado y aceptable cuando no es posible obtener todas las especificaciones óptimas deseadas.

En diversas partes de los capítulos anteriores se ha considerado el problema del diseño y ajuste de los parámetros del sistema para proporcionar una respuesta y comportamiento deseables. En el Capítulo 5 se definieron y se establecieron varias medidas adecuadas de comportamiento. Después, en el Capítulo 6, se determinó un método para investigar la estabilidad de un sistema de control, pues se reconoció que un sistema es inaceptable a menos que sea estable. En el Capítulo 7 se utilizó el método del lugar de las raíces para elaborar el diseño de una balanza autonivelada (Sección 7.4) y después se ilustró un método del diseño de parámetros usando el método del lugar de las raíces (Sección 7.5). Además, en los Capítulos 8 y 9 se desarrollaron medidas del comportamiento adecuadas en términos de la variable de frecuencia ω y se utilizaron para diseñar varios sistemas de control adecuados. De este modo, se han considerado los problemas del diseño de los sistemas de control con realimentación como parte integral de los temas de los capítulos anteriores. Ahora el propósito es estudiar el problema un poco más y plantear métodos significativos de diseño y compensación.

En los capítulos anteriores se ha encontrado que frecuentemente es posible ajustar los parámetros del sistema para proporcionar la respuesta deseada de éste. Sin embargo, también se encontró a menudo que no se puede simplemente ajustar un parámetro del sistema y obtener así el comportamiento deseado. Más bien se está forzado a reconsiderar la estructura del sistema y rediseñarlo para obtener uno adecuado. Esto es, se debe examinar el esquema o plan del sistema y obtener un nuevo diseño o plan que dé como resultado un sistema adecuado. Así, **el diseño de un sistema de control está relacionado con el arreglo, o el plan, de la estructura del sistema y la selección de los componentes y parámetros adecuados de dicho sistema.** Por ejemplo, si se desea que un conjunto de medidas de comportamiento sean menores que algunos valores especificados, frecuentemente se encuentra un conjunto contradictorio de requisitos. Así, si se desea un sistema que tenga un tanto por ciento de sobreelongación menor que el 20% y $\omega_n T_p = 3.3$, se obtiene un requisito contradictorio en la razón de amortiguamiento del sistema, ζ, como puede verse examinando la Figura 5.8. Ahora bien, si no se pueden atenuar estos dos requisitos de comportamiento, se debe alterar en alguna forma el sistema. Frecuentemente, la alteración o ajuste de un sistema de control para proporcionar un comportamiento adecuado se llama **compensación**; esto es, compensación es el ajuste de un sistema con el objeto de subsanar deficiencias.

En el rediseño de un sistema de control para alterar su respuesta, se inserta un componente adicional dentro de la estructura del sistema de realimentación. Este componente o dispositivo adicional es el que equilibra o compensa las deficiencias de comportamiento. El dispositivo de compensación puede ser mecánico, eléctrico, hidráulico, neumático u otro tipo de dispositivo o red y frecuentemente se conoce como **compensador**. Comúnmente, un lazo eléctrico sirve como compensador en muchos sistemas de control.

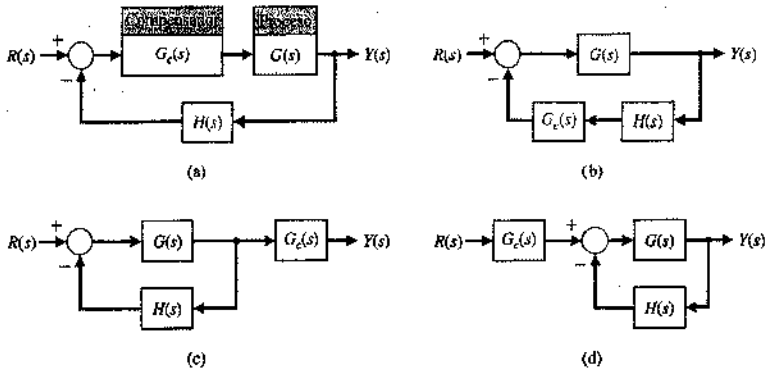


FIGURA 10.1
Tipos de compensación. (a) Compensación en cascada. (b) Compensación de realimentación. (b) Compensación de salida o carga. (d) Compensación de entrada.

La función de transferencia del compensador se designa como $G_c(s) = E_a(s)/E_m(s)$ y el compensador puede situarse en una posición adecuada dentro de la estructura del sistema. En la Figura 10.1 se muestran varios tipos de compensación para un sencillo sistema de control con realimentación de lazo simple. El compensador colocado en la trayectoria de alimentación directa se conoce como compensador en **cascada** o serie [Figura 10.1(a)]. Análogamente, los otros esquemas de compensación se conocen como compensación de realimentación, de salida o carga y de entrada, como se muestra en la Figura 10.1(b), (c) y (d), respectivamente. La selección del esquema de compensación depende de una consideración de las especificaciones, de los niveles de potencia en varios nodos de señal del sistema y de las redes disponibles para utilizar. Normalmente la salida $Y(s)$ es una salida directa del proceso $G(s)$ y la salida compensada de la Figura 10.1(c) no es físicamente realizable. No se pueden considerar todas las posibilidades en este capítulo; en los Capítulos 11 y 12 se proporcionará más información.

10.2. ENFOQUES EN EL DISEÑO DE SISTEMAS

El comportamiento de un sistema de control se puede describir en términos de las medidas de comportamiento en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. El comportamiento de un sistema puede especificarse por el requisito de cierto tiempo pico, T_p, una sobreelongación máxima y un tiempo de asentamiento para una entrada de escalón. Además, generalmente es necesario especificar el error máximo permisible en estado estacionario para varias entradas de señal de prueba y de perturbaciones. Estas especificaciones de comportamiento se pueden definir en términos de la localización deseable de los polos y ceros de la función de transferencia del sistema de lazo cerrado, $T(s)$. Por esto, puede especificarse la localización de los polos y ceros del plano s de $T(s)$. Como se estableció en el Capítulo 7, el lugar de las raíces del sistema de lazo cerrado se

puede obtener fácilmente para la variación de un parámetro del sistema. Sin embargo, cuando el lugar de las raíces no da como resultado una configuración de raíces adecuada, se debe agregar una red de compensación (Figura 10.1) con el objeto de alterar el lugar de las raíces cuando se varía el parámetro. Por tanto, se puede utilizar el método del lugar de las raíces y determinar una función de transferencia adecuada de la red del compensador, de forma que el lugar de las raíces resultante produzca la configuración deseada de las raíces de lazo cerrado.

De forma alternativa, se puede describir el comportamiento de un sistema de control con realimentación en términos de las medidas del comportamiento en la frecuencia. Entonces un sistema se puede describir en términos del pico de la respuesta de frecuencia de lazo cerrado, M_{p_ω}, la frecuencia resonante, ω_r, el ancho de banda y el margen de fase del sistema. Se puede agregar una red de compensación adecuada, si es necesario, para satisfacer las especificaciones del sistema. El diseño de la red, $G_c(s)$, se desarrolla en términos de la respuesta de frecuencia como se representó en el plano polar, el diagrama de Bode o la carta de Nichols. Como la función de transferencia en cascada para una gráfica de Bode se aclara fácilmente agregando la respuesta de frecuencia de la red, generalmente se prefiere enfocar los métodos de la respuesta de frecuencia utilizando el diagrama de Bode.

Por esto, la compensación de un sistema está relacionada con la alteración de la respuesta de frecuencia o del lugar de las raíces del sistema con el objeto de obtener un comportamiento adecuado de éste. Por los métodos de la respuesta de frecuencia, interesa la alteración del sistema de forma que la respuesta de frecuencia del sistema compensado cumpla las especificaciones. Por esto, en el caso del enfoque de la respuesta de frecuencia se utilizan redes de compensación para alterar y reestructurar las características de frecuencia representadas en el diagrama de Bode y la carta de Nichols.

Alternativamente, la compensación de un sistema de control se puede completar en el plano s por los métodos del lugar de las raíces. Para el caso del plano s, el diseñador desea alterar y reestructurar el lugar de las raíces de forma que las raíces del sistema caigan en la posición deseada del plano s.

En los capítulos anteriores se han ilustrado varios de los métodos antes mencionados. En el Ejemplo 7.5 se utilizó el método del lugar de las raíces al considerar el diseño de una red de realimentación con el objeto de obtener un comportamiento satisfactorio. En el Capítulo 9 se consideró la selección de la ganancia con el objeto de obtener un margen de fase adecuado y, por tanto, una estabilidad relativa satisfactoria.

Muy frecuentemente, en la práctica el método mejor y más sencillo para mejorar el comportamiento de un sistema de control es alterar, si es posible, el propio proceso. Esto es, si el diseñador de sistemas puede especificar y alterar el diseño del proceso que se representa por la función de transferencia $G(s)$, entonces el comportamiento del sistema puede mejorar fácilmente. Por ejemplo, para mejorar el comportamiento transitorio de un regulador de posición de un servomecanismo, a menudo se puede escoger un motor mejor para el sistema. En el caso del sistema de control de un aeroplano, se podría alterar el diseño aerodinámico y así mejorar las características transitorias del vuelo. Por esto, un diseñador de sistemas de control deberá reconocer que una alteración de su proceso puede producir una mejoría del sistema. Sin embargo, frecuentemente el proceso es fijo e inalterable, o ha sido alterado al máximo, y se observa que todavía da como resultado un comportamiento insatisfactorio. Entonces la agregación de redes de compensación resulta útil para mejorar el comportamiento del sistema.

En las secciones siguientes se supondrá que el proceso ha sido mejorado al máximo y que la $G(s)$ que representa al proceso es inalterable. Primero se considerará la agregación de la red de compensación conocida como de adelanto de fase y se describirá el diseño de la red mediante las técnicas del lugar de las raíces y la respuesta de frecuencia. Después, usando ambas técnicas, se describirá el diseño de redes integradoras de compensación con el objeto de obtener un comportamiento adecuado del sistema.

10.3. REDES DE COMPENSACIÓN EN CASCADA

En esta sección se considerará el diseño de una red de realimentación o en cascada como se muestra en las Figuras 10.1(a) y 10.1(b), respectivamente. La red de compensación, $G_c(s)$, se conecta en cascada con el proceso inalterable $G(s)$ para proporcionar una función de transferencia $G_c(s)G(s)H(s)$ adecuada para el lazo. Evidentemente, el compensador $G_c(s)$ puede escogerse para alterar la forma del lugar de las raíces o la respuesta de frecuencia. En cualquier caso, la red puede escogerse de modo que tenga una función de transferencia

$$G_c(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{M} (s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s + p_j)}. \tag{10.1}$$

Entonces el problema se reduce a la selección acertada de los polos y ceros del compensador. Para ilustrar las propiedades de la red de compensación, se considera un compensador de primer orden. El enfoque de la compensación desarrollado con base en un compensador de primer orden puede extenderse a compensadores de orden mayor, por ejemplo, colocando en cascada varios compensadores de primer orden.

Considérese el compensador de primer orden con la función de transferencia

$$\boxed{G_c(s) = \frac{K(s + z)}{(s + p)}}. \tag{10.2}$$

El problema de diseño será, entonces, la selección de z, p y K con el objeto de proporcionar un comportamiento adecuado. Cuando $|z| < |p|$, la red se conoce como **red de adelanto de fase** y tiene una configuración de polos y ceros en el plano como se muestra en la Figura 10.2. Si el polo fuera despreciable, esto es, $|p| \gg |z|$, y el cero se presentara en el origen del plano s, se tendría un diferenciador de forma que

$$G_c(s) \simeq \left(\frac{K}{p}\right)s. \tag{10.3}$$

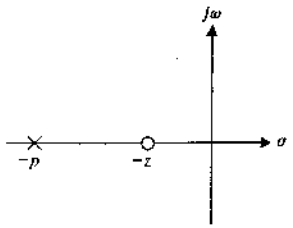


FIGURA 10.2
Diagrama de polos y ceros de la red de adelanto de fase.

Por esto, una red de compensación de la forma de la Ecuación (10.2) es una red de tipo diferenciador. La red de diferenciador de la Ecuación (10.3) tiene una característica de frecuencia dada por

$$G_c(j\omega) = j\left(\frac{K}{p}\right)\omega = \left(\frac{K}{p}\,\omega\right)e^{+j90^\circ} \tag{10.4}$$

y un ángulo de fase de $+90^\circ$, frecuentemente conocido como ángulo de adelanto de fase. De forma semejante, la respuesta de frecuencia de la red diferenciadora de la Ecuación (10.2) es

$$G_c(j\omega) = \frac{K(j\omega + z)}{(j\omega + p)} = \frac{(Kz/p)[j(\omega/z) + 1]}{[j(\omega/p) + 1]} = \frac{K_1(1 + j\omega\alpha\tau)}{(1 + j\omega\tau)}, \tag{10.5}$$

donde $\tau = 1/p$, $p = \alpha z$ y $K_1 = K/\alpha$. La respuesta de frecuencia de esta red de adelanto de fase se muestra en la Figura 10.3. El ángulo de la característica de frecuencia es

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\alpha\omega\tau - \tan^{-1}\omega\tau. \tag{10.6}$$

Como el cero se presenta primero en el eje de frecuencias, obtenemos una característica de adelanto de fase como se muestra en la Figura 10.3. La pendiente de la curva de magnitud asintótica es de $+20$ dB/década.

La función de transferencia de compensación de adelanto de fase puede obtenerse con la red mostrada en la Figura 10.4. La función de transferencia de esta red es

$$\begin{aligned} G_c(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} &= \frac{R_2}{R_2 + \{R_1(1/Cs)/[R_1 + (1/Cs)]\}} \\ &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\frac{(R_1Cs + 1)}{\{[R_1R_2/(R_1 + R_2)]Cs + 1\}}. \end{aligned} \tag{10.7}$$

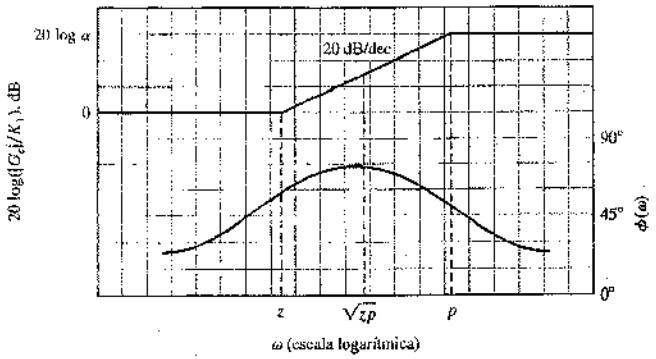


FIGURA 10.3
Diagrama de Bode de la red de adelanto de fase.

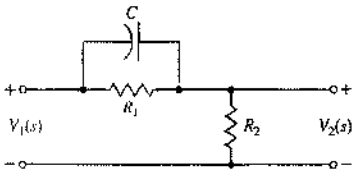


FIGURA 10.4
Red de adelanto de fase.

Por tanto, haciendo

$$\tau = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}C \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2},$$

se obtiene la función de transferencia de la **compensación por adelanto de fase**

$$\boxed{G_c(s) = \frac{(1 + \alpha\tau s)}{\alpha(1 + \tau s)},} \tag{10.8}$$

que es igual a la Ecuación (10.5) cuando se inserta una ganancia adicional K en cascada.

El valor máximo del adelanto de fase se presenta en una frecuencia ω_m, donde ω_m es la media geométrica de $p = 1/\tau$ y $z = 1/\alpha\tau$; esto es, el máximo adelanto de fase se presenta en la mitad de las frecuencias de polos y ceros en la escala logarítmica de frecuencias. Por tanto,

$$\boxed{\omega_m = \sqrt{zp} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}.}$$

Para obtener la ecuación del ángulo de adelanto de fase, se escribe de nuevo el ángulo de fase de la Ecuación (10.5) como

$$\boxed{\phi = \tan^{-1}\frac{\alpha\omega\tau - \omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2\alpha}.} \tag{10.9}$$

Entonces, sustituyendo la frecuencia para el máximo ángulo de fase, $\omega_m = 1/\tau\sqrt{a}$, se tiene

$$\tan\phi_m = \frac{(\alpha/\sqrt{\alpha}) - (1/\sqrt{\alpha})}{1 + 1} = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}. \tag{10.10}$$

Como $\tan\phi_m$ es igual a $(\alpha - 1)/2\sqrt{a}$, se utiliza la relación triangular y se observa que

$$\boxed{\operatorname{sen}\phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}.} \tag{10.11}$$

La Ecuación (10.11) es muy útil para calcular la relación necesaria α entre el polo y cero de un compensador, con el objeto de proporcionar un máximo adelanto de fase requerido. En la Figura 10.5 se muestra la gráfica de ϕ_m frente a α. Evidentemente, el ángulo de fase que se obtiene fácilmente de esta red no es mucho mayor que 70°. Así mismo, como

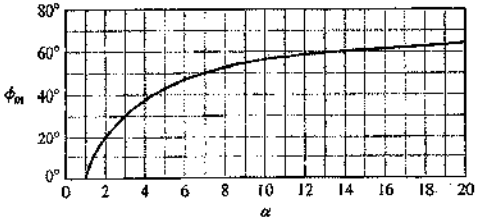


FIGURA 10.5
Máximo ángulo de fase ϕ_m frente a α para una red de adelanto.

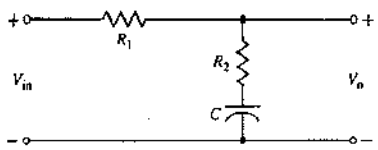


FIGURA 10.6. Red de retardo de fase.

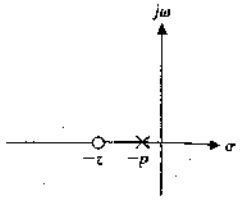


FIGURA 10.7. Diagrama de polos y ceros de la red de retardo de fase.

$\alpha = (R_1 + R_2)/R_2$, existen limitaciones prácticas en el valor máximo de α que se puede obtener. Por tanto, si se necesita un ángulo máximo mayor que 70°, se deberán usar dos redes de compensación en cascada. Entonces la función de transferencia de la compensación equivalente es $G_{c_1}(s)G_{c_2}(s)$ cuando el efecto de la carga de $G_{c_2}(s)$ sobre $G_{c_1}(s)$ es despreciable.

Frecuentemente es útil agregar una red de compensación en cascada que proporcione una característica de retardo de fase. En la Figura 10.6 se muestra la **red de retardo de fase**. La función de transferencia de esta red es

$$G_c(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{R_2 + (1/Cs)}{R_1 + R_2 + (1/Cs)} = \frac{R_2Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}. \tag{10.12}$$

Cuando $\tau = R_2C$ y $\alpha = (R_1 + R_2)/R_2$, se tiene

$$\boxed{G_c(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha\tau s} = \frac{1}{\alpha}\frac{(s + z)}{(s + p)},} \tag{10.13}$$

donde $z = 1/\tau$ y $p = 1/\alpha\tau$. En este caso, como $\alpha > 1$, el polo cae muy cerca del origen del plano s, como se muestra en la Figura 10.7. Este tipo de red de compensación frecuentemente se conoce como red de integración. El diagrama de Bode de la red de retardo de fase se obtiene mediante la función de transferencia

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\alpha\tau} \tag{10.14}$$

y se muestra en la Figura 10.8. La forma del diagrama de Bode de la red de retardo es semejante a la de la red de adelanto de fase; la diferencia es la atenuación resultante y el ángulo de retardo de fase, en vez de la amplificación y el ángulo de adelanto de fase. Sin embargo, se observa que la forma de los diagramas de las Figuras 10.3 y 10.8 son semejantes. Por tanto, se puede demostrar que el máximo retardo de fase ocurre en $\omega_m = \sqrt{zp}$.

En las secciones siguientes se pretende utilizar estas redes de compensación para obtener un lugar geométrico deseado de la frecuencia del sistema o una localización deseada de las raíces en el plano s. La red de adelanto se utiliza para proporcionar un ángulo de adelanto de fase y, por tanto, un margen de fase satisfactorio para el sistema. Alternativamente, el uso de la red de adelanto de fase puede visualizarse en el plano s como una facilidad para reformar el lugar de las raíces y así proporcionar la localización deseada de las raíces. La red de retardo de fase no se utiliza para proporcionar un ángulo de retardo de fase, que normalmente es una influencia desestabilizadora, sino más bien para proporcionar atenuación y aumento en la constante del error en estado estacionario [3]. Estos métodos para compensar mediante las redes de adelanto y de retardo de fase serán materia de las seis secciones siguientes.

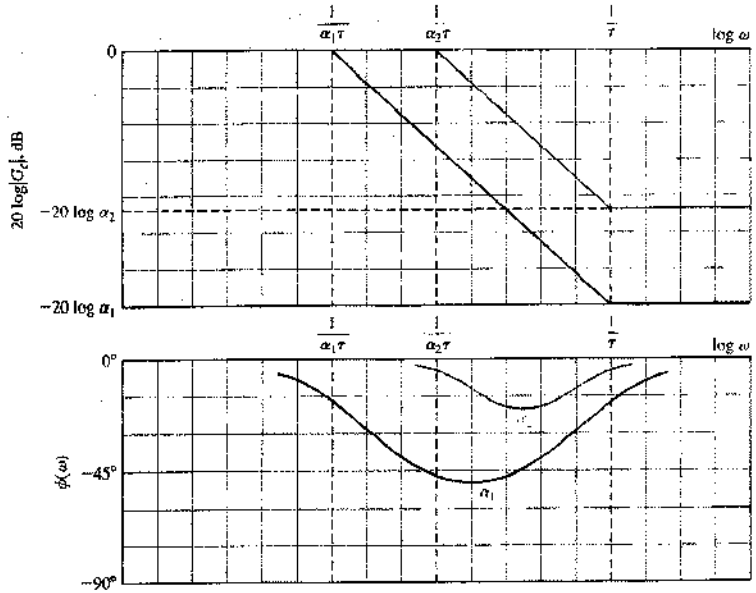


FIGURA 10.8
Diagrama de Bode de la red de retardo de fase.

10.4. DISEÑO POR ADELANTO DE FASE UTILIZANDO EL DIAGRAMA DE BODE

El diagrama de Bode se usa para diseñar una red de adelanto de fase adecuada, en lugar de las gráficas de respuesta de frecuencia. La respuesta de frecuencia de la red de compensación en cascada se agrega a la respuesta de frecuencia del sistema no compensado. Esto es, como la función de transferencia total del lazo de la Figura 10.1(a) es $G_c(j\omega)G(j\omega)H(j\omega)$, primero se representa el diagrama de Bode para $G(j\omega)H(j\omega)$. Después se puede examinar la gráfica para $G(j\omega)H(j\omega)$ y determinar una localización adecuada para p y z de $G_c(j\omega)$ con el objeto de reformar satisfactoriamente la respuesta de frecuencia. La $G(j\omega)$ no compensada se dibuja con la ganancia deseada para obtener un error en estado estacionario aceptable. Después se examinan el margen de fase y la M_{p_ω} esperada para determinar si satisfacen las especificaciones. Si el margen de fase no es suficiente, puede agregarse adelanto de fase a la curva del ángulo de fase del sistema, colocando la $G_c(j\omega)$ en una localización adecuada. Evidentemente, para obtener el máximo adelanto adicional de fase, se desea colocar la red de forma que la frecuencia ω_m se localice en la frecuencia donde la magnitud de las curvas de magnitud compensada cruza el eje de 0 dB. (Recuérdese la definición del margen de fase.) El valor del adelanto de fase añadido que se requiere permite determinar el valor necesario para α mediante la Ecuación (10.11) o la Figura 10.5. El cero $z = 1/\alpha\tau$ se localiza observando que el adelanto de fase máximo debe presentarse en $\omega_m = \sqrt{zp}$ a medio camino entre el polo y el

cero. Como la ganancia de magnitud total para la red es de $20\log\alpha$, se espera una ganancia de 10 log α en ω_m. Por esto, se determina la red de compensación completando los siguientes pasos:

1. Se calcula el margen de fase del sistema no compensado cuando se satisfacen las constantes de error.
2. Permitiendo un pequeño margen de seguridad, se determina el adelanto de fase adicional necesario, ϕ_m.
3. Se calcula α mediante la Ecuación (10.11).
4. Se calcula 10 log α y se determina la frecuencia donde la curva de magnitud no compensada es igual a $-10\log\alpha$ dB. Esta frecuencia es la nueva frecuencia de cruce de 0 dB y ω_m simultáneamente, dado que la red de compensación proporciona una ganancia de 10 log α en ω_m.
5. Se calcula el polo $p = \omega_m\sqrt{\alpha}$ y $z = p/\alpha$.
6. Se dibuja la respuesta compensada de frecuencia, se comprueba el margen de fase que resulta y se repiten los pasos, si es necesario. Finalmente, para un diseño aceptable, se eleva la ganancia del amplificador con el objeto de explicar la atenuación $(1/\alpha)$.

EJEMPLO 10.1. Un compensador por adelanto de fase para un sistema de tipo dos

Se considera un sistema de control con realimentación de lazo simple como el de la Figura 10.1(a), donde

$$G(s) = \frac{K_1}{s^2} \tag{10.15}$$

y $H(s) = 1$. El sistema no compensado es de tipo dos y a primera vista parece tener un error en estado estacionario satisfactorio para las señales de entrada de rampa y de escalón. Sin embargo, la respuesta del sistema no compensado es una oscilación no amortiguada, dado que

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_1}{s^2 + K_1}. \tag{10.16}$$

Por tanto, se agrega la red de compensación de forma que la función de transferencia del lazo es $G_c(s)G(s)H(s)$. Las especificaciones del sistema son

Tiempo de asentamiento, $T_s \leq 4$ segundos;
Constante de amortiguamiento del sistema $\zeta \geq 0.45$.

El requisito del tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) es

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4,$$

y, por tanto,

$$\omega_n = \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{0.45} = 2.22.$$

Quizá la forma más sencilla de comprobar el valor de ω_n para la respuesta de frecuencia sea relacionar ω_n con el ancho de banda, ω_B, y calcular el ancho de banda -3 dB del sistema de lazo cerrado. Para un sistema de lazo cerrado con $\zeta = 0.45$, se estima, a partir de la Figura 8.26, que $\omega_B = 1.33\omega_n$. Por tanto, se necesita un ancho de banda de lazo cerrado $\omega_B = 1.33(2.22) = 3.00$. El ancho de banda puede comprobarse después de la compensación utilizando la carta de Nichols. Para el sistema no compensado, el ancho de banda del sistema es $\omega_B = 1.33\omega_n$ y $\omega_n = \sqrt{K}$. Por tanto, será suficiente una ganancia de lazo igual a $K = \omega_n^2 \simeq 5$. Con el objeto de proporcionar un margen adecuado para el tiempo de estabilización, se selecciona $K = 10$ para dibujar el diagrama de Bode de

$$GH(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2}.$$

El diagrama de Bode del sistema no compensado se muestra con líneas continuas en la Figura 10.9.

Utilizando la Ecuación (9.58), se necesita que el margen de fase del sistema sea aproximadamente

$$\phi_{pm} = \frac{\zeta}{0.01} = \frac{0.45}{0.01} = 45°. \tag{10.17}$$

El margen de fase del sistema no compensado es de cero grados, pues la doble integración da como resultado un retardo constante de fase de 180°. Por tanto, se debe agregar un ángulo de adelanto de fase de 45° en el cruce de frecuencia (0 dB) de la curva de magnitud no compensada. Calculando el valor de α, se tiene

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \operatorname{sen}\phi_m = \operatorname{sen} 45°, \tag{10.18}$$

y, por tanto, $\alpha = 5.8$. Para proporcionar un margen de seguridad, se utilizará $\alpha = 6$. El valor de 10 log α es entonces igual a 7.78 dB. Luego la red de adelanto agregará una ganancia adicional de 7.78 dB en la frecuencia ω_m, y se desea tener ω_m igual a la frecuencia de cruce del sistema compensado. Esto se logra dibujando la pendiente compensada próxima al eje 0 dB (línea punteada) de forma que el nuevo cruce sea ω_m y la curva punteada de magnitud esté a 7.78 dB sobre la curva no compensada en la frecuencia de cruce. Por esto, la frecuencia de cruce compensada se localiza calculando la frecuencia donde la curva de magnitud no compensada es igual a -7.78 dB, la cual, en este caso, es $\omega = 4.95$. Entonces el máximo ángulo de adelanto de fase se añade en $\omega = \omega_m = 4.95$ como se muestra en la Figura 10.9. Utilizando el paso 5, se determina el polo $p = \omega_m\sqrt{\alpha} = 12.0$ y el cero $z = p/\alpha = 2.0$.

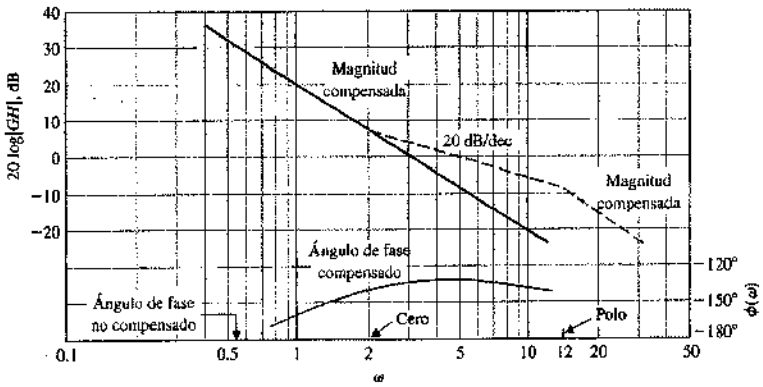


FIGURA 10.9 Diagrama de Bode para el ejemplo 10.1.

El ancho de banda del sistema compensado se puede obtener mediante la carta de Nichols. Para calcular el ancho de banda, se puede simplemente examinar la Figura 9.26 y observar que la línea -3 dB para el sistema de lazo cerrado se presenta cuando la magnitud de $GH(j\omega)$ es -6 dB y el cambio de fase de $GH(j\omega)$ es aproximadamente $-140°$. Por tanto, para calcular el ancho de banda basado en el diagrama de lazo abierto, se aproximará el ancho de banda cuando la frecuencia a la cual $20 \times \log |GH|$ es igual a -6 dB. Por tanto, el ancho de banda del sistema no compensado es aproximadamente igual a $\omega_B = 4.4$, en tanto que el ancho de banda del sistema compensado es igual a $\omega_B = 8.4$. La compensación de adelanto duplica el ancho de banda en este caso y se satisface la especificación $\omega_B > 3.00$. Por tanto, se completa la compensación del sistema y se satisfacen sus especificaciones. La función de transferencia total del lazo compensado es

$$G_c(j\omega)G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10[(j\omega/2.0) + 1]}{(j\omega)^2[(j\omega/12.0) + 1]}. \tag{10.19}$$

La función de transferencia del compensador es

$$G_c(s) = \frac{(1 + \alpha\tau s)}{\alpha(1 + \tau s)} = \frac{1}{6}\frac{[1 + (s/2.0)]}{[1 + (s/12.0)]}, \tag{10.20}$$

en la forma de la Ecuación (10.8). Como a partir de la red pasiva RC resulta una atenuación de 1/6, la ganancia del amplificador en el lazo debe aumentarse en un factor de seis para que la ganancia total del lazo en DC sea todavía igual a 10, como se requiere en la Ecuación (10.19). Cuando se agrega el diagrama de Bode de la red de compensación al diagrama no compensado, como en la Figura 10.9, se supone que se puede aumentar la ganancia del amplificador para explicar esta atenuación de $1/\alpha$. Los valores de polos y ceros se leen simplemente en la Figura 10.9, observando que $p = \alpha z$.

La función de transferencia total del lazo es [teniendo en cuenta que $H(s) = 1$]

$$GG_c(s) = \frac{10(1 + s/2)}{s^2(1 + s/12)} = \frac{60(s + 2)}{s^2(s + 12)}.$$

La función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{60(s + 2)}{s^3 + 12s^2 + 60s + 120} = \frac{60(s + 2)}{(s^2 + 6s + 20)(s + 6)},$$

y el efecto del polo en $s = -2$ y del tercer polo en $s = -6$ afectará a la respuesta transitoria. Si se dibuja la respuesta frente a una entrada escalón, se observa una sobreelongación del 34% y un tiempo de asentamiento de 1.4 segundos. ■

EJEMPLO 10.2. Un compensador por adelanto de fase para un sistema de segundo orden

Un sistema de control con realimentación tiene una función de transferencia de lazo

$$GH(s) = \frac{K}{s(s + 2)}. \tag{10.21}$$

Se desea tener un error en estado estacionario para una entrada de rampa menor que el 5% de la magnitud de la rampa. Por tanto, se requiere que

$$K_v = \frac{A}{e_{ss}} = \frac{A}{0.05A} = 20. \tag{10.22}$$

Además, se desea que el margen de fase del sistema sea por lo menos de 45°. El primer paso es dibujar el diagrama de Bode de la función de transferencia no compensada

$$GH(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega(0.5j\omega + 1)} = \frac{20}{j\omega(0.5j\omega + 1)}, \tag{10.23}$$

como se muestra en la Figura 10.10(a). La frecuencia en la cual la curva de magnitud cruza la línea de 0 dB es 6.2 rad/s y el margen de fase en esta frecuencia se determina fácilmente por la ecuación del ángulo de fase de $GH(j\omega)$, que es

$$\underline{/GH(j\omega)} = \phi(\omega) = -90° - \tan^{-1}(0.5\omega). \tag{10.24}$$

En la frecuencia de cruce, $\omega = \omega_c = 6.2$ rad/s, se tiene

$$\phi(\omega) = -162°, \tag{10.25}$$

y, por tanto, el margen de fase es de 18°. Utilizar la Ecuación (10.24) para calcular el margen de fase frecuentemente es más fácil que dibujar la curva completa del ángulo de fase, la cual se muestra en la Figura 10.10(a). Así, se necesita agregar una red de adelanto de fase de forma que el margen de fase se eleve a 45° en la nueva frecuencia de cruce (0 dB). Como la frecuencia de cruce de compensación es mayor que la no compensada, también es mayor el retardo de fase del sistema no compensado. Se tendrá en cuenta este retardo de fase adicional tratando de obtener un máximo adelanto de fase de $45° - 18° = 27°$ más un pequeño incremento (10%) de adelanto de fase para tener en cuenta el retardo añadido. Así, se diseñará una red de compensación con un máximo adelanto de fase igual a $27° + 3° = 30°$. Entonces, calculando α, se obtiene

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \operatorname{sen} 30° = 0.5, \tag{10.26}$$

y, por tanto, $\alpha = 3$.

El máximo adelanto se presenta en ω_m, y esta frecuencia se selecciona de forma que coincida con la nueva frecuencia de cruce. La magnitud de la red de adelanto en ω_m es $10 \log \alpha = 10 \log 3 = 4.8$ dB. La frecuencia de cruce compensada se calcula entonces donde la magnitud de $GH(j\omega)$ es -4.8 dB, por lo que $\omega_m = \omega_c = 8.4$. Dibujando la línea de magnitud compensada de forma que corte el eje de 0 dB en $\omega = \omega_c = 8.4$, se sigue que $z = 4.8$ y $p = \alpha z = 14.4$. Por tanto, la red de compensación es

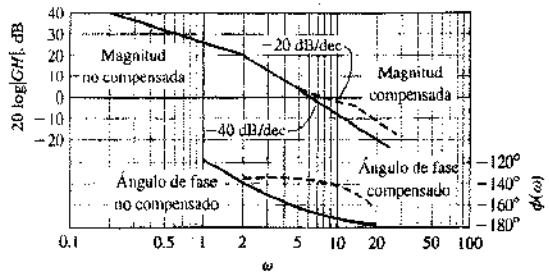
$$G_c(s) = \frac{1}{3}\frac{(1 + s/4.8)}{(1 + s/14.4)}. \tag{10.27}$$

La ganancia total de DC del lazo debe aumentarse en un factor de 3 para tener en cuenta el factor $1/\alpha = 1/3$. Entonces la función de transferencia del lazo compensado es

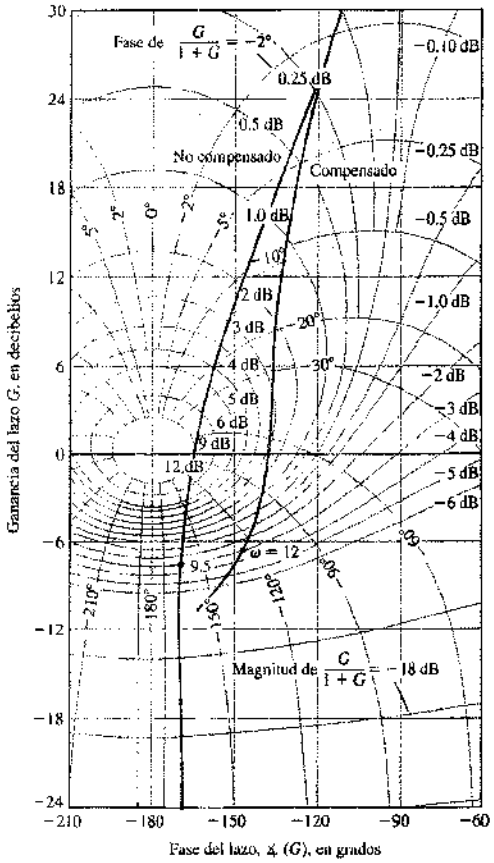
$$G_c(s)GH(s) = \frac{20[(s/4.8) + 1]}{s(0.5s + 1)[(s/14.4) + 1]}. \tag{10.28}$$

Para verificar el margen de fase final, se puede calcular la fase de $G_c(j\omega)GH(j\omega)$ en $\omega = \omega_c = 8.4$ y, por tanto, obtener el margen de fase. El ángulo de fase es entonces

$$\begin{aligned}\phi(\omega_c) &= -90° - \tan^{-1}0.5\omega_c - \tan^{-1}\frac{\omega_c}{14.4} + \tan^{-1}\frac{\omega_c}{4.8} \\ &= -90° - 76.5° - 30.0° + 60.2° \\ &= -136.3°.\end{aligned} \tag{10.29}$$



(a)



(b)

FIGURA 10.10. (a) Diagrama de Bode para el Ejemplo 10.2. (b) Diagrama de Nichols para el Ejemplo 10.2.

Por tanto, el margen de fase para el sistema compensado es de 43.7°. Si se desea tener exactamente un margen de fase de 45°, se debe repetir el proceso con un aumento en el valor de α; por ejemplo, con $\alpha = 3.5$. En este caso el retardo de fase aumentó en 7° entre $\omega = 6.2$ y $\omega = 8.4$; por tanto, no es suficiente la tolerancia de 3° en el cálculo de α. La respuesta de escalón de este sistema produce una sobreelongación del 28% con un tiempo de estabilización de 0.75 segundos.

El diagrama de Nichols para el sistema compensado y el no compensado se muestra en la Figura 10.10(b). Es evidente en este diagrama la nueva forma del lugar geométrico de la respuesta de frecuencia. Se observa el aumento de margen de fase para el sistema compensado, además de la reducción en la magnitud de M_{p_ω}, la magnitud máxima de la respuesta de frecuencia de lazo cerrado. En este caso, M_{p_ω} se reduce de un valor no compensado de +12 dB a uno compensado de aproximadamente +3.2 dB. También se observa que el ancho de banda en 3 dB de lazo cerrado del sistema compensado es igual a 12 rad/s comparado con los 9.5 rad/s para el sistema no compensado. ■

Analizando los Ejemplos 10.1 y 10.2, se observa que el diseño del sistema es satisfactorio cuando la curva asintótica para la magnitud $20 \log |GG_c|$ cruza la línea de 0 dB con una pendiente de −20 dB/década.

10.5. DISEÑO POR ADELANTO DE FASE UTILIZANDO EL LUGAR DE LAS RAÍCES

El diseño de una red de compensación de adelanto de fase puede efectuarse fácilmente en el plano s. Esta red tiene una función de transferencia

$$G_c(s) = \frac{[s + (1/\alpha\tau)]}{[s + (1/\tau)]} = \frac{(s + z)}{(s + p)}, \tag{10.30}$$

donde α y τ se definen para la red RC en la Ecuación (10.7). La localización de los ceros y polos se selecciona para obtener un lugar de las raíces para el sistema compensado satisfactorio. Las especificaciones del sistema se usan para determinar la localización deseada de las raíces dominantes de aquél. El método del lugar de las raíces del plano s es como sigue:

1. Se enumeran las especificaciones del sistema y se trasladan a una localización deseada de las raíces para las raíces dominantes.
2. Se traza el lugar geométrico no compensado de las raíces y se determina si pueden realizarse las localizaciones deseadas de éstas con un sistema no compensado.
3. Si es necesario el compensador, se coloca el cero de la red de adelanto de fase directamente bajo la localización deseada de las raíces.
4. Se determina la localización del polo de forma que el ángulo total en la localización deseada de las raíces sea 180° y, por tanto, esté en el lugar geométrico compensado de las raíces.
5. Se calcula la ganancia total del sistema en la localización deseada de las raíces y después se calcula la constante de error.
6. Se repite el proceso si la constante de error no es satisfactoria.

Por tanto, se establece primero la localización deseada de las raíces dominantes, de forma que éstas satisfagan las especificaciones en términos de ζ y ω_n, como se muestra en la Figura 10.11(a). Se traza el lugar de las raíces del sistema no compensado, como se ilustra en la Figura 10.11(b). Después se agrega el cero para proporcionar un adelanto de

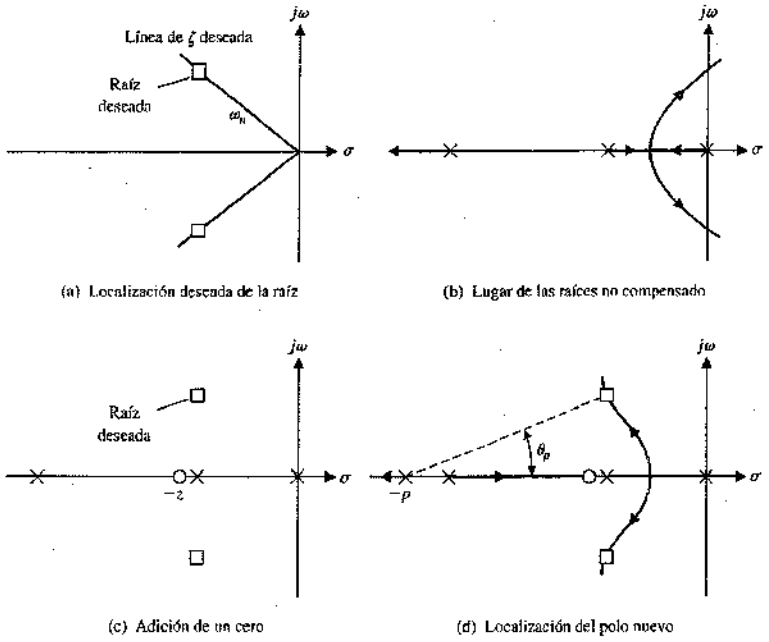


FIGURA 10.11
Compensación en el plano s usando una red de adelanto de fase.

fase colocándolo a la izquierda de los dos primeros polos reales. Realmente, se debe tener cierta precaución, pues el cero no debe alterar el dominio de las raíces deseadas; esto es, el cero no se deberá colocar más cerca del origen que el segundo polo en el eje real, o resultará una raíz real cerca del origen y dominará la respuesta del sistema. Por esto, en la Figura 10.11(c) se observa que la raíz deseada está directamente sobre el segundo polo y se coloca el cero z ligeramente a la izquierda del polo.

Entonces la raíz real estará cerca del cero real; el coeficiente de este término del desarrollo de la fracción parcial será relativamente pequeño y así la respuesta debida a esta raíz real tendrá poco efecto en la respuesta total del sistema. Sin embargo, el diseñador debe tener siempre presente que la respuesta del sistema compensado estará influida por las raíces y ceros del sistema y que las raíces dominantes por sí mismas no dictan la respuesta. Normalmente, es prudente dejar algún margen de error en el diseño y probar el sistema compensado empleando una simulación por computador.

Como la raíz deseada está en un punto del lugar de las raíces cuando se efectúa la compensación final, se espera que la suma algebraica de los ángulos de los vectores sea de 180° en ese punto. Por esto, se calcula el ángulo desde el polo del compensador, θ_p, para obtener un ángulo total de 180°. Entonces, localizando una línea en un ángulo θ_p que interseque la raíz deseada, se puede calcular el polo compensador, p, como se muestra en la Figura 10.11(d).

La ventaja del método del plano s es la posibilidad de que el diseñador especifique la localización de las raíces dominantes y, por tanto, la respuesta transitoria dominante. La desventaja de este método es que no se puede especificar directamente una constante de error (por ejemplo, K_p) como en el método del diagrama de Bode. Una vez completo el

diseño, se calcula la ganancia del sistema en la localización de las raíces, la cual depende de p y z, y entonces se calcula la constante de error para el sistema compensado. Si la constante de error no es satisfactoria, se debe repetir el proceso del diseño y alterar la localización deseada de las raíces, así como la localización del polo y del cero del compensador. Se consideran de nuevo los dos ejemplos estudiados en la sección anterior y se diseñará una red de compensación usando el método del lugar de las raíces (plano s).

EJEMPLO 10.3. Compensador por adelanto de fase utilizando el lugar de las raíces

Se considera de nuevo el sistema del Ejemplo 10.1 donde la función de transferencia del lazo abierto no compensado es

$$GH(s) = \frac{K_1}{s^2}. \tag{10.31}$$

La ecuación característica del sistema no compensado es

$$1 + GH(s) = 1 + \frac{K_1}{s^2} = 0, \tag{10.32}$$

y el lugar de las raíces es el eje $j\omega$. Por tanto, se desea compensar este sistema con una red

$$G_c(s) = \frac{s + z}{s + p}, \tag{10.33}$$

donde $|z| < |p|$. Las especificaciones para el sistema son:

Tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%), $T_s \leqslant 4$ segundos;
Tanto por ciento de sobreelongación para una entrada de escalón $\leqslant 35\%$.

Por tanto, la razón de amortiguamiento deberá ser $\zeta \geqslant 0.32$. El requisito del tiempo de asentamiento es

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4,$$

y, en consecuencia, $\zeta\omega_n = 1$. Así pues, se escoge una localización deseada de la raíz dominante como

$$r_1, \hat{r}_1 = -1 \pm j2, \tag{10.34}$$

como se muestra en la Figura 10.12 (por lo que $\zeta = 0.45$).

Ahora se coloca el cero del compensador directamente bajo la localización deseada en $s = -z = -1$, como se muestra en la Figura 10.12. Entonces, midiendo el ángulo en la raíz deseada, se tiene

$$\phi = -2(116°) + 90° = -142°.$$

Por tanto, para tener un total de 180° en la raíz deseada, se calcula el ángulo por el polo indeterminado, θ_p, como

$$-180° = -142° - \theta_p, \tag{10.35}$$

o $\theta_p = 38°$. Entonces se dibuja una línea con un ángulo $\theta_p = 38°$ que interseque la localización deseada de las raíces y el eje real como se muestra en la Figura 10.12. El punto de intersección con el eje real es entonces $s = -p = -3.6$. Por tanto, el compensador es

$$G_c(s) = \frac{s + 1}{s + 3.6}, \tag{10.36}$$

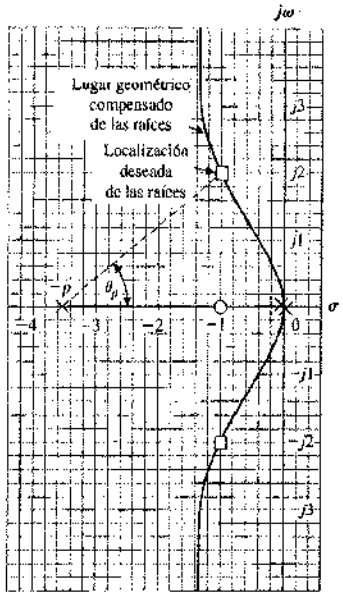


FIGURA 10.12
Compensación de adelanto de fase para el Ejemplo 10.3.

y la función de transferencia compensada para el sistema es

$$GH(s)G_c(s) = \frac{K_1(s+1)}{s^2(s+3.6)}. \tag{10.37}$$

La ganancia K_1 se calcula midiendo las longitudes de los vectores desde los polos y ceros hasta la localización de las raíces. De aquí,

$$K_1 = \frac{(2.23)^2(3.25)}{2} = 8.1. \tag{10.38}$$

Finalmente, se calculan las constantes de error de este sistema. Se observa que este sistema con dos integraciones de lazo abierto dará como resultado un error en estado estacionario de cero para las señales de entrada de escalón y de rampa. La constante de aceleración es

$$K_a = \frac{8.1}{3.6} = 2.25. \tag{10.39}$$

El comportamiento de este sistema en estado estacionario es del todo satisfactorio y, por tanto, la compensación es completa. Cuando comparamos la red de compensación calculada por el método del plano s con la red obtenida usando el método del diagrama de Bode, observamos que la magnitud de los polos y ceros es diferente. Sin embargo, el sistema que resulta tendrá el mismo comportamiento, sin que uno se tenga que preocupar por la diferencia. De hecho, la diferencia surge por el paso arbitrario de diseño (número 3), que coloca el cero directamente bajo la localización deseada de las raíces. Si se coloca el cero en $s = -2.0$, se comprueba que el polo calculado por el método del plano s es aproximadamente igual al polo calculado por el método del diagrama de Bode.

Las especificaciones para la respuesta transitoria de este sistema se expresaron originalmente en términos de la sobreelongación y del tiempo de asentamiento del sistema. Estas especificaciones se trasladaron, con base en una aproximación del sistema por un sistema de segundo orden, a un equivalente ζ y ω_n; por tanto, a una localización deseada de las raíces. Sin embargo, las especificaciones originales se satisfacen únicamente si las raíces seleccionadas son dominantes. El cero del compensador y la raíz que resulta por la agregación del polo compensador producen un sistema de tercer orden con un cero. La validez de la aproximación de este sistema con uno de segundo orden sin un cero depende de la validez de la suposición de dominio. Frecuentemente, el diseñador simulará el diseño final usando un computador digital y obtendrá la respuesta transitoria real del sistema. En este caso, una simulación del sistema en computador da como resultado una sobreelongación del 46% y un tiempo de asentamiento de 3.8 segundos para una entrada escalón. Estos valores se comparan moderadamente bien con los especificados del 35% y 4 segundos, justificando la utilización de las especificaciones de la raíz dominante. La diferencia en el valor especificado del sobrenivel se debe a la tercera raíz, que no es despreciable. Por tanto, nuevamente se sigue que la especificación de las raíces dominantes es un enfoque útil, pero que debe utilizarse con precaución y entendimiento. Un segundo intento para obtener un sistema compensado con una sobreelongación del 30% utilizaría un prefiltro para eliminar el efecto del cero en la función de transferencia en lazo cerrado, como se describe en la Sección 10.10. ■

EJEMPLO 10.4. Compensador por adelanto de fase para un sistema de tipo uno

Se considera ahora el sistema del Ejemplo 10.2 y se va a diseñar un compensador basado en el método del lugar de las raíces. La función de transferencia de lazo abierto del sistema es

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+2)}. \tag{10.40}$$

Se desea que la relación de amortiguamiento de las raíces dominantes del sistema sea $\zeta = 0.45$ y que la constante de error de la velocidad sea igual a 20. Para satisfacer el requisito de la constante de error, la ganancia del sistema no compensado debe ser $K = 40$. Cuando $K = 40$, las raíces del sistema no compensado son

$$s^2 + 2s + 40 = (s + 1 + j6.25)(s + 1 - j6.25). \tag{10.41}$$

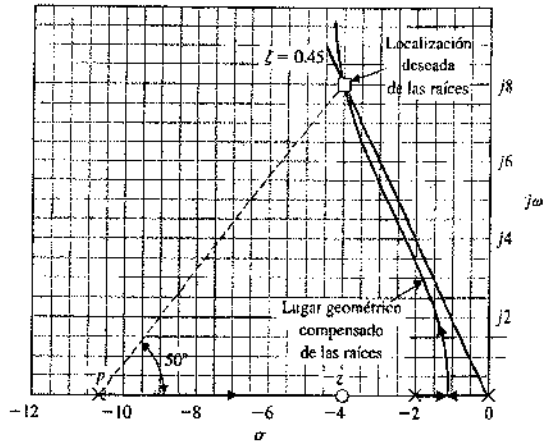
La razón de amortiguamiento de las raíces no compensadas es aproximadamente de 0.16, y por tanto se debe agregar una red de compensación. Para obtener un tiempo de estabilización rápido, se seleccionará la parte real de las raíces deseadas como $\zeta\omega_n = 4$ y, por tanto, $T_s = 1$ segundo. Así mismo, la frecuencia natural de estas raíces es bastante grande, $\omega_n = 9$; por consiguiente, la constante de velocidad deberá ser razonablemente grande. La localización deseada de las raíces se muestra en la Figura 10.13(a) para $\zeta\omega_n = 4$, $\zeta = 0.45$ y $\omega_n = 9$.

El cero del compensador se coloca en $s = -z = -4$, directamente bajo la localización deseada de las raíces. Entonces el ángulo en esta localización es

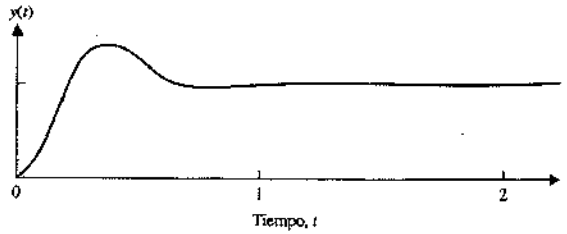
$$\phi = -116° - 104° + 90° = -130°. \tag{10.42}$$

Por tanto, el ángulo desde el polo indeterminado se establece a partir de

$$-180° = -130° - \theta_p,$$



(a)



(b)

FIGURA 10.13
(a) Diseño de una red de adelanto de fase en el plano s para el Ejemplo 10.4. (b) Respuesta escalón del sistema compensado del Ejemplo 10.4.

y así $\theta_p = 50°$. Este ángulo se dibuja de forma que interseque la localización deseada de las raíces y p se calcula como $s = -p = -10.6$, según se muestra en la Figura 10.13(a). La ganancia del sistema compensado es

$$K = \frac{9(8.25)(10.4)}{8} = 96.5. \tag{10.43}$$

El sistema compensado es entonces

$$G_c(s)GH(s) = \frac{96.5(s + 4)}{s(s + 2)(s + 10.6)}. \tag{10.44}$$

Por tanto, la constante de velocidad del sistema compensado es

$$K_v = \lim_{s \to 0} s[G(s)H(s)G_c(s)] = \frac{96.5(4)}{2(10.6)} = 18.2. \tag{10.45}$$

La constante de velocidad del sistema compensado es menor que el valor deseado de 20. Por tanto, se debe repetir el procedimiento de diseño para una segunda elección de una raíz deseada. Si se escoge $\omega_n = 10$, el proceso puede repetirse y se aumentará la ganancia resultante K. La localización del polo y el cero del compensador también se alterará. Entonces se puede calcular nuevamente la constante de velocidad. Se deja como ejercicio para el lector demostrar que para $\omega_n = 10$, la constante de velocidad es $K_v = 22.7$ cuando $z = 4.5$ y $p = 11.6$.

Finalmente, para la red de compensación de la Ecuación (10.44), se tiene

$$G_c(s) = \frac{s + 4}{s + 10.6} = \frac{(s + 1/\alpha\tau)}{(s + 1/\tau)}. \tag{10.46}$$

El diseño de una red de adelanto RC, como se muestra en la Figura 10.4, se deduce directamente de las Ecuaciones (10.46) y (10.7), y es

$$G_c(s) = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\frac{(R_1Cs + 1)}{(R_1R_2/(R_1 + R_2))Cs + 1)}. \tag{10.47}$$

Por ello, en este caso, se tiene

$$\frac{1}{R_1C} = 4 \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{10.6}{4}.$$

Entonces, tomando $C = 1$ μf, se obtiene $R_1 = 250\,000\ \Omega$ y $R_2 = 152\,000\ \Omega$. La respuesta de escalón del sistema compensado produce una sobreelongación del 80% con un tiempo de asentamiento de 0.8 segundos, como se mostró en la Figura 10.13(b). Como se mencionó allí, se puede utilizar un computador para verificar la respuesta transitoria real. ■

La red de compensación de adelanto de fase es un compensador útil para alterar el comportamiento de un sistema de control. La red de adelanto de fase añade un ángulo de adelanto de fase para proporcionar el margen de fase adecuado para los sistemas de realimentación. Usando un método de diseño en el plano s, la red de adelanto de fase se puede elegir para alterar el lugar de las raíces del sistema y colocarlas en una posición deseada en el plano s. Cuando las especificaciones de diseño incluyen un requisito de constante de error, es más adecuado el método del diagrama de Bode, pues la constante de error de un sistema diseñado en el plano s se debe obtener tras la elección del polo y el cero del compensador. Por tanto, el método del lugar de las raíces frecuentemente da como resultado un procedimiento iterativo de diseño cuando se especifica la constante de error. Por otra parte, el lugar de las raíces es un método muy satisfactorio cuando las especificaciones se dan en términos de la sobreelongación y del tiempo de asentamiento, especificando así ζ y ω_n de las raíces dominantes deseadas en el plano s. El uso de un compensador de red de adelanto siempre extiende el ancho de banda de un sistema de realimentación, lo cual puede ser objetable para sistemas sujetos a una cantidad grande de ruidos. Así mismo, las redes de adelanto no son adecuadas para proporcionar sistemas de alta exactitud en estado estacionario que necesitan constantes de error muy elevadas. Para proporcionar constantes de error elevadas, típicamente K_p y K_v, se debe considerar el uso de redes de compensación del tipo integrador, por lo que esto será el tema de la siguiente sección.

10.6. DISEÑO DE SISTEMAS UTILIZANDO REDES DE INTEGRADORES

Para un gran porcentaje de sistemas de control, el objetivo principal es obtener una gran precisión en estado estacionario. Además, se desea mantener el comportamiento transitorio de estos sistemas dentro de límites razonables. Como se ha visto en los Capítulos 4 y 5.

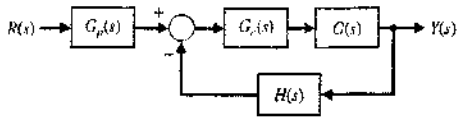


FIGURA 10.14
Sistema de control con realimentación de lazo simple.

la precisión en estado estacionario de muchos sistemas con realimentación puede mejorarse aumentando la ganancia del amplificador en el canal de avance. Sin embargo, la respuesta transitoria resultante puede ser totalmente inaceptable, incluso inestable. Por tanto, frecuentemente es necesario introducir una red de compensación en la trayectoria de avance de un sistema de control con realimentación para proporcionar una precisión suficiente en estado estacionario.

Considérese el sistema de control de lazo simple mostrado en la Figura 10.14. La red de compensación se escoge con el objeto de proporcionar una constante de error grande. El error en estado estacionario de este sistema es

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{R(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)}\right]. \tag{10.48}$$

En la Sección 5.7 se mostró que el error en estado estacionario de un sistema depende del número de polos en el origen para $G_c(s)G(s)H(s)$. Un polo en el origen se puede considerar una integración, por lo que la precisión de un sistema en estado estacionario depende finalmente del número de integraciones en la función de transferencia $G_c(s)G(s)H(s)$. Si no es suficiente la precisión en estado estacionario, se introduce una **red de tipo integrador** $G_c(s)$ para compensar la falta de integraciones en la función de transferencia original $G(s)H(s)$.

Un regulador muy utilizado es el **controlador proporcional integral (PI)**, que tiene la función de transferencia

$$\boxed{G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s}.} \tag{10.49}$$

Como ejemplo, se considera un sistema de control de temperatura donde la función de transferencia $H(s) = 1$, y la función de transferencia del proceso de calor es [32]

$$G(s) = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}.$$

El error en estado estacionario del sistema no compensado es entonces

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{A/s}{1 + G(s)H(s)}\right] = \frac{A}{1 + K_1}, \tag{10.50}$$

donde $R(s) = A/s$ es una señal de entrada de escalón. Evidentemente, para obtener un error en estado estacionario bajo (menor que 0.05 A, por ejemplo), la magnitud de la ganancia K_1 debe ser suficientemente grande. Sin embargo, cuando K_1 es suficientemente grande, es muy probable que el comportamiento transitorio del sistema sea inaceptable. Por tanto, se debe considerar el añadir una función de transferencia de compensación $G_c(s)$, como se muestra en la Figura 10.14. Para eliminar el error de este sistema en estado estacionario, se podría escoger la compensación como

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p s + K_I}{s}. \tag{10.51}$$

Esta compensación puede construirse fácilmente usando un integrador y un amplificador y sumando sus señales de salida. Ahora bien, el error del sistema en estado estacionario para una entrada de escalón siempre es cero, pues

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} s\,\frac{A/s}{1 + G_c(s)GH(s)} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{A}{1 + [(K_p s + K_I)/s][K_1/[(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)]]} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{10.52}$$

El comportamiento transitorio puede ajustarse para satisfacer las especificaciones del sistema ajustando las constantes K_1, K_P y K_I. El ajuste de la respuesta transitoria quizá se logre mejor usando los métodos del lugar de las raíces del Capítulo 7 y dibujando un lugar de las raíces para la ganancia $K_P K_1$ tras localizar el cero $s = -K_I/K_P$ en el plano s por el método delineado para el plano s en la sección anterior.

La adición de una integración como $G_c(S) = K_P + (K_I/s)$ también se puede usar para reducir el error en estado estacionario para una entrada de rampa, $r(t) = t$, $t \geq 0$. Por ejemplo, si el sistema no compensado $GH(s)$ tuviera una integración, la integración adicional debida a $G_c(s)$ daría como resultado un error de cero en estado estacionario para una entrada de rampa. Para ilustrar el diseño de este tipo de compensación por integración, se considerará en más detalle un sistema de control de temperatura.

EJEMPLO 10.5. Sistema de control de temperatura

La función de transferencia del lazo no compensado de un sistema de control de temperatura es

$$GH(s) = \frac{K_1}{(2s + 1)(0.5s + 1)}, \tag{10.53}$$

donde K_1 puede ajustarse. A fin de mantener un error de cero en estado estacionario para una entrada de escalón, se añade la red de compensación

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P\left(\frac{s + K_I/K_P}{s}\right). \tag{10.54}$$

Además, se necesita que la respuesta transitoria del sistema tenga una sobreelongación menor o igual que el 10%. Por tanto, las raíces complejas dominantes deben estar en (o bajo) la línea $\zeta = 0.6$, como se muestra en la Figura 10.15. Se ajustará el cero del compensador de forma que la parte real de las raíces complejas sea $\zeta\omega_n = 0.75$, y así el tiempo de estabilización es $T_s = 4/\zeta\omega_n = 16/3$ segundos. Ahora bien, como en la sección anterior, se determina la localización del cero, $z = -K_I/K_P$, asegurando que el ángulo en la raíz deseada sea de $-180°$. Por tanto, la suma de los ángulos en la raíz deseada es

$$-180° = -127° - 104° - 38° + \theta_z,$$

donde θ_z es el ángulo desde el cero indeterminado. Por tanto, se encuentra que $\theta_z = +89°$ y la localización del cero es $z = -0.75$. Finalmente, para determinar la ganancia deseada de las raíces, se calculan las longitudes vectoriales desde los polos y ceros, y se obtiene

$$K = K_1 K_P = \frac{1.25(1.03)1.6}{1.0} = 2.08.$$

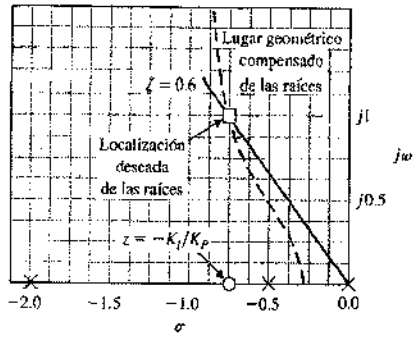


FIGURA 10.15
Diseño del plano s de un compensador integrador.

El lugar geométrico compensado de las raíces y la localización del cero se muestran en la Figura 10.15. Obsérvese que el cero, $z = -K_I/K_P$, deberá colocarse a la izquierda del polo en $s = -0.5$ para asegurar que las raíces complejas dominen la respuesta transitoria. De hecho, la tercera raíz del sistema compensado de la citada figura puede determinarse como $s = -1.0$; por tanto, esta raíz real es solamente 4/3 veces la parte real de las raíces complejas. Así, aunque las raíces complejas dominen la respuesta del sistema, el amortiguamiento equivalente de éste es ligeramente menor que $\zeta = 0.60$ debido al cero y al polo reales.

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema de la Figura 10.14 es

$$T(s) = \frac{G_p G_c G(s)}{1 + G_c G(s)} = \frac{2.08(s + 0.75)G_p(s)}{(s + 1)(s + r_1)(s + \bar{r}_1)}, \tag{10.55}$$

donde $r_1 = -0.75 + j1$. El efecto del cero es aumentar la sobreelongación para una entrada escalón (*véase* la Figura 5.13). Si se desea mantener la sobreelongación del 5% se puede utilizar un prefiltro $G_p(s)$, de manera que el cero se elimina en $T(s)$ fijando

$$G_p(s) = \frac{0.75}{(s + 0.75)}. \tag{10.56}$$

Obsérvese que la ganancia total cc (fijada para $s = 0$) es $T(0) = 1.0$ cuando $G_p(s) = 1$ o si se utiliza el prefiltro de la Ecuación (10.56). La sobreelongación sin el prefiltro es del 17.6%; con el prefiltro es del 2%. En la Sección 10.10 se tratará de nuevo el uso del prefiltro. ■

10.7. DISEÑO POR RETARDO DE FASE UTILIZANDO EL LUGAR DE LAS RAÍCES

La red *RC* de retardo de fase de la Figura 10.6 es del tipo de integración y puede usarse para aumentar la constante de error de un sistema de control por realimentación. En la Sección 10.3 mostramos que la función de transferencia de la red de retardo de fase *RC* es de la forma

$$G_c(s) = \frac{1}{\alpha}\frac{(s + z)}{(s + p)}, \tag{10.57}$$

como se mostró en la Ecuación (10.13), donde

$$z = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{R_2 C}, \qquad \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \qquad \text{y} \qquad p = \frac{1}{\alpha\tau}.$$

El error en estado estacionario de un sistema no compensado es

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\left\{\frac{R(s)}{1 + GH(s)}\right\}. \tag{10.58}$$

Entonces, por ejemplo, la constante de velocidad de un sistema de tipo uno es

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\{GH(s)\}, \tag{10.59}$$

como se mostró en la Sección 5.7. Por tanto, si $GH(s)$ se escribe

$$GH(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{M}(s + z_i)}{s\prod_{j=1}^{n}(s + p_j)}, \tag{10.60}$$

se obtiene la constante de velocidad

$$K_v = \frac{K\prod_{i=1}^{M} z_i}{\prod_{j=1}^{n} p_j}. \tag{10.61}$$

Ahora se añade la red de retardo de fase del tipo de integración como un compensador y se determina la constante compensada de velocidad. Si la constante de velocidad del sistema no compensado (Ecuación 10.61) se designa como $K_{v_{\text{nocomp}}}$, se tiene

$$K_{v_{\text{comp}}} = \lim_{s\to 0} s\{G_c(s)GH(s)\} = \lim_{s\to 0}\{G_c(s)\}K_{v_{\text{nocomp}}}$$
$$= \left(\frac{z}{p}\right)\left(\frac{1}{\alpha}\right)K_{v_{\text{nocomp}}} = \left(\frac{z}{p}\right)\left(\frac{K}{\alpha}\right)\left(\frac{pz_i}{\Pi p_j}\right). \tag{10.62}$$

La ganancia en el lugar geométrico compensado de las raíces en la localización deseada de éstas será (K/α). Ahora bien, si el polo y el cero del compensador se escogen de forma que $|z| = \alpha|p| < 1$, la K_v resultante se aumentará en la localización deseada de las raíces en una relación $z/p = \alpha$. Por ejemplo, si $z = 0.1$ y $p = 0.01$, la constante de velocidad en la localización deseada de las raíces se aumentará por un factor de 10. Sin embargo, si el polo y el cero del compensador aparecen relativamente cercanos en el plano s, su efecto sobre la localización deseada de las raíces será despreciable. Por tanto, puede usarse la combinación polo-cero del compensador cerca del origen en el plano s en comparación con ω_n para aumentar la constante de error de un sistema de realimentación en un factor α, mientras que la localización de las raíces se altera muy ligeramente. El factor α tiene un límite superior, típicamente cerca de 100, debido a que los resistores y condensadores requeridos en la red se hacen excesivamente grandes para una α mayor. Por ejemplo, cuando $z = 0.1$ y $\alpha = 100$, se sigue a partir de la Ecuación (10.57) que

$$z = 0.1 = \frac{1}{R_2 C} \qquad \text{y} \qquad \alpha = 100 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}.$$

Si se hace $C = 10$ μf, entonces $R_1 = 1$ MΩ y $R_2 = 99$ MΩ. Cuando se aumenta α, aumenta la magnitud requerida de R_1. Sin embargo, se notará que una atenuación, α, de 1000 o más puede obtenerse utilizando reguladores de proceso neumáticos que se aproximen a una característica de retardo de fase (Figura 10.8).

Los pasos necesarios para el diseño de una red de retardo de fase en el plano s son los siguientes:

1. Se obtiene el lugar de las raíces del sistema no compensado.
2. Se determinan las especificaciones del comportamiento transitorio para el sistema y la localización adecuada de las raíces dominantes en el lugar geométrico no compensado de éstas, que cumpla las especificaciones.
3. Se calcula la ganancia del lazo en la localización deseada de las raíces y, así, la constante de error del sistema.
4. Se compara la constante no compensada de error con la deseada y se calcula el aumento necesario que debe resultar por la relación polo-cero del compensador, α.
5. Con la relación conocida de la combinación polo-cero del compensador, se determina una localización adecuada del polo y del cero del compensador de forma que el lugar geométrico compensado de las raíces pase todavía por la localización deseada de las raíces. Se localiza el polo y el cero cercano al origen en el plano s en comparación con ω_n.

El quinto requisito se puede satisfacer si la magnitud del polo y del cero son significativamente menores que ω_n de las raíces dominantes y si parecen confundirse cuando se miden desde la localización deseada de las raíces. El polo y el cero parecerán confundirse en la localización de las raíces si los ángulos desde el polo y el cero del compensador son esencialmente iguales a los medidos para la localización de las raíces. Un método para localizar el cero y el polo del compensador se basa en el requisito de que la diferencia entre el ángulo del polo y el del cero, medidos en la raíz deseada, sea menor que 2°. Un ejemplo ilustrará este método para el diseño de un compensador de retardo de fase.

EJEMPLO 10.6. Diseño de un compensador de retardo de fase

Considérese el sistema no compensado del Ejemplo 10.2, donde la función de transferencia no compensada de lazo abierto es

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+2)}. \tag{10.63}$$

Se necesita que la razón de amortiguamiento de las raíces complejas dominantes sea 0.45 y obtener una constante de velocidad del sistema igual a 20. El lugar geométrico no compensado de las raíces es una línea vertical en $s = -1$ y da como resultado una raíz en la línea $\zeta = 0.45$ en $s = +1 \pm j2$, como se muestra en la Figura 10.16. Midiendo la ganancia en esta raíz, tenemos $K = (2.24)^2 = 5$. Por tanto, la constante de velocidad del sistema no compensado es

$$K_p = \frac{K}{2} = \frac{5}{2} = 2.5.$$

Por esto, la relación del cero al polo del compensador es

$$\left|\frac{z}{p}\right| = \alpha = \frac{K_{p_{\text{deseada}}}}{K_{p_{\text{no comp.}}}} = \frac{20}{2.5} = \frac{z}{8}. \tag{10.64}$$

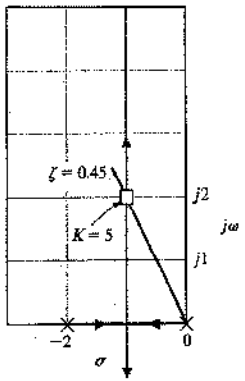


FIGURA 10.16. Lugar de las raíces del sistema no compensado del Ejemplo 10.6.

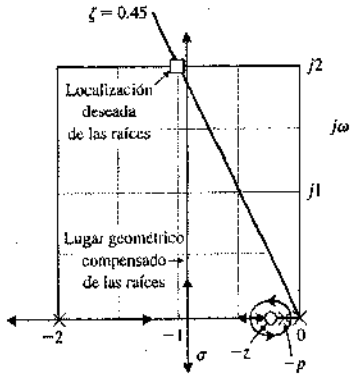


FIGURA 10.17. Lugar de las raíces del sistema compensado del Ejemplo 10.6. Obsérvese que la raíz real diferirá de la deseada en una pequeña cantidad. La parte vertical de la cuadrícula deja el eje σ en $\sigma = -0.95$.

Examinando la Figura 10.17, se observa que se podría hacer $z = -0.1$ y entonces $p = -0.1/8$. La diferencia de los ángulos desde p y z en la raíz deseada es de aproximadamente un grado, por lo que $s = -1 \pm j2$ es todavía la localización de las raíces dominantes. En la Figura 10.17 se muestra en línea gruesa un bosquejo del lugar geométrico compensado de las raíces. Por tanto, la función de transferencia del sistema compensado es

$$G_c(s)GH(s) = \frac{5(s+0.1)}{s(s+2)(s+0.0125)}, \tag{10.65}$$

donde $(K/\alpha) = 5$ o $K = 40$, para tener en cuenta la atenuación de la red de retardo. ■

EJEMPLO 10.7. Diseño de un compensador de retardo de fase

Se considera ahora un sistema difícil de compensar mediante una red de adelanto de fase. La función de transferencia de lazo abierto del sistema no compensado es

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+10)^2}. \tag{10.66}$$

Se especifica que la constante de velocidad de este sistema sea igual a 20, en tanto que la razón de amortiguamiento de las raíces dominantes será igual a 0.707. La ganancia necesaria para una K_p de 20 es

$$K_p = 20 = \frac{K}{(10)^2},$$

o $K = 2000$. Sin embargo, usando el criterio de Routh, se sigue que las raíces de la ecuación característica caen en el eje $j\omega$ en $\pm j10$ cuando $K = 2000$. Evidentemente, las raíces del sistema, cuando se satisface el requisito de K_p, distan mucho de satisfacer la especificación de la relación de amortiguamiento, y sería difícil traer las raíces dominantes

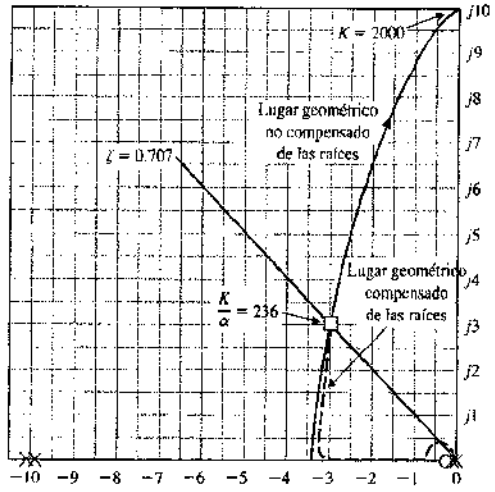


FIGURA 10.18
Diseño de un compensador de retardo de fase en el plano *s*.

desde el eje $j\omega$ hasta la línea $\zeta = 0.707$ usando un compensador de adelanto de fase. Por tanto, se intentará satisfacer los requisitos de K_v y ζ usando una red de retardo de fase. El lugar geométrico no compensado de las raíces de este sistema se muestra en la Figura 10.18 y las raíces se muestran cuando $\zeta = 0.707$ y $s = -2.9 \pm j2.9$. Midiendo la ganancia en estas raíces, se obtiene que $K = 236$. Por tanto, la relación necesaria del cero al polo del compensador (haciendo uso de la Ecuación 10.64) es

$$\alpha = \left|\frac{z}{p}\right| = \frac{2000}{236} = 8.5.$$

Así, se escogerán $z = 0.1$ y $p = 0.1/9$ para permitir un pequeño margen de seguridad. Examinando la Figura 10.18, se observa que la diferencia entre los ángulos desde el polo y el cero de $G_c(s)$ es despreciable. Por tanto, el sistema compensado es

$$G_c(s)GH(s) = \frac{236(s + 0.1)}{s(s + 10)^2(s + 0.0111)}, \tag{10.67}$$

donde $(K/\alpha) = 236$ y $\alpha = 9$. ■

El diseño de un compensador de integración para aumentar la constante de error de un sistema no compensado de control es particularmente ilustrativo usando los métodos del lugar de las raíces y del plano *s*. A continuación se vuelven a presentar métodos de utilidad semejante de diseño de la compensación de integración, utilizando los diagramas de Bode.

10.8. DISEÑO POR RETARDO DE FASE UTILIZANDO EL DIAGRAMA DE BODE

El diseño de una red *RC* de retardo de fase adecuada para compensar un sistema de control por realimentación, puede efectuarse fácilmente en el diagrama de Bode. La ventaja de este diagrama nuevamente es clara porque sólo se añade la respuesta en frecuencia

del compensador al diagrama de Bode del sistema no compensado para obtener una respuesta de frecuencia satisfactoria. La función de transferencia de la red de retardo de fase escrita en la forma del diagrama de Bode es

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\alpha\tau}, \tag{10.68}$$

como se mostró en la Ecuación (10.14). En la Figura 10.8 se muestra el diagrama de Bode de la red de retardo de fase para dos valores de α. En el diagrama de Bode, el polo y el cero del compensador tienen una magnitud mucho menor que el polo más pequeño del sistema no compensado. Por esto, el retardo de fase no es el efecto útil del compensador sino más bien la atenuación de $-20 \log \alpha$, que es el efecto útil para la compensación. La red de retardo de fase se usa para proporcionar una atenuación y, por tanto, para bajar la frecuencia de 0 dB (de cruce) del sistema. Sin embargo, con frecuencias de cruce más bajas, generalmente se observa que aumenta el margen de fase del sistema y se pueden satisfacer nuestras especificaciones. El procedimiento de diseño para una red de retardo de fase en el diagrama de Bode es el siguiente:

1. Se dibuja el diagrama de Bode del sistema no compensado con la ganancia ajustada para la constante de error deseada.
2. Se determina el margen de fase del sistema no compensado y, si no es suficiente, se procede con los siguientes pasos.
3. Se determina la frecuencia donde se cumpliría el requisito del margen de fase si la curva de magnitud cruzara la línea de 0 dB en esta frecuencia, ω_c'. (Se tiene en cuenta un retardo de fase de 5° por la red de retardo de fase cuando se determine la nueva frecuencia de cruce.)
4. Se coloca el cero del compensador una década bajo la nueva frecuencia de cruce ω_c', asegurando así un retardo de solamente 5° en ω_c' (*véase* la Figura 10.8) debido a la red de retardo.
5. Se mide la atenuación necesaria en ω_c' para asegurar que la curva de magnitud cruza en esta frecuencia.
6. Se calcula α teniendo en cuenta que la atenuación es $-20 \log \alpha$ en ω_c'.
7. Se calcula el polo como $\omega_p = 1/\alpha\tau = \omega_c'/\alpha$ y el diseño se completa.

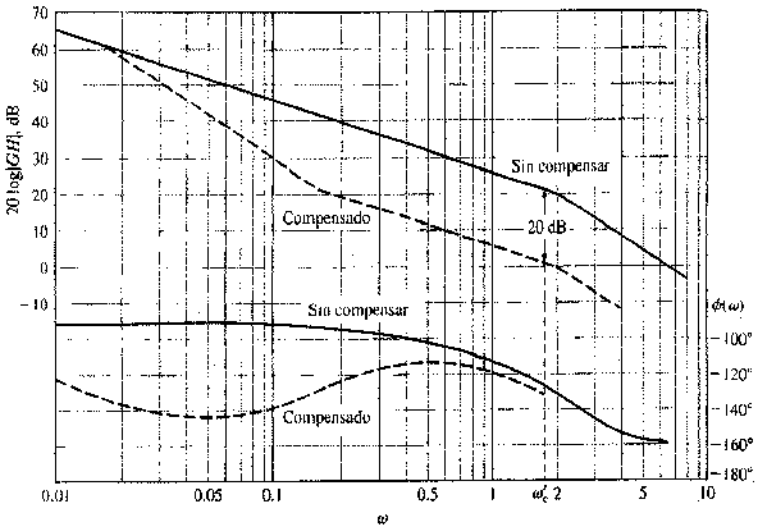
Un ejemplo de este procedimiento de diseño ilustrará que el método es fácil de llevar a la práctica.

EJEMPLO 10.8. Diseño de una red de retardo de fase

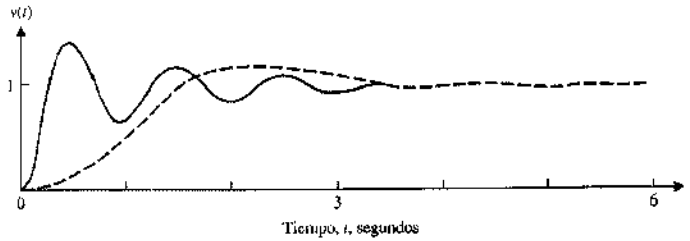
Se reconsidera el sistema del Ejemplo 10.6 y se va a diseñar una red de retardo de fase para obtener el margen de fase deseado. La función de transferencia no compensada es

$$GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 2)} = \frac{K_v}{j\omega(0.5j\omega + 1)}, \tag{10.69}$$

donde $K_v = K/2$. Se desea que $K_v = 20$ y obtener un margen de fase de 45°. En la Figura 10.19 se muestra con líneas continuas el diagrama de Bode no compensado. El sistema no compensado tiene un margen de fase de 20°, y éste se debe aumentar. Dejando 5° para el compensador de retardo de fase, se localiza la frecuencia ω donde $\phi(\omega) = -130°$, que debe ser la nueva frecuencia de cruce ω_c'. En este caso, se observa que $\omega_c' = 1.5$, con un pequeño margen de seguridad. La atenuación necesaria para



(a)



(b)

FIGURA 10.19
(a) Diseño de una red de retardo de fase en el diagrama de Bode para el Ejemplo 10.8. (b) Respuesta temporal frente a una entrada escalón para el sistema no compensado (línea continua) y el sistema compensado (línea punteada) del Ejemplo 10.8.

hacer que ω_c' sea la nueva frecuencia de cruce es igual a 20 dB, tomando en cuenta una diferencia de 2 dB entre las curvas real y asintótica.

Entonces se encuentra que 20 dB = 20 log α, o $\alpha = 10$. Por tanto, el cero está una década bajo el cruce, o $\omega_z = \omega_c'/10 = 0.15$, y el polo está en $\omega_p = \omega_z/10 = 0.015$. El sistema compensado es entonces

$$G_c(j\omega)GH(j\omega) = \frac{20(6.66j\omega + 1)}{j\omega(0.5j\omega + 1)(66.6j\omega + 1)}. \tag{10.70}$$

La respuesta de frecuencia del sistema compensado se muestra en la Figura 10.19(a) con líneas discontinuas. Es evidente que el retardo de fase introduce una atenuación que baja la frecuencia de cruce y, por tanto, aumenta el margen de fase. Obsérvese que el ángulo de fase de la red de retardo ha desaparecido casi totalmente en la frecuencia de cruce ω_c'. Como comprobación final, se calcula numéricamente el margen de fase en $\omega_c' = 1.5$ y se determina que $\phi_{mf} = 45°$, que es el resultado deseado. Usando la carta de Nichols, se

encuentra que el ancho de banda de lazo cerrado del sistema se ha reducido de $\omega = 10$ rad/s para el sistema no compensado hasta $\omega = 2.5$ rad/s para el sistema compensado. Debido a la reducción del ancho de banda, se espera un tiempo de respuesta más lento a una entrada escalón. ■

En la Figura 10.19(b) se muestra la respuesta temporal del sistema. Obsérvese que la sobreelongación es del 25% y el tiempo de pico de 2 segundos. Así, la respuesta cumple las especificaciones.

EJEMPLO 10.9. Diseño de un compensador red de retardo de fase

Se reconsidera el sistema del Ejemplo 10.7, que es

$$GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 10)^2} = \frac{K_v}{j\omega(0.1j\omega + 1)^2}, \tag{10.71}$$

donde $K_v = K/100$. Se especifica una constante de velocidad de K_v igual a 20. Además, se necesita una relación de amortiguamiento de 0.707 para las raíces dominantes. Según la Figura 9.21, se calcula que se necesita un margen de fase de 65°. La respuesta de frecuencia del sistema no compensado se muestra en la Figura 10.20. El margen de fase del sistema no compensado es de cero grados. Dejando 5° para la red de retardo, se localiza la frecuencia donde la fase es −110°. Esta frecuencia es igual a 1.74, y por tanto se intentará localizar la nueva frecuencia de cruce en $\omega_c' = 1.5$. Midiendo la atenuación necesaria en $\omega = \omega_{c1}'$, se comprueba que se necesitan 23 dB. Por tanto, 23 = 20 log α, o $\alpha = 14.2$. El cero del compensador se localiza una década bajo la frecuencia de cruce, por lo que

$$\omega_z = \frac{\omega_c'}{10} = 0.15.$$

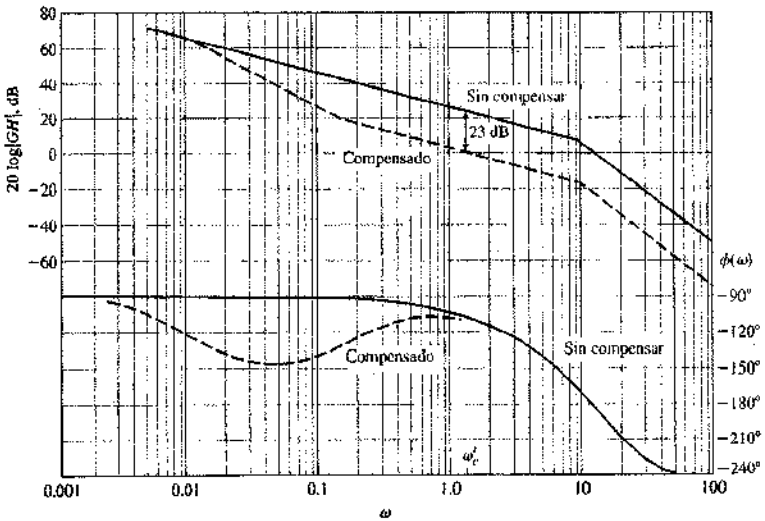


FIGURA 10.20. Diseño de una red de retardo de fase en el diagrama de Bode para el Ejemplo 10.9.

El polo es entonces

$$\omega_p = \frac{\omega_z}{\alpha} = \frac{0.15}{14.2}.$$

Por tanto, el sistema compensado es

$$G_c(j\omega)GH(j\omega) = \frac{20(6.66j\omega + 1)}{j\omega(0.1j\omega + 1)^2(94.6j\omega + 1)}. \tag{10.72}$$

En la Figura 10.20 se muestra la respuesta de frecuencia compensada. Como comprobación final, se calcula numéricamente el margen de fase en $\omega_c' = 1.5$ y se encuentra que $\phi_{pm} = 67°$, lo cual está dentro de las especificaciones. ■

Por tanto, una red de compensación de retardo de fase puede usarse para alterar la respuesta de frecuencia de un sistema de control por realimentación para obtener un comportamiento satisfactorio del sistema. Analizando los Ejemplos 10.8 y 10.9, se observa nuevamente que el diseño del sistema es satisfactorio cuando la curva asintótica para la magnitud del sistema compensado cruza la línea de 0 dB con una pendiente de −20 dB/década. La atenuación de la red de retardo de fase reduce la magnitud de la frecuencia de cruce (0 dB) a un punto donde es satisfactorio el margen de fase del sistema. Por eso, en contraste con la red de adelanto de fase, la de retardo reduce el ancho de banda de lazo cerrado del sistema y se mantiene una constante de error adecuada.

Una pregunta podría plantearse, ¿por qué no colocar el cero del compensador a más de una década bajo el nuevo cruce ω_c' (*véase* el punto 4 del procedimiento de diseño) y así asegurar menos de 5° de retardo en ω_c' debido al compensador? Esta pregunta puede contestarse considerando los requisitos establecidos en los resistores y condensadores de la red de retardo mediante los valores de los polos y ceros (*véase* la Ecuación 10.12). Cuando se disminuye la magnitud de los polos y ceros de la red de retardo, la magnitud de los resistores y condensadores se debe aumentar proporcionalmente. El cero del compensador de retardo, en términos de los componentes del lazo, es $z = 1/R_2C$, y la α de la red es $\alpha = (R_1 + R_2)/R_2$. Por esto, considerando el Ejemplo 10.9, se necesita un cero en $z = 0.15$, que puede obtenerse con $C = 1$ μf y $R_2 = 6.66$ MΩ. Sin embargo, para $\alpha = 14$, se necesita una resistencia R_1 de $R_1 = R_2(\alpha - 1) = 88$ MΩ. Evidentemente, un diseñador no desea colocar el cero de z a más de una década bajo ω_c' y necesitar así valores más grandes de R_1, R_2 y C.

La red de compensación de adelanto de fase altera la respuesta de frecuencia de una red sumando un ángulo de fase positivo (de adelanto); por tanto, aumenta el margen de fase de la frecuencia de cruce (0 dB). Parece evidente que un diseñador podría considerar utilizar una red de compensación que proporcione la atenuación de una red de retardo de fase y el ángulo de adelanto de fase de una red de adelanto de fase. Tal red existe y se conoce como **red de retardo-adelanto** (*véase* la Figura 10.21). La función de transferencia de esta red es

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{R_1R_2C_1C_2s^2 + (R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)s + 1}. \tag{10.73}$$

Cuando $\alpha\tau_1 = R_1C_1$, $\beta\tau_2 = R_2C_2$ y $\tau_1\tau_2 = R_1R_2C_1C_2$, se observa que $\alpha\beta = 1$; entonces la Ecuación (10.73) es

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(1 + \alpha\tau_1 s)(1 + \beta\tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}. \tag{10.74}$$

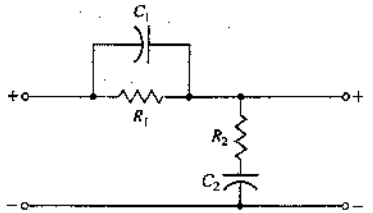


FIGURA 10.21
Red *RC* de adelanto-retardo.

donde $\alpha > 1$ y $\beta < 1$. Los primeros términos del numerador y del denominador, que son función de τ_1, proporcionan la parte de adelanto de fase de la red. Los segundos términos, que son función de τ_2, proporcionan la parte de retardo de fase de la red de compensación. El parámetro β se ajusta para proporcionar la atenuación adecuada de la parte de baja frecuencia de la respuesta de frecuencia, y el parámetro α se ajusta para proporcionar un adelanto de fase adicional en la nueva frecuencia de cruce (0 dB). De manera alternativa, la compensación puede diseñarse en el plano s fijando la compensación del polo y del cero de adelanto para localizar las raíces dominantes en una localización deseada. Entonces se usa la compensación de retardo de fase para aumentar la constante de error en la localización de las raíces dominantes en una relación adecuada, $1/\beta$. El diseño de un compensador de adelanto-retardo de fase sigue los procedimientos ya comentados; el lector deberá consultar literatura adicional que ilustre la utilidad de la compensación de adelanto-retardo [2, 3, 29].

10.9. DISEÑO DE SISTEMAS EN EL DIAGRAMA DE BODE UTILIZANDO MÉTODOS ANALÍTICOS Y POR COMPUTADOR

Cuando sea adecuado, es deseable emplear computadores para auxiliar al diseñador en la selección de los parámetros de un compensador. El desarrollo de algoritmos para el diseño asistido por computador es un importante método alternativo a los métodos de prueba y error tratados en secciones anteriores. Mediante el empleo de compensadores, se han desarrollado programas de computador para la selección de valores adecuados de los parámetros, basados en la satisfacción de los criterios de la respuesta de frecuencia, como el margen de fase [3, 4].

Se ha desarrollado una técnica analítica para seleccionar los parámetros de una red de adelanto o retardo para diagramas de Bode [4, 5]. Para un compensador de una sola etapa, se tiene que:

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}, \tag{10.75}$$

donde $\alpha < 1$ proporciona un compensador de retardo y $\alpha > 1$ produce un compensador de adelanto. La contribución de fase del compensador a la frecuencia de cruce deseada ω_c (*véase* la Ecuación 10.9) es

$$p = \tan\phi = \frac{\alpha\omega_c\tau - \omega_c\tau}{1 + (\omega_c\tau)^2\alpha}. \tag{10.76}$$

La magnitud M (en dB) del compensador en ω_c es:

$$c = 10^{M/10} = \frac{1 + (\omega_c\alpha\tau)^2}{1 + (\omega_c\tau)^2}. \tag{10.77}$$

Eliminando $\omega_c\tau$ de las Ecuaciones (10.76) y (10.77), se obtiene la ecuación-solución no trivial de α como

$$(p^2 - c + 1)\alpha^2 + 2p^2c\alpha + p^2c^2 + c^2 - c = 0. \tag{10.78}$$

Para un compensador de una sola etapa, es necesario que $c > p^2 + 1$. Si de la Ecuación 10.78 se resuelve para α, se obtiene τ a partir de

$$\tau = \frac{1}{\omega_c}\sqrt{\frac{1-c}{c-\alpha^2}}. \tag{10.79}$$

Los pasos para el diseño de un compensador de adelanto son:

1. Seleccionar la ω_c deseada.
2. Determinar el margen de fase deseado y, por tanto, la fase ϕ requerida para la Ecuación (10.76).
3. Verificar si el adelanto de fase es aplicable: $\phi > 0$ y $M > 0$.
4. Determinar si una sola etapa será suficiente cuando $c > p^2 + 1$.
5. Determinar α a partir de la Ecuación (10.78).
6. Determinar τ a partir de la Ecuación (10.79).

Si es necesario diseñar un compensador de retardo simple, entonces $\phi < 0$ y $M < 0$ (paso 3). Así mismo, el paso 4 requerirá que $c < [1/(1 + p^2)]$. Por lo demás, el método es el mismo.

EJEMPLO 10.10. Diseño utilizando una técnica analítica

Considérese nuevamente el sistema del Ejemplo 10.1 y diséñese una red de adelanto mediante una técnica analítica. Obsérvense las curvas no compensadas de la Figura 10.9. Se elige $\omega_c = 5$. Entonces, como antes, se desea un margen de fase de 45°. Como el compensador tiene que producir esta fase, se tiene que:

$$p = \tan 45^\circ = 1. \tag{10.80}$$

La contribución de la magnitud requerida es de 8 dB o $M = 8$, así que

$$c = 10^{8/10} = 6.31. \tag{10.81}$$

Empleando c y p, se obtiene

$$-4.31\alpha^2 + 12.62\alpha + 73.32 = 0. \tag{10.82}$$

Resolviendo para α, se obtiene $\alpha = 5.84$. Resolviendo la Ecuación (10.79), se obtiene $\tau = 0.087$. Por tanto, el compensador es

$$G_c(s) = \frac{1 + 0.515s}{1 + 0.087s}. \tag{10.83}$$

El polo es igual a 11.5, mientras que el cero es 1.94. El diseño es similar al obtenido por el método de iteración de la Sección 10.4. ■

10.10. SISTEMAS CON UN PREFILTRO

En las secciones anteriores de este capítulo se han utilizado compensadores de la forma

$$G_c(s) = \frac{(s+z)}{(s+p)}$$

que alteran las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, la función de transferencia en lazo cerrado, $T(s)$, contendrá el cero de $G_c(s)$ como un cero de $T(s)$. Este cero afectará significativamente a la respuesta del sistema $T(s)$.

Se considera el sistema de la Figura 10.22, donde

$$G(s) = \frac{1}{s}.$$

Se introducirá un compensador PI, de forma que

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}.$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema con un prefiltro (Figura 10.22) es

$$T(s) = \frac{(K_P s + K_I)G_p(s)}{s^2 + K_P s + K_I}. \tag{10.84}$$

A efectos ilustrativos, las especificaciones requieren un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de 0.5 segundos y una sobreelongación de aproximadamente el 4%. Se utiliza $\zeta = 1/\sqrt{2}$ y se tiene en cuenta que

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}.$$

Por lo tanto, se requiere que $\zeta\omega_n = 8$ o $\omega_n = 8\sqrt{2}$. Ahora se obtiene

$$K_P = 2\zeta\omega_n = 16 \quad \text{y} \quad K_I = \omega_n^2 = 128.$$

La función de transferencia en lazo cerrado cuando $G_p(s) = 1$ es entonces

$$T(s) = \frac{16(s+8)}{s^2 + 16s + 128}.$$

El efecto de un cero en la respuesta a un escalón es significativo. Utilizando la Figura 5.13(a) se tiene $a/\zeta\omega_n = 1$ y $\zeta = 1/\sqrt{2}$ y la sobreelongación frente a un escalón se puede predecir a partir de la Figura 5.13(a) y es del 21%.

Se utiliza un prefiltro $G_p(s)$ para eliminar el cero de $T(s)$ mientras se mantiene la ganancia DC de 1; por lo tanto, se requiere que

$$G_p(s) = \frac{8}{s+8}.$$

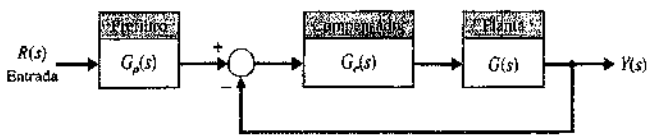


FIGURA 10.22
Sistema de control con un prefiltro, $G_p(s)$.

Entonces se tiene

$$T(s) = \frac{128}{s^2 + 16s + 128},$$

y la sobreelongación de este sistema es del 4.5%, como se esperaba.

Si se revisa la Figura 5.13(a) se observa que el cero en $s = -a$ tiene un efecto significativo cuando $a/\zeta\omega_n < 5$, donde $-a$ es el cero y $-\zeta\omega_n$ es la parte real de las raíces dominantes de la ecuación característica de $T(s)$.

Considérese de nuevo el Ejemplo 10.3, que incluye el diseño de un compensador de adelanto de fase. La función de transferencia en lazo cerrado (utilizando la Figura 10.22) se determinó que es

$$T(s) = \frac{8.1(s + 1)G_p(s)}{(s + 1 + j2)(s + 1 - j2)(s + 1.62)}.$$

Si $G_p(s) = 1$ (no hay prefiltro), entonces se obtiene una respuesta con una sobreelongación del 46.6% y un tiempo de asentamiento de 3.8 segundos. Si se utiliza el prefiltro

$$G_p(s) = \frac{1}{s + 1},$$

se obtiene una sobreelongación del 6.7% y un tiempo de asentamiento de 3.8 segundos. La raíz real en $s = -1.62$ contribuye a la amortiguación de la respuesta del sistema frente a una entrada escalón. El prefiltro es muy útil para permitir al diseñador introducir un compensador con un cero a fin de ajustar las localizaciones de las raíces (polos) del sistema en lazo cerrado mientras se elimina el efecto de incorporar un cero en $T(s)$.

Por lo general, se añadirá un prefiltro para un sistema con redes de adelanto o compensadores PI. No se utilizarán prefiltros para un sistema con una red de retardo, puesto que es de esperar que el efecto del cero sea insignificante. Para comprobar este hecho, se considera de nuevo el diseño que se realizó en el Ejemplo 10.6. El sistema con un controlador de retardo de fase es

$$G(s)G_c(s) = \frac{5(s + 0.1)}{s(s + 2)(s + 0.0125)}.$$

La función de transferencia en lazo cerrado es entonces

$$T(s) \simeq \frac{5(s + 0.1)}{(s^2 + 1.98s + 5.1)(s + 0.095)} \simeq \frac{5}{(s^2 + 1.98s + 5.1)},$$

puesto que el cero en $s = -0.1$ y el polo en $s = -0.095$ aproximadamente se cancelan. Se espera una sobreelongación del 20% y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de 4.0 segundos para los parámetros de diseño ($\zeta = 0.45$ y $\zeta\omega_n = 1$). Sin embargo, la respuesta real tiene una sobreelongación del 26% y un tiempo de asentamiento mayor de 5.8 segundos debido al efecto del polo real de $T(s)$ en $s = -0.095$. Por lo tanto, normalmente no se utilizan prefiltros con sistemas que emplean compensadores de retardo.

EJEMPLO 10.11. Diseño de un sistema de tercer orden

Se considera un sistema como el que aparece en la Figura 10.22 con

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 1)(s + 5)}.$$

Tabla 10.1 Efecto del prefiltro en la respuesta frente a una entrada escalón

	$G_p(s) = 1$	$p = 1.20$	$p = 2.4$
Porcentaje de sobreelongación	9.9%	0%	4.8%
90% tiempo de subida (segundos)	1.05	2.30	1.60
Tiempo de asentamiento (segundos)	2.9	3.0	3.2

Se va a diseñar un sistema que consiga una respuesta frente a una entrada escalón con una sobreelongación menor que el 2% y un tiempo de asentamiento menor que 3 segundos utilizando tanto $G_c(s)$ como $G_p(s)$ para lograr la respuesta deseada.

Se utiliza la red compensadora de adelanto

$$G_c(s) = \frac{K(s + 1.2)}{(s + 10)}$$

y se selecciona K para encontrar las raíces complejas con $\zeta = 1/\sqrt{2}$. Entonces, con $K = 78.7$, la función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{78.7(s + 1.2)G_p(s)}{(s + 1.71 + j1.71)(s + 1.71 - j1.71)(s + 1.45)(s + 11.1)}$$
$$\simeq \frac{7.1(s + 1.2)G_p(s)}{(s^2 + 3.4s + 5.85)(s + 1.45)},$$

donde

$$G_p(s) = \frac{p}{(s + p)}. \tag{10.85}$$

Por lo tanto, la función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) \simeq \frac{7.1p(s + 1.2)}{(s^2 + 3.45s + 5.85)(s + 1.45)(s + p)}.$$

Si $p = 1.2$, se puede cancelar el efecto del cero. La respuesta del sistema con un prefiltro se resume en la Tabla 10.1. Se elige el valor apropiado de p para lograr la respuesta deseada. Obsérvese que $p = 2.40$ proporcionará una respuesta que puede ser deseable, dado que consigue un tiempo de subida más rápido que $p = 1.20$. El prefiltro proporciona un parámetro adicional de selección a efectos de diseño. ■

10.11. DISEÑO PARA RESPUESTA PLANA

A menudo, el objetivo de un sistema de control es lograr una respuesta rápida frente a una entrada escalón con una sobreelongación mínima. Se define la **respuesta plana** como la respuesta que alcanza rápidamente el nivel deseado y se mantiene en ese nivel con una sobreelongación mínima. Se utiliza la banda del $\pm 2\%$ en el nivel deseado como el rango de variación aceptable respecto a la respuesta deseada. Por tanto, tal y como se ilustra en la Figura 10.23, si la respuesta entra en la banda en un tiempo T_s, entonces se satisface un tiempo de asentamiento T_s al entrar en la banda. Una respuesta plana tiene las características siguientes:

1. Error en estado estacionario = 0.
2. Respuesta rápida → mínimo tiempo de subida y tiempo de asentamiento.

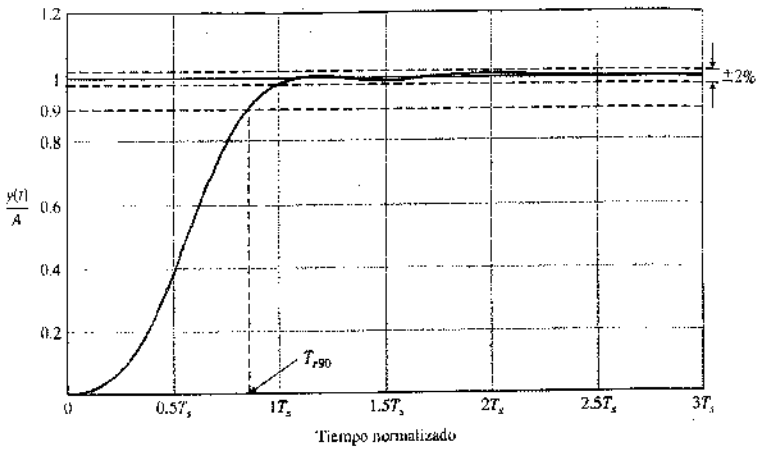


FIGURA 10.23
La respuesta plana A es la magnitud del escalón de entrada.

3. $0.1\% \leqslant$ tanto por ciento de sobreelongación $< 2\%$.
4. Tanto por ciento de sobreelongación $< 2\%$.

Las características (3) y (4) requieren que la respuesta permanezca dentro de la banda del $\pm 2\%$ de manera que la entrada a la banda tenga lugar coincidiendo con el tiempo de asentamiento.

Se considera la función de transferencia del sistema en lazo cerrado, $T(s)$. Para determinar los coeficientes que conducen a una respuesta plana óptima, en primer lugar se normaliza la función de transferencia estándar. Un ejemplo de esto para un sistema de tercer orden es

$$T(s) = \frac{\omega_n^3}{s^3 + \alpha\omega_n s^2 + \beta\omega_n^2 s + \omega_n^3}. \tag{10.86}$$

Dividiendo el numerador y el denominador entre ω_n^3 se obtiene

$$T(s) = \frac{1}{\frac{s^3}{\omega_n^3} + \alpha\frac{s^2}{\omega_n^2} + \beta\frac{s}{\omega_n} + 1}. \tag{10.87}$$

Sea $\bar{s} = s/\omega_n$ para obtener

$$T(s) = \frac{1}{\bar{s}^3 + \alpha\bar{s}^2 + \beta\bar{s} + 1}. \tag{10.88}$$

La Ecuación (10.88) es la función de transferencia en lazo cerrado normalizada para el sistema de tercer orden. Para sistemas de órdenes mayores se utiliza el mismo método para obtener la ecuación normalizada. A los coeficientes de la ecuación —α, β, γ, etc.— se les asignan los valores necesarios para cumplir los requisitos de respuesta plana. Los coeficientes que se recogen en la Tabla 10.2 se seleccionaron para lograr la respuesta plana y para minimizar el tiempo de asentamiento y el tiempo de subida al 100% de la entrada deseada T_r. La forma de la Ecuación (10.88) está normalizada puesto que $\bar{s} = s/\omega_n$. Por lo tanto, se escoge ω_n basándose en el tiempo de asentamiento deseado o el tiempo de subida. Por tanto, si se tiene un sistema de tercer orden que requiere un tiempo de

Tabla 10.2 Coeficientes y medidas de respuesta para un sistema de respuesta plana

Orden del sistema	Coeficientes α	β	γ	δ	ε	Porcentaje de sobreelongación P.O.	Porcentaje de subelongación P.U.	90% tiempo de subida T_{r90}	100% tiempo de subida T_r	Tiempo de asentamiento T_s
Segundo	1.82					0.10%	0.00%	3.47	6.58	4.82
Tercero	1.90	2.20				1.65%	1.36%	3.48	4.32	4.04
Cuarto	2.20	3.50	2.80			0.89%	0.95%	4.16	5.29	4.81
Quinto	2.70	4.90	5.40	3.40		1.29%	0.37%	4.84	5.73	5.43
Sexto	3.15	6.50	8.70	7.55	4.05	1.63%	0.94%	5.49	6.31	6.04

Nota: Todos los tiempos están normalizados.

asentamiento de 1.2 segundos, se observa a partir de la Tabla 10.2 que el tiempo de asentamiento normalizado es

$$\omega_n T_s = 4.04.$$

Por tanto, se requiere que

$$\omega_n = \frac{4.04}{T_s} = \frac{4.04}{1.2} = 3.37.$$

Cuando se escoge ω_n se conoce, la función de transferencia completa en lazo cerrado, que tiene la forma de la Ecuación (10.86). Cuando se diseña un sistema para obtener una respuesta plana, se elige el compensador y se calcula la función de transferencia en lazo cerrado se calcula. Esta función de transferencia compensada se hace igual a la Ecuación (10.86) y entonces se puede determinar el compensador requerido.

EJEMPLO 10.12. Diseño de un sistema con una respuesta plana

Se considera el sistema con realimentación unidad con un compensador $G_c(s)$ y un prefiltro $G_p(s)$ como el que se muestra en la Figura 10.22. La planta es

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)},$$

y el compensador es

$$G_c(s) = \frac{(s+z)}{(s+p)}.$$

Utilizando el prefiltro necesario se obtiene

$$G_p(s) = \frac{z}{(s+z)}.$$

La función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{Kz}{s^3 + (1+p)s^2 + (K+p)s + Kz}.$$

Se utiliza la Tabla 10.2 para determinar los coeficientes requeridos $\alpha = 1.90$ y $\beta = 2.20$. Si se selecciona un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de 2 segundos, en-

tonces $\omega_n T_s = 4.04$, y por lo tanto $\omega_n = 2.02$. El sistema en lazo cerrado requerido tiene como ecuación característica

$$q(s) = s^3 + \alpha\omega_n s^2 + \beta\omega_n^2 s + \omega_n^3 = s^3 + 3.84s^2 + 4.44s + 8.24.$$

Entonces se determina que $p = 2.84$, $z = 1.34$ y $K = 6.14$. La respuesta de este sistema tendrá $T_s = 2$ segundos, $T_r = 2.14$ segundos y $T_{r90} = 1.72$ segundos. ■

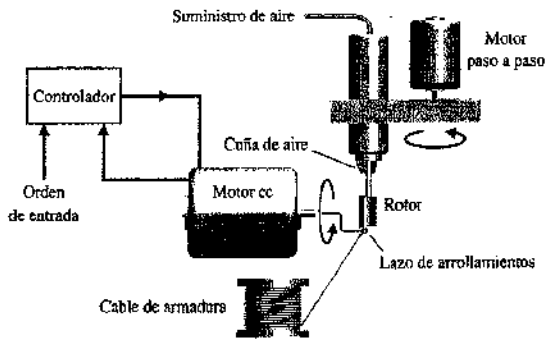
10.12. EJEMPLO DE DISEÑO: SISTEMA DE CONTROL DEL BOBINADO DE UN ROTOR

El objetivo es el de sustituir la operación manual utilizando una máquina para bobinar un cable de cobre en los rotores de pequeños motores. Cada motor tiene tres arrollamientos separados de varios cientos de vueltas de cables. Es importante que los arrollamientos sean consistentes y que la productividad del proceso sea alta. El operador simplemente inserta un rotor sin bobinar, presiona el botón de comienzo y, finalmente, retira el rotor completamente bobinado. El motor de cc se utiliza para lograr arrollamientos precisos y rápidos. Por lo tanto, el objetivo es lograr una alta precisión en estado estacionario tanto para la posición como para la velocidad. En la Figura 10.24(a) se muestra el sistema de control, y en la Figura 10.24(b), el diagrama de bloques. El sistema tiene un error nulo en estado estacionario frente a una entrada escalón, y el error en estado estacionario para una entrada rampa es

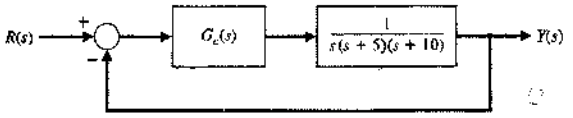
$$e_{ss} = A/K_v$$

donde

$$K_v = \lim_{s\to 0} \frac{G_c(s)}{50}.$$



(a)



(b)

FIGURA 10.24
(a) Sistema de control del bobinado de un rotor.
(b) Diagrama de bloques.

Cuando $G_c(s) = K$, se tiene $K_v = K/50$. Si se selecciona $K = 500$, entonces $K_v = 10$, pero la sobreelongación frente a un escalón es de un 70%, y el tiempo de asentamiento es de 8 segundos.

En primer lugar, se probará con un compensador de adelanto de forma que

$$G_c(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)}. \tag{10.89}$$

Si se selecciona $z_1 = 4$ y el polo p_1 de forma que las raíces complejas tienen una ζ de 0.6, se tiene

$$G_c(s) = \frac{191.2(s + 4)}{(s + 7.3)}. \tag{10.90}$$

Por lo tanto, la respuesta a una entrada escalón tiene una sobreelongación del 3% y un tiempo de asentamiento de 1.5 segundos. Sin embargo, la velocidad constante es

$$K_v = \frac{191.2(4)}{7.3(50)} = 2.1,$$

lo que es inadecuado.

Si se utiliza un diseño por retardo de fase, se selecciona

$$G_c(s) = \frac{K(s + z_2)}{(s + p_2)}$$

para lograr $K_v = 38$. Por lo tanto, la velocidad constante del sistema compensado con retardo es

$$K_v = \frac{Kz_2}{50p_2}.$$

Si se utiliza un lugar de las raíces, se selecciona $K = 105$ para lograr una respuesta no compensada frente a un escalón razonable con una sobreelongación menor o igual que el 10%. Se selecciona $\alpha = z/p$ para lograr la K_v deseada. Entonces se tiene

$$\alpha = \frac{50K_v}{K} = \frac{50(38)}{105} = 18.1.$$

Si se selecciona $z_2 = 0.1$ para evitar el efecto negativo del lugar de las raíces no compensado, se tiene $p_2 = 0.0055$. Entonces se obtiene una respuesta escalón con un 12% de sobreelongación y un tiempo de asentamiento de 2.5 segundos.

En la Tabla 10.3 se resumen los resultados para la ganancia simple, la red de adelanto y la red de retardo.

TABLA 10.3 Resumen de resultados de ejemplo

Controlador	Ganancia, K	Red de adelanto	Red de retardo	Red de adelanto-retardo
Sobreelongación frente a un escalón	70%	3%	12%	5%
Tiempo de asentamiento (segundos)	8	1.5	2.5	2.0
Error en estado estacionario para una rampa	10%	48%	2.6%	4.8%
K_v	10	2.1	38	21

Se retoma el sistema de la red de adelanto y se añade una red de retardo en cascada, de manera que el compensador es

$$G_c(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)}. \tag{10.91}$$

El compensador de adelanto de la Ecuación (10.90) requiere $K = 191.2$, $z_1 = 4$ y $p_1 = 7.3$. En la Figura 10.25 se muestra el lugar de las raíces para el sistema. Se recuerda que esta red de adelanto resultó de $K_c = 2.1$ (*véase* la Tabla 10.3). Para obtener $K_c = 21$, se utiliza $\alpha = 10$ y se selecciona $z_2 = 0.1$ y $p_2 = 0.01$. Entonces el sistema total es

$$G(s)G_c(s) = \frac{191.2(s + 4)(s + 0.1)}{s(s + 5)(s + 10)(s + 7.28)(s + 0.01)}. \tag{10.92}$$

En las partes (a) y (b) de la Figura 10.26 se muestran, respectivamente, la respuesta frente a un escalón y la respuesta frente a una rampa para este sistema, y se resumen en la Tabla 10.3. Claramente, el diseño adelanto-retardo es apropiado para obtener los requisitos de diseño de forma satisfactoria.

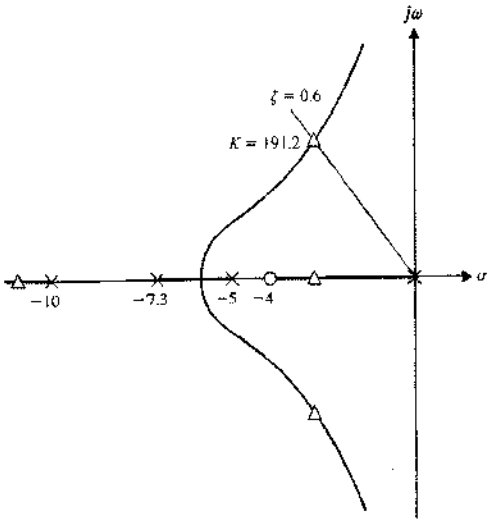


FIGURA 10.25. Lugar de las raíces para el compensador de adelanto.

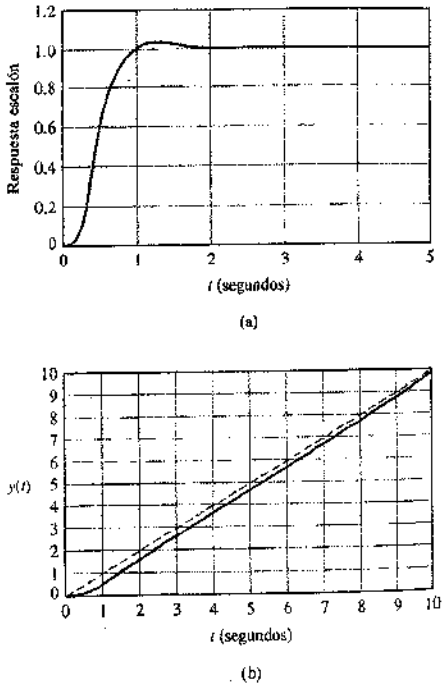


FIGURA 10.26. (a) Respuesta a un escalón y (b) respuesta a una rampa para el sistema de bobinado de un rotor.

10.13. EJEMPLO DE DISEÑO: EL TRAZADOR GRÁFICO *X-Y*

Muchos fenómenos físicos se caracterizan por parámetros que son transitorios o lentamente variantes. Si se almacenan estos cambios se pueden examinar cuando se desee y guardarlos para futuras referencias o comparaciones. Para llevar a cabo tal almacenaje, se han desarrollado algunos instrumentos electromecánicos, entre ellos el trazador gráfico *X-Y*. En este instrumento el desplazamiento a lo largo del eje *X* representa una variable de interés o tiempo y el desplazamiento a lo largo del eje *Y* varía en función de otra variable [6].

Estos grabadores se pueden encontrar en muchos laboratorios para almacenar datos experimentales, tales como cambios en la temperatura, variaciones en los niveles de salida del transductor y tensiones frente a fuerzas aplicadas, por nombrar algunos. En la Figura 10.27 se muestra el sistema de dibujo del HP 7090A.

El propósito de un trazador gráfico es seguir con precisión la señal de entrada cuando ésta varía. Se considera el diseño del movimiento en un eje, puesto que la dinámica del movimiento en ambos ejes es idéntica. Por lo tanto, se pretende controlar la posición y el movimiento del polígrafo con precisión para que siga la señal de entrada.

Para obtener resultados precisos, el objetivo consiste en lograr (1) una respuesta frente a un escalón con una sobreelongación menor del 5% y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 0.5 segundos, y (2) un error porcentual en estado estacionario nulo para una entrada escalón. Si se logran estas especificaciones, se obtendrá una respuesta rápida y precisa.

Como se desea mover el polígrafo, se selecciona un motor de cc como actuador. El sensor de realimentación será un codificador óptico de 500 líneas. Si se detectan todos los cambios de estado de la cuadratura de salida de los dos canales del codificador, se pueden detectar 2000 cuentas del decodificador por revolución del eje del motor. Esto significa una resolución del codificador de 0.001 pulgadas en el extremo del polígrafo. El codificador está montado sobre el eje del motor. Dado que el codificador proporciona datos digitales, se comparan con la señal de entrada utilizando un microprocesador. Después, se propone utilizar la diferencia de señales calculada por el microprocesador como señal de error y hacer uso del microprocesador para calcular el algoritmo necesario para obtener el compensador adecuado. Por último la salida del compensador se convierte en una señal analógica que conducirá al motor.

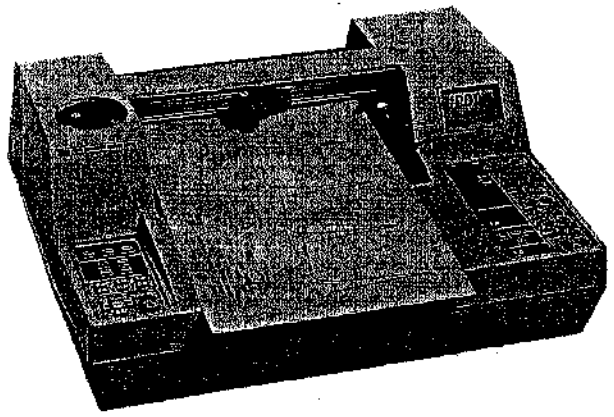


FIGURA 10.27 Sistema de trazado gráfico de HP 7090A. Copyright 1986. Reproducido con el permiso de Hewlett-Packard Co.

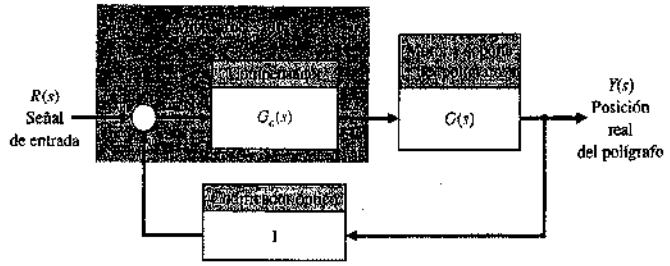


FIGURA 10.28
Modelo del sistema de control del polígrafo del trazador.

En la Figura 10.28 se muestra el modelo del sistema de control realimentado de posición. Como la velocidad del cálculo del microprocesador es muy rápida comparada con la tasa de cambio del codificador y de las señales de entrada, se supone que el modelo de señal continua es muy preciso.

El modelo para el motor y para el soporte del polígrafo es

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 10)(s + 1000)}, \tag{10.93}$$

y el intento inicial para especificar un compensador es utilizar una simple ganancia de manera que

$$G_c(s) = K.$$

En este caso, únicamente se tiene que ajustar un parámetro: K. Para lograr un respuesta rápida, se tiene que ajustar K de manera que proporcione dos raíces dominantes en plano s con una razón de amortiguamiento de 0.707, lo que daría lugar a una sobreelongación como respuesta a un escalón del 4.5%. En la Figura 10.29 se muestra un dibujo del lugar de las raíces (obsérvese el punto de ruptura sobre el eje real).

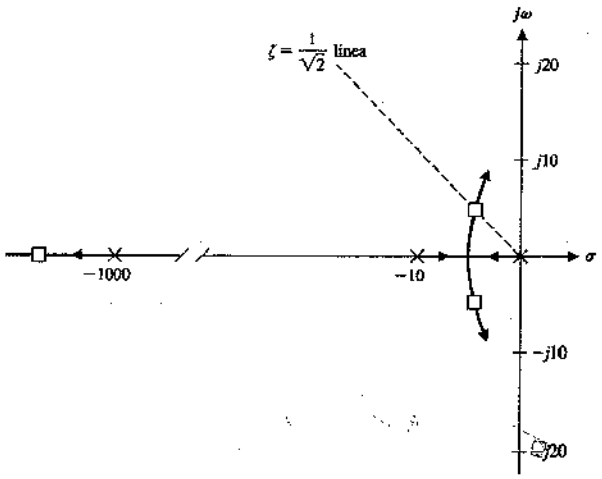


FIGURA 10.29
Lugar de las raíces para el polígrafo del trazador; se muestran las raíces con la razón de amortiguamiento de $1/\sqrt{2}$. Las raíces dominantes son $s = -4.9 \pm j4.9$.

Si se ajusta la ganancia a $K = 47\,200$, se obtiene un sistema con una sobreelongación del 3.6% frente a una entrada escalón y un tiempo de asentamiento de 0.8 segundos. Como la función de transferencia tiene un polo en el origen, se tiene un error en estado estacionario nulo frente a una entrada escalón.

Este sistema no cumple las especificaciones, así que se selecciona un compensador que reduzca el tiempo de asentamiento. Se selecciona un compensador por adelanto de manera que

$$G_c(s) = \frac{K\alpha(s + z)}{(s + p)}, \tag{10.94}$$

donde $p = \alpha z$. Se utiliza el método de la Sección 10.5, que selecciona la fase del compensador de adelanto en el plano s. De ahí, se sitúa un cero en $s = -20$ y se determina la posición del polo p, que sitúa las raíces dominantes en la línea que tiene razón de amortiguamiento de $1/\sqrt{2}$. Así, se encuentra que $p = 60$ y $\alpha = 3$, de manera que

$$G(s)G_c(s) = \frac{142\,600(s + 20)}{s(s + 10)(s + 60)(s + 1000)}. \tag{10.95}$$

Si se obtiene la respuesta real frente a un escalón, se determina que el tanto por ciento de sobreelongación es del 2% y que el tiempo de asentamiento es de 0.35 segundos, lo que satisface las especificaciones. La tercera aproximación de diseño consiste en darse cuenta de que el codificador se puede utilizar para generar una señal de velocidad teniendo en cuenta la tasa de veces que las líneas del decodificador pasan por un punto fijo. Por lo tanto, se puede utilizar el microprocesador. Como la señal de posición y la de velocidad están disponibles, se puede describir el compensador como

$$G_c(s) = K_P + K_D s, \tag{10.96}$$

donde K_P es la ganancia para la señal de error y K_D es la ganancia para la señal de velocidad. Entonces se puede escribir

$$G(s)G_c(s) = \frac{K_D(s + K_P/K_D)}{s(s + 10)(s + 1000)}.$$

Si se fija $K_P/K_D = 10$, se puede cancelar el polo en $s = -10$ y se obtiene

$$G(s)G_c(s) = \frac{K_D}{s(s + 1000)}.$$

La ecuación característica para este sistema es

$$s^2 + 1000s + K_D = 0, \tag{10.97}$$

y se desea que $\zeta = 1/\sqrt{2}$. Obsérvese que $2\zeta\omega_n = 1000$, se tiene que $\omega_n = 707$ y $K_D = \omega_n^2$. Por lo tanto, se obtiene $K_D = 5 \times 10^5$, y el sistema compensado es

$$G_cG(s) = \frac{5 \times 10^5}{s(s + 1000)}. \tag{10.98}$$

La respuesta de este sistema proporcionará una sobreelongación del 4.3% y un tiempo de asentamiento de 8 milisegundos.

En la Tabla 10.4 se comparan los resultados para las tres aproximaciones de diseño. El mejor diseño utiliza la velocidad de realimentación, y éste es el diseño real que se utiliza para el HP 7090A.

Tabla 10.7 Resultados para un diseño

Sistema	Respuesta a una ecuación: Porcentaje de sobreelongación	Respuesta a una ecuación: Tiempo de asentamiento (milisegundos)
Ajuste de ganancia	3.6	800
Ganancia y compensador de adelanto	2.0	350
Ajuste de ganancia más señal de velocidad multiplicada por la ganancia K_D	4.3	8

10.14. DISEÑO DE SISTEMAS UTILIZANDO MATLAB

En esta sección se ilustra la compensación de sistemas de control utilizando la respuesta en frecuencia y métodos en el plano s. Se reconsiderará el ejemplo de diseño de la Sección 10.12 sobre el bobinado de un rotor para ilustrar el uso de código MATLAB en el diseño y desarrollo de los sistemas de control con buenas características de comportamiento. Se examinan compensadores tanto de adelanto como de retardo para este ejemplo de diseño y se presenta la respuesta del sistema utilizando MATLAB

EJEMPLO 10.13. Sistema de control de un bobinado de rotor

Se considera de nuevo el sistema de control de bobinado de un rotor que se muestra en la Figura 10.24. El objetivo de diseño es lograr alta precisión es estado estacionario frente a una entrada rampa. El error en estado estacionario frente a una rampa unidad, $R(s) = 1/s^2$, es

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v},$$

donde

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{G_c(s)}{50}.$$

Se deben considerar las especificaciones de comportamiento relativas a sobreelongación y tiempo de asentamiento, así como el error de seguimiento en estado estacionario. A todas luces, una simple ganancia no será satisfactoria, así que se realizará la compensación utilizando compensadores de adelanto y de retardo. La aproximación consistirá en desarrollar una serie de código en MATLAB para obtener el diseño de los compensadores.

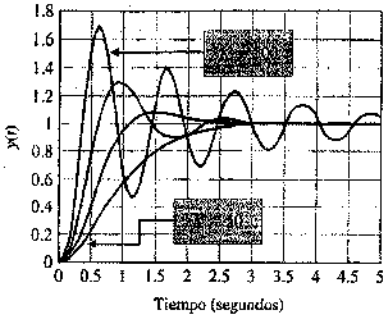
Se considera un controlador de ganancia simple

$$G_c(s) = K.$$

El error en estado estacionario es

$$e_{ss} = \frac{50}{K}.$$

Cuanto mayor es K, más pequeño es el error en estado estacionario e_{ss}. Sin embargo, se debe considerar el efecto que tiene un aumento de K sobre la respuesta transitoria, tal y



(a)

```
K=[50 100 200 500];
%
numg=[1]; deng=[1 15 50 0];
sysg=tf(numg,deng);
t=[0:0.1:5];
%
for i=1:4
sys=feedback(K(i)*sysg,[1]);
y=step(sys,t);
Ys(:,i)=y;
end
%
plot(t,Ys(:,1),t,Ys(:,2),t,Ys(:,3),t,Ys(:,4))
xlabel('Time (seconds)'), ylabel('y(t)')
```

(b)

FIGURA 10.30
(a) Respuesta transitoria para un controlador de ganancia simple. (b) Código MATLAB.

como se muestra en la Figura 10.30. Cuando $K = 500$, el error en estado estacionario frente a una rampa es del 10%, pero la sobreelongación es del 70% y el tiempo de asentamiento es aproximadamente de 8 segundos para una entrada escalón. Esto se considera como un comportamiento inaceptable y, por lo tanto, se hace necesaria la compensación. Los dos tipos de compensadores importantes que se consideran son los compensadores de adelanto y de retardo.

En primer lugar, sea el compensador de adelanto

$$G_c(s) = \frac{K(s + z)}{(s + p)},$$

donde $|z| < |p|$. El compensador de adelanto proporciona la posibilidad de mejorar la respuesta transitoria. Se utilizará una aproximación en el dominio de la frecuencia para diseñar un compensador de adelanto.

Se desea un error en estado estacionario menor que el 10% frente a una entrada rampa y $K_v = 10$. Además de las especificaciones en estado estacionario, se desea obtener ciertas especificaciones de comportamiento: (1) tiempo de asentamiento (con el criterio

del 2%) $T_s \leq 3$ segundos, y (2) tanto por ciento de sobreelongación para una entrada escalón $\leq 10\%$. Si se resuelve para ζ y ω_n y se utiliza

$$\text{P.O.} = 100\exp^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 10 \quad \text{y} \quad T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 3$$

se obtiene $\zeta = 0.59$ y $\omega_n = 2.26$. Por lo tanto, se obtiene el requisito del margen de fase:

$$\phi_{pm} = \frac{\zeta}{0.01} \simeq 60°.$$

Los pasos que conducen al diseño final son los siguientes:

1. Obtener el diagrama de Bode del sistema no compensado con $K = 500$ y calcular el margen de fase.
2. Determinar la cantidad de adelanto de fase necesaria.
3. Evaluar α a partir de $\phi_m = (\alpha - 1)/(\alpha + 1)$.
4. Calcular 10 log α y determinar la frecuencia ω_m sobre el diagrama de Bode no compensado donde la magnitud de la curva se hace igual a -10 log α.
5. En la vecindad de ω_m sobre el Bode no compensado, dibujar una línea que pasa por el punto 0 dB a ω_m con pendiente igual a la pendiente actual más 20 dB/década. Localizar la intersección de la línea con el Bode no compensado para determinar la localización del cero de la compensación por adelanto. Después, calcular la localización del polo del compensador por adelanto mediante $p = \alpha z$.
6. Obtener el Bode compensado y comprobar el margen de fase. Repetir cualquier paso si es necesario.
7. Elevar la ganancia para tener en cuenta la atenuación $(1/\alpha)$.
8. Verificar el diseño final mediante simulación utilizando las funciones escalón y repetir cualquier paso si es necesario.

Se utilizan tres códigos en el diseño. Los códigos de diseño se muestran en las Figuras 10.31-10.33. El primer código corresponde al diagrama de Bode del sistema no compensado, como se muestra en la Figura 10.31. En la Figura 10.32 se muestra un diagrama de Bode detallado del sistema compensado. En la Figura 10.33 se recoge el código MATLAB para el análisis de la respuesta frente a un escalón. El diseño final del compensador por adelanto es

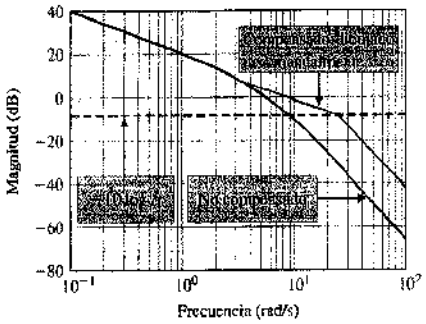
$$G_c(s) = \frac{1800(s + 3.5)}{(s + 25)},$$

donde $K = 1800$ se seleccionó después de utilizan iterativamente el código MATLAB.

Las especificaciones de tiempo de asentamiento y de sobreelongación se satisfacen, pero $K_p = 5$, lo que origina un error en estado estacionario del 20% frente a una entrada rampa. Es posible continuar la iteración de diseño y refinar el compensador, aunque debería quedar claro por anticipado que el compensador por adelanto ha añadido margen de fase y ha mejorado la respuesta transitoria.

Para reducir el error en estado estacionario, se puede considerar un compensador de retardo, que tiene la forma

$$G_c(s) = \frac{K(s + z)}{(s + p)},$$



(a)

```
K=500;
numg=[1]; deng=[1 15 50 0]; sysg=tf(numg,deng);
sys=K*sysg;
%
[Gm,Prm,Wcg,Wcp]=margin(sys);
%
Phi=(60-Prm)*pi/180;
alpha=(1+sin(Phi))/(1-sin(Phi))
[mag,phase,w]=bode(sys);
mag_save(1,:)=mag(:,1,:);
%
M=-10*log10(alpha)*ones(length(w),1);
%
semilogx(w,20*log10(mag_save),w,M), grid
xlabel('Frequency (rad/sec)'), ylabel('Magnitude (dB)')
```

(b)

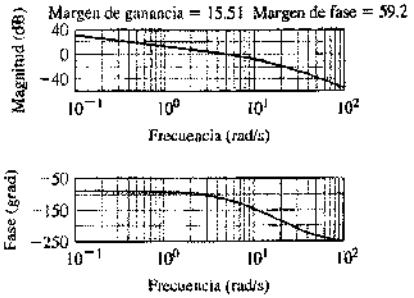
FIGURA 10.31
(a) Diagrama de Bode.
(b) Código MATLAB.

donde $|p| < |z|$. Se utilizará una aproximación del lugar de las raíces para diseñar un compensador de retardo, aunque también se puede realizar el diseño utilizando el Bode. La región deseada para la localización de las raíces dominantes está especificada mediante

$$\zeta = 0.59 \quad \text{y} \quad \omega_n = 2.26.$$

Los pasos de diseño son los siguientes:

1. Obtener el lugar de las raíces del sistema no compensado.
2. Encontrar las localizaciones apropiadas de las raíces sobre el sistema no compensado que yacen en la región definida por $\zeta = 0.59$ y $\omega_n = 2.26$.
3. Calcular la ganancia de lazo y la localización deseada de las raíces y la constante de error del sistema $K_{p_{\text{nocomp}}}$.
4. Calcular $\alpha = K_{p_{\text{comp}}}/K_{p_{\text{nocomp}}}$, donde $K_{p_{\text{comp}}} = 10$.

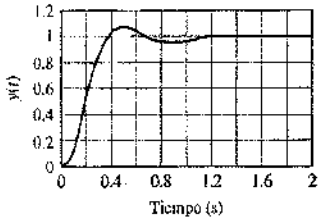


(a)

```
K=1800;
numg=[1]; deng=[1 15 50 0];
numgc=K*[1 3.5]; dengc=[1 25];
sysg=tf(numg,deng);
sysgc=tf(numgc,dengc);
sys=series(sysgc,sysg);
margin(sys)
```

(b)

FIGURA 10.32
Compensador de adelanto. (a) Diagrama de Bode compensado. (b) Código MATLAB.

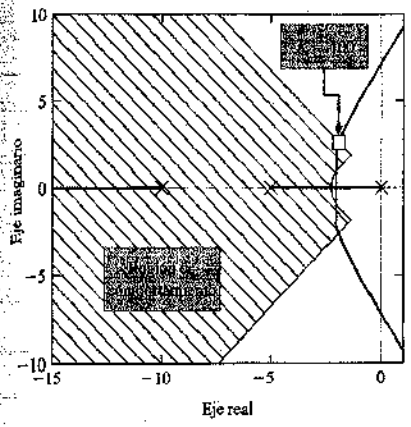


(a)

```
K=1800;
%
numg=[1]; deng=[1 15 50 0]; sysg=tf(numg,deng);
numgc=K*[1 3.5]; dengc=[1 25]; sysgc=tf(numgc,dengc);
%
syso=series(sysgc,sysg);
sys=feedback(syso,[1]);
%
t=[0:0.01:2];
step(sys,t)
ylabel ('y(t)')
```

(b)

FIGURA 10.33
Compensador de adelanto. (a) Respuesta frente a un escalón. (b) Código MATLAB.

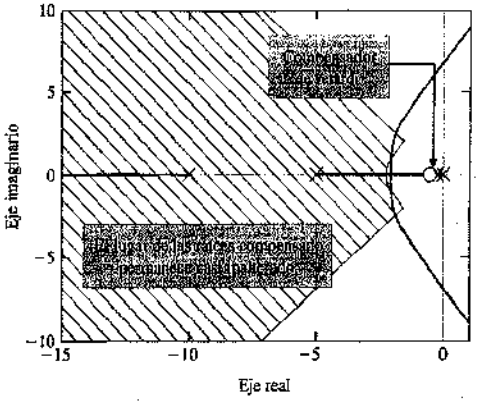


(a)

```
numg=[1]; deng=[1 15 50 0];
sysg=tf(numg,deng);
clf; rlocus(sysg); hold on
%
zeta=0.5912; wn=2.2555;
%
x=[-10:0.1:-zeta*wn]; y=-(sqrt(1-zeta^2)/zeta)*x;
xc=[-10:0.1:-zeta*wn]; c=sqrt(wn^2-xc.^2);
%
plot(x,y,':',x,-y,':',xc,c,':',xc,-c,':')
axis([-15,1,-10,10]);
```

(b)

FIGURA 10.34. Compensador de retardo: (a) lugar de las raíces no compensado; (b) código MATLAB.



(a)

```
numg=[1]; deng=[1 15 50 0]; sysg=tf(numg,deng);
numgc=[1 0.1]; dengc=[1 0.01]; sysgc=tf(numgc,dengc);
sys=series(sysgc,sysg);
clf; rlocus(sys); hold on
%
zeta=0.5912; wn=2.2555;
x=[-10:0.1:-zeta*wn]; y=-(sqrt(1-zeta^2)/zeta)*x;
xc=[-10:0.1:-zeta*wn];c=sqrt(wn^2-xc.^2);
plot(x,y,':',x,-y,':',xc,c,':',xc,-c,':')
axis([-15,1,-10,10]);
```

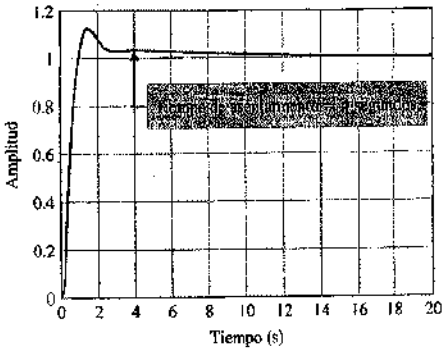
(b)

FIGURA 10.35. Compensador de retardo: (a) lugar de las raíces compensado; (b) código MATLAB.

5. Con α conocido, determinar las localizaciones adecuadas del polo y del cero del compensador de manera que el lugar de las raíces compensado continúe pasando por la localización deseada.
6. Verificar la simulación y repetir cualquiera de los pasos si es necesario.

En las Figuras 10.34-10.36 se ilustra la metodología de diseño. Utilizando la función rlocfind, se puede calcular la ganancia K asociada con las raíces que se escojan sobre el lugar de las raíces no compensado que yacen en la región de comportamiento. Después se calcula α para asegurar que se logra el K_p deseado. Se sitúan el polo y el cero del compensador de retardo para evitar que afecten al lugar de las raíces del sistema no compensado. En la Figura 10.35, el polo y el cero del compensador de retardo están muy cercanos al origen, en $z = -0.1$ y $p = -0.01$.

Las especificaciones de tiempo de asentamiento y sobreelongación no se satisfacen, pero $K_p = 10$, tal y como se deseaba. Es posible continuar con iteraciones de diseño y refinar el compensador, aunque debería quedar claro que el compensador de retardo ha



(a)

```
K=100;
%
numg=[1]; deng=[1 15 50 0]; sysg=tf(numg,deng);
numgc=K*[1 0.1]; dengc=[1 0.01]; sysgc=tf(numgc,dengc);
%
syso=series(sysgc,sysg);
sys=feedback(syso,[1]);
%
step(sys)
```

(b)

FIGURA 10.36. Compensador de retardo: (a) respuesta a un escalón; (b) respuesta en MATLAB.

mejorado los errores en estado estacionario frente a una entrada rampa en relación con el diseño del compensador de adelanto. El diseño final del compensador de retardo es

$$G_c = \frac{100(s + 0.1)}{(s + 0.01)}.$$

El comportamiento resultante se resume en la Tabla 10.5. ■

Tabla 10.5 Resultados del diseño de compensador utilizando MATLAB

Controlador	Ganancia, K	Adelanto	Retardo
Sobreelongación para un escalón	70%	8%	13%
Tiempo de asentamiento (segundos)	8	1	9
Error en estado estacionario para una rampa	10%	20%	10%
K_p	10	5	10

10.15. EJEMPLO DE DISEÑO SECUENCIAL: SISTEMA DE LECTURA DE UNA UNIDAD DE DISCO

En este capítulo se diseña un controlador proporcional-derivativo (PD) para lograr la respuesta especificada frente a una entrada escalón unidad. Las especificaciones se muestran en la Tabla 10.6. En la Figura 10.37 se puede observar el sistema en lazo cerrado. Se utiliza un prefiltro para eliminar cualquier efecto no deseado del término $(s + z)$ que se introduce en la función de transferencia en lazo cerrado. Se utilizará un sistema de respuesta plana de los estudiados en la Sección 10.11, donde la función de transferencia en lazo cerrado deseada (Ecuación 10.87) es

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \alpha\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{10.99}$$

Para el modelo de segundo orden que se muestra en la Figura 10.37, se requiere $\alpha = 1.82$ (*véase* la Tabla 10.2). Entonces el tiempo de asentamiento es

$$\omega_n T_s = 4.82.$$

Como el tiempo de asentamiento deseado es menor que 50 ms, se utilizará $\omega_n = 120$. Entonces es de esperar que $T_s = 40$ ms. Por lo tanto, el denominador de la Ecuación (10.99) es

$$s^2 + 218.4s + 14\,400. \tag{10.100}$$

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado de la Figura 10.37 es

$$s^2 + (20 + 5K_D)s + 5K_P = 0. \tag{10.101}$$

Igualando las Ecuaciones (10.100) y (10.101), se tiene

$$218.4 = 20 + 5K_D$$

y

$$14\,400 = 5K_P.$$

Tabla 10.6 Especificaciones del sistema de control de una unidad de disco y comportamiento real

Medida de comportamiento	Valor deseado	Respuesta real
Porcentaje de sobreelongación	Menor que el 5%	0.1%
Tiempo de asentamiento	Menor que 150 ms	40 ms
Máxima respuesta frente a una perturbación unidad	Menor que 5×10^{-3}	6.9×10^{-5}

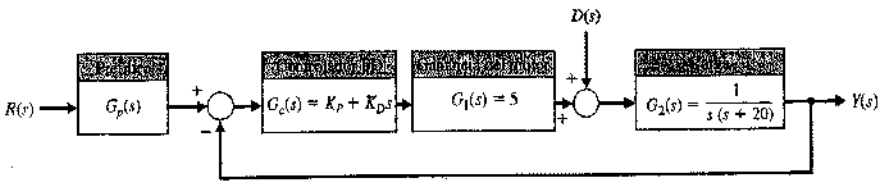


FIGURA 10.37. Sistema de control de una unidad de disco con un controlador PD (modelo de segundo orden).

Por lo tanto, $K_P = 2880$ y $K_D = 39.68$. Entonces se observa que

$$G_c(s) = 39.68(s + 72.58).$$

El prefiltro será entonces

$$G_p(s) = \frac{72.58}{(s + 72.58)}.$$

El modelo rechaza el campo del motor. No obstante, el diseño será muy preciso. La respuesta real se presenta en la Tabla 10.6. Se satisfacen todas las especificaciones.

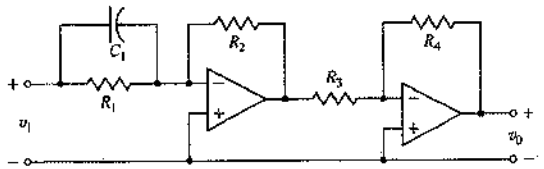
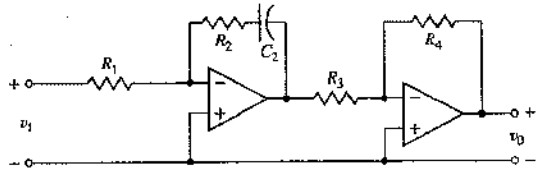
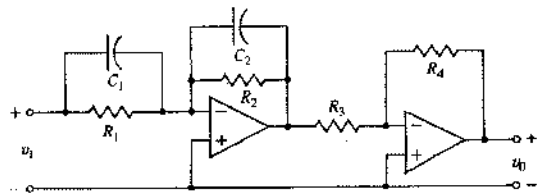
10.16. RESUMEN

En este capítulo se han considerado varios métodos alternos para el diseño y compensación de los sistemas de control con realimentación. En las dos primeras secciones se analizaron los conceptos de diseño y compensación y se indicaron los diversos casos de diseño en los capítulos precedentes. Después se examinó la posibilidad de introducir redes de compensación en cascada dentro de los lazos de realimentación de los sistemas de control. Las redes de compensación en cascada son útiles para alterar la forma del lugar de las raíces o la respuesta de frecuencia de un sistema. Se consideraron en detalle las redes de adelanto y de retardo de fase como candidatas para compensadores de los sistemas. Después se estudió la compensación de los sistemas usando sucesivamente una red de adelanto de fase en el plano s del diagrama de Bode y en el plano s del diagrama del lugar de las raíces. Se indicó que el compensador de adelanto de fase aumenta el margen de fase del sistema y proporciona así una estabilidad adicional. Cuando las especificaciones de diseño incluyen una constante de error, se realiza más fácilmente el diseño de una red de adelanto de fase en el diagrama de Bode. Alternativamente, cuando no se especifica una constante de error, sino que se especifican el tiempo de estabilización y la sobreelongación para una entrada de escalón, el diseño de una red de adelanto de fase se efectúa más fácilmente en el plano s. Cuando se especifican constantes de error grandes para un sistema de realimentación, generalmente es más fácil compensar el sistema usando redes de integración (retardo de fase). También se indicó que la compensación de adelanto de fase aumenta el ancho de banda del sistema, mientras que la de retardo lo disminuye. Frecuentemente, el ancho de banda puede ser un factor importante cuando el ruido está presente en la entrada y se genera dentro del sistema. También se observó que se obtiene un sistema satisfactorio cuando el curso asintótico para la magnitud del sistema compensado cruza la línea de 0 dB con una pendiente de -20 dB/década. Las características de las redes de compensación de retardo y de adelanto de fase se resumen en la Tabla 10.7. En la Tabla 10.8 [1] se resumen los circuitos amplificadores operacionales para los compensadores PI y PD por adelanto de fase y retador de fase. El uso de estos controladores se ha mostrado ampliamente en este capítulo y en capítulos precedentes. Estos circuitos amplificadores operacionales se han utilizado mucho en la práctica industrial para proporcionar el compensador $G_c(s)$.

Tabla 10.7 Resumen de las características de la red de compensación de adelanto y de retardo de fase

	Compensación	
	Adelanto de fase	**Retardo de fase**
Método	Adición de ángulo de adelanto de fase próximo a la frecuencia de cruce en el diagrama de Bode. Añadir una red de adelanto para conseguir las raíces dominantes deseadas en el plano s.	Adición de atraso de fase para conseguir un incremento en la constante de error mientras se mantienen las raíces dominantes deseadas en el plano s o el margen de fase en el diagrama de Bode.
Resultados	1. Aumenta el ancho de banda del sistema. 2. Aumenta la ganancia en las frecuencias más altas.	1. Disminuye el ancho de banda.
Ventajas	1. Produce la respuesta deseada. 2. Mejora la respuesta dinámica.	1. Suprime el ruido de alta frecuencia. 2. Reduce el error en estado estacionario.
Desventajas	1. Requiere ganancia adicional en el amplificador. 2. Aumenta el ancho de banda y, por tanto, la susceptibilidad al ruido. 3. Puede requerir valores altos de los componentes para la red RC.	1. Vuelve lenta la respuesta transitoria. 2. Puede requerir valores altos de los componentes para la red RC.
Aplicaciones	1. Cuando se desea respuesta transitoria rápida.	1. Cuando se especifican las constantes de error.
No aplicable	1. Cuando la fase disminuye rápidamente cerca de la frecuencia de cruce.	1. Cuando no existe un intervalo de bajas frecuencias dónde la fase sea igual al margen de fase deseado.

Tabla 10.8 Circuitos de amplificadores operacionales para compensadores PI y PD

Tipo de controlador	$G_c(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)}$	
PD	$G_c = \frac{R_4R_2}{R_3R_1}(R_1C_1s) + 1$	
PI	$G_c = \frac{R_4R_2(R_2C_2C_2s + 1)}{R_3R_1(R_2C_2s)}$	
Adelando o retardo	$G_c = \frac{R_4R_2(R_1C_1s + 1)}{R_3R_1(R_2C_2s + 1)}$	
Adelanto $R_1C_1 > R_2C_2$		
Retardo $R_1C_1 < R_2C_2$		

EJERCICIOS

E10.1. Un sistema de control con realimentación negativa tiene una función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{(s+3)}.$$

Se selecciona un compensador

$$G_c(s) = \frac{s+a}{s},$$

a fin de lograr un error cero en estado estacionario para una entrada de escalón. Seleccionar a y K de manera que la sobreelongación para un escalón sea aproximadamente del 5% y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de aproximadamente 1 segundo.

Respuesta: $K = 5$, $a = 6.4$

E10.2. Un sistema de control con realimentación unitaria negativa tiene un proceso

$$G(s) = \frac{400}{s(s+40)},$$

y se desea utilizar una compensación proporcional integral, donde

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}.$$

Obsérvese que el error en estado estacionario de este sistema para una entrada de rampa es cero. (a) Hacer $K_I = 1$ y calcular un valor adecuado de K_P para que la respuesta de escalón tenga una sobreelongación de aproximadamente 20%. (b) ¿Cuál es el tiempo de estabilización esperado del sistema compensado?

Respuesta: $K_P = 0.5$

E10.3. Un sistema de control con realimentación unitaria negativa en un sistema de fabricación tiene una función de transferencia de proceso

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

y se propone emplear un compensador para obtener una sobreelongación del 5% frente a una entrada de escalón. El compensador es [4]

$$G_c(s) = K\left(1 + \frac{1}{\tau s}\right),$$

que proporciona un control proporcional más integral. Demostrar que una solución es $K = 0.5$ y $\tau = 1$.

E10.4. Considerar un sistema con realimentación unitaria negativa con

$$G(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+10)},$$

donde K se hace igual a 100 para lograr una $K_v = 2$. Se desea añadir un compensador de adelanto-retardo

$$G_c(s) = \frac{(s+0.15)(s+0.7)}{(s+0.015)(s+7)}.$$

Demostrar que el margen de ganancia del sistema compensado es 28.6 dB y que el margen de fase es de 75.4°.

E10.5. Considerar un sistema con realimentación unitaria con la función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}.$$

Se desea obtener las raíces dominantes con $\omega_n = 3$ y $\zeta = 0.5$. Así mismo, se desea obtener una $K_v = 2.7$. Demostrar que se requiere un compensador

$$G_c(s) = \frac{7.53(s+2.2)}{(s+16.4)}.$$

Determinar el valor de K que se debe seleccionar.

Respuesta: $K = 22$

E10.6. Considerar nuevamente el sistema de control del túnel de viento del Problema 7.31. Cuando $K = 326$, determinar $T(s)$ y calcular la sobreelongación y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) esperados. Comparar los resultados con la sobreelongación real del 60% y el tiempo de asentamiento de 4 segundos. Explicar la discrepancia con respecto a los resultados obtenidos.

E10.7. Astronautas de la NASA recuperaron un satélite y lo trajeron en el compartimento de carga de una nave espacial, como se muestra en la Figura E10.7(a). En la Figura E10.7(b) se muestra un modelo del sistema de control con realimentación. Determinar el valor de K que producirá un margen de fase de 50° cuando $T = 0.5$ segundos.

Respuesta: $K = 11.7$

E10.8. Un sistema con realimentación unidad negativa tiene una planta

$$G(s) = \frac{2257}{s(\tau s+1)},$$

donde $\tau = 2.8$ ms. Seleccionar un compensador

$$G_c(s) = K_P + K_I/s,$$

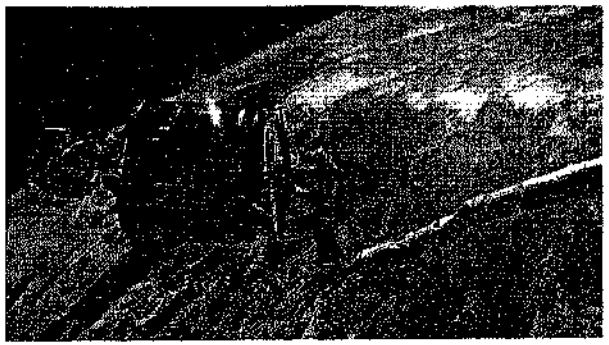
de manera que las raíces dominantes de la ecuación característica tengan ζ igual a $1/\sqrt{2}$. Dibujar $y(t)$ para una entrada escalón.

E10.9. En la Figura E10.9 se muestra un sistema de control con un controlador. Seleccionar K_P y K_I de manera que la sobreelongación frente a una entrada escalón sea igual al 5%, y la velocidad constante K_v sea igual a 5. Verificar los resultados del diseño.

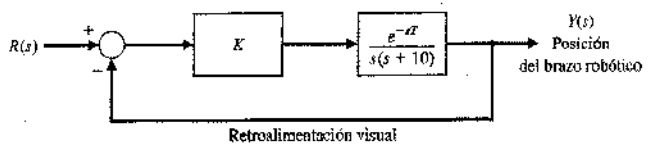
E10.10. En la Figura E10.10 se muestra un sistema de control con un controlador. Se selecciona $K_I = 4$ para proporcionar un error razonable en estado estacionario frente a un escalón [8]. Determinar K_P para obtener un margen de fase de 60°. Calcular el tiempo de pico y el tanto por ciento de sobreelongación de este sistema.

E10.11. Un sistema con realimentación unidad tiene

$$G(s) = \frac{1350}{s(s+2)(s+30)}.$$



(a)



(b)

FIGURA E10.7
Recuperación de un satélite.

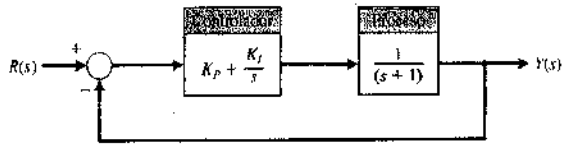


FIGURA E10.9
Diseño de un controlador.

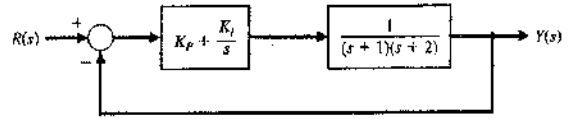


FIGURA E10.10
Diseño de un controlador PI.

Se selecciona una red de adelanto

$$G_c(s) = \frac{(1+0.25s)}{(1+0.025s)}.$$

Determinar la magnitud de pico y el ancho de banda de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado utilizando (a) la carta de Nichols y (b) una dibujo de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado.

Respuesta: $M_{p_m} = 2.3$ dB, $\omega_B = 22$

E10.12. El control del sistema de encendido de un automóvil tiene una realimentación negativa y una función de transferencia de tazo $G_c(s)G(s)$, donde

$$G(s) = \frac{K}{s(s+5)} \quad \text{y} \quad G_c(s) = K_P + K_I/s.$$

Un diseñador selecciona $K_I/K_P = 0.5$ y pide que se determine KK_P de manera que las raíces complejas tengan una ζ de $1/\sqrt{2}$.

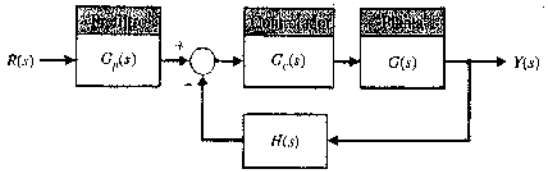


FIGURA E10.18
Sistema con realimentación no unitaria con un prefiltro.

E10.13. El diseño del Ejemplo 10.3 determinó una red de adelanto para obtener la situación de las raíces dominantes utilizando un compensador en cascada $G_c(s)$ en la configuración del sistema que se muestra en la Figura 10.1(a). La misma red de adelanto se hubiese obtenido si se hubiese utilizado la configuración de compensación realimentada de la Figura 10.1(b). Determinar la función de transferencia en lazo cerrado, $T(s) = Y(s)/R(s)$ de ambas configuraciones, en cascada y realimentada, y mostrar las diferencias de las funciones de transferencia en cada configuración. Explicar cómo la respuesta frente a un escalón, $R(s)$, será diferente para cada sistema.

E10.14. Un robot será operado por la NASA para construir una estación lunar permanente. En la Figura 10.1(a) se muestra el sistema de control de posición de la herramienta que se coloca en la pinza del robot, donde $H(s) = 1$, y

$$G(s) = \frac{3}{s(s + 1)(0.5s + 1)}.$$

Determinar una red compensadora de retardo, $G_c(s)$, que proporcione un margen de fase de 45°.

Respuesta: $G_c(s) = \dfrac{1 + 20s}{1 + 106s}$

E10.15. Un sistema de control con realimentación unidad tiene una función de transferencia de la planta

$$G(s) = \frac{40}{s(s + 2)}.$$

Se desea lograr un error en estado estacionario frente a una rampa, $r(t) = At$, menor que $0.05A$ y un margen de fase de 30°. Se desea conseguir una frecuencia de cruce, ω_c, de 10 rad/s. Utilizar los métodos mostrados en la Sección 10.9 para determinar si se requiere un compensador de adelanto o de retardo.

E10.16. Considerar de nuevo el sistema y las especificaciones del Ejercicio 10.15 cuando la frecuencia de cruce que se requiere es de 2 rad/s.

E10.17. Considerar de nuevo el sistema del Ejercicio 10.9. Seleccionar K_p y K_t de manera que la respuesta a un escalón sea plana y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) sea menor que 2 segundos.

E10.18. El sistema de control con realimentación no unidad que se muestra en la Figura E10.18 tiene la función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s - 20} \quad \text{y} \quad H(s) = 10.$$

Diseñar un compensador $G_c(s)$ y un prefiltro $G_p(s)$ de manera que el sistema en lazo cerrado sea estable y cumpla las especificaciones siguientes: (i) un tanto por ciento de sobreelongación frente a una entrada escalón unidad menor que el 10%, (ii) un tiempo de asentamiento menor que 2 segundos, y (iii) un error de seguimiento en estado estacionario frente a un escalón unidad nulo.

E10.19. Un sistema de control con realimentación unidad tiene la función de transferencia de la planta siguiente:

$$G(s) = \frac{1}{s(s - 10)}.$$

Diseñar un controlador PID de la forma

$$G_c(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s}$$

de manera que el sistema en lazo cerrado tenga un tiempo de asentamiento menor que 1 segundo para una entrada escalón unidad.

PROBLEMAS

P10.1. El diseño del módulo de excursión lunar (LEM, *Lunar Excursion Module*) es un problema de control interesante. En la Figura P10.1 se muestra el sistema de control de posición para dicho vehículo. El amortiguamiento del vehículo es insignificante y la posición se controla por chorros de gas. El par de torsión, en primera aproximación, se considerará proporcional a la señal $V(s)$, de forma que $T(s) = K_2 V(s)$. El diseñador puede seleccionar la ganancia del lazo de modo que proporcione un amortiguamiento adecuado. Se necesita una relación de amortiguamiento de $\zeta = 0.6$ con un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 2.5 segundos. Mediante una compensación de red de adelanto, seleccionar el compensador necesario $G_c(s)$ usando (a) técnicas de respuesta de frecuencia y (b) métodos del lugar de las raíces.

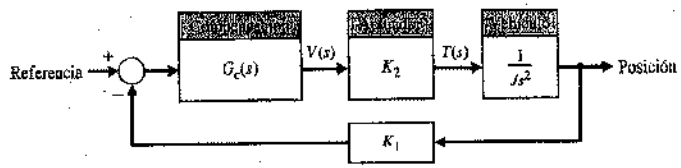


FIGURA P10.1
Sistema de control de posición para un módulo de excursión lunar.

P10.2. Un transportador de cinta de grabación magnética para computadores modernos requiere un sistema de control de gran exactitud y respuesta rápida. Los requisitos para un transportador específico son los siguientes: (1) la cinta debe detenerse o arrancar en 10 ms; (2) debe ser posible leer 45 000 caracteres por segundo. Este sistema se analizó en el Problema P7.11. Se desea tener $J = 5 \times 10^{-3}$ y K_1 se establece según el error máximo permisible para una entrada de velocidad. Se desea mantener un error de velocidad en el estado estacionario menor que el 5%. En este caso se usará un tacómetro y se fija $K_a = 50\,000$ y $K_2 = 1$. Para proporcionar un comportamiento adecuado, se inserta un compensador $G_c(s)$ después del transductor de fotocelda. Seleccionar un compensador $G_c(s)$ de forma que la sobreelongación del sistema para una entrada de escalón sea menor que el 25%. Suponer que $\tau_1 = \tau_a = 0$

P10.3. En la Figura P10.3 se muestra una versión simplificada del control de posición proporcional para la aeronave tipo F-94 o X-15. Cuando el vehículo está volando a cuatro veces la velocidad del sonido (Mach 4) a una altitud de 100 000 ft, los parámetros son [30]

$$\frac{1}{\tau_a} = 1.0, \qquad K_1 = 1.0,$$

$$\zeta\omega_a = 1.0, \quad \text{y} \quad \omega_a = 4$$

Diseñar un compensador, $G_c(s)$, de forma que la respuesta frente a una entrada escalón tenga una sobreelongación menor que el 5% y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 5 segundos.

P10.4. Los embragues de partículas magnéticas son dispositivos reguladores útiles para requisitos de alta potencia, porque normalmente pueden proporcionar una potencia mecánica de salida de 200 W. El embrague de partículas proporciona una alta relación, momento de torsión a inercia y una respuesta rápida de la constante de tiempo. En la Figura P10.4 se muestra un sistema de embragues de partículas para controlar la posición de barras de reactores nucleares. El motor acciona dos cajas de embragues giratorios de sentidos opuestos. Las cajas de embragues se engranan mediante trenes de engranaje en paralelo, y la dirección de la salida del servomecanismo depende del embrague energizado. La constante de tiempo de un embrague de 200 W es $\tau = 1/40$ segundos. Las constantes son tales que $K_T n/J = 1$. Se desea que la máxima sobreelongación para una entrada de escalón se encuentre en un intervalo del 10 al 20%. Diseñar una red de compensación de forma que el sistema se estabilice adecuadamente. El tiempo de asentamiento del sistema deberá ser menor o igual que 2 segundos.

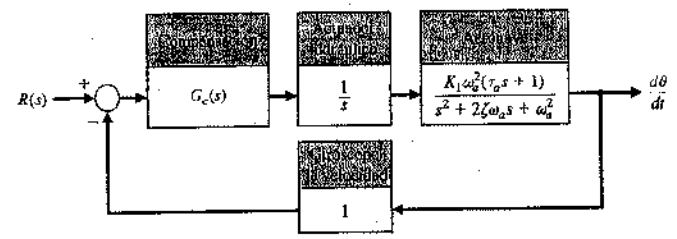


FIGURA P10.3
Control de posición de una aeronave.

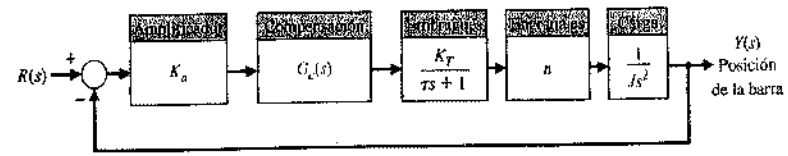


FIGURA P10.4
Control de barra de reactor nuclear.

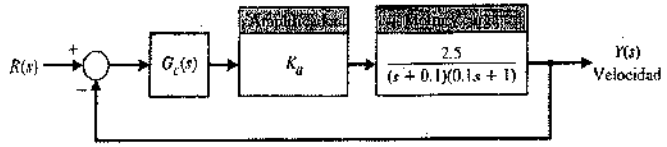


FIGURA P10.5
Mesa estabilizada con rapidez.

P10.5. Una mesa estabilizada con rapidez de precisión usa un tacómetro de precisión y un motor de cc con momento de torsión de transmisión directa como se muestra en la Figura P10.5. Se desea mantener una alta precisión en estado estacionario para el control de velocidad. Con el fin de obtener un error en estado estacionario cero para un diseño de orden de escalón, seleccionar un compensador proporcional más integral, como se analizó en la Sección 10.6. Seleccionar las constantes de ganancia adecuadas para que el sistema tenga una sobreelongación de aproximadamente el 10% y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) que se encuentre dentro del intervalo de 0.4 a 0.6 segundos.

P10.6. Repetir el Problema 10.5 usando un compensador con red de adelanto y comparar los resultados.

P10.7. El lazo primario de control en una planta de energía nuclear incluye un tiempo de retardo debido al tiempo necesario para transportar el fluido desde el reactor hasta el punto de medición. (*véase* la Figura P10.7.) La función de transferencia del controlador es

$$G_c(s) = \left(K_p + \frac{K_I}{s}\right).$$

La función de transferencia del reactor y del retardo de tiempo es

$$G(s) = \frac{e^{-sT}}{\tau s + 1},$$

donde $T = 0.4$ segundos y $\tau = 0.2$ segundos. Usando los métodos de respuesta de frecuencia, diseñar el controlador de forma que la sobreelongación del sistema sea menor que el 10%. Calcular el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) del sistema diseñado. Determinar la sobreelongación y el tiempo de asentamiento reales.

P10.8. En la Figura P10.8 se muestra, en forma de diagrama de bloques, el proceso de un reactor químico cuya tasa de producción es función de la agregación del catalizador [11]. El tiempo de retardo es $T = 50$ segundos y la constante de tiempo, τ, es aproximadamente de 40 segundos. La ganancia del proceso es $K = 1$. Diseñar un compensador usando los métodos del diagrama de Bode para proporcionar una respuesta adecuada del sistema. Se desea tener un error en estado estacionario para una entrada de escalón, $R(s) = A/s$, menor que $0.10A$. Calcular el tiempo de asentamiento para el sistema con la compensación añadida.

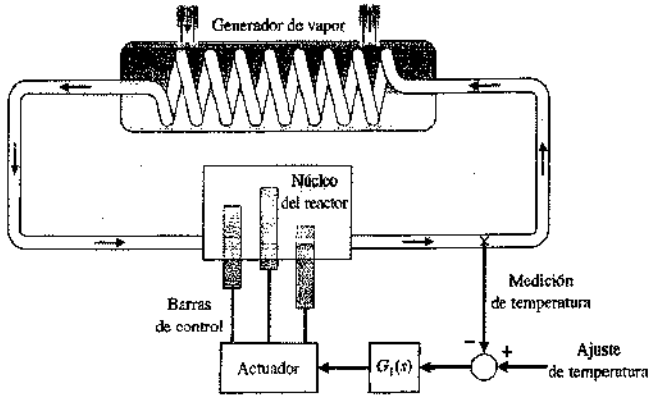


FIGURA P10.7
Control de reactor nuclear.

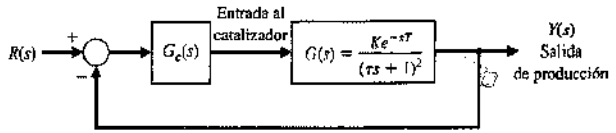


FIGURA P10.8
Control de reactor químico.

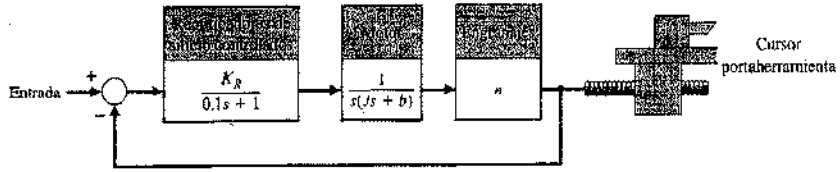
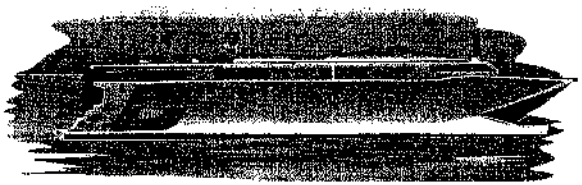


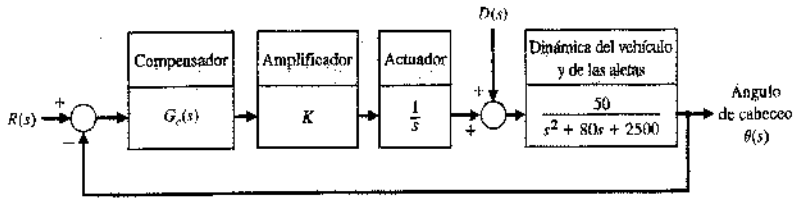
FIGURA P10.9
Camino de control de un torno revólver.

P10.9. El torno revólver de una máquina de paso controlado plantea un problema interesante en la obtención de exactitud suficiente [2, 26]. En la Figura P10.9 se muestra un diagrama de bloques del sistema de control de un torno revólver. La relación de engranajes es $n = 0.1$, $J = 10^{-3}$ y $b = 10^{-2}$. Es necesario obtener una exactitud de 5×10^{-4} in.; por tanto, para una entrada de rampa se especifica una exactitud del 2.5% en la posición de estado estacionario. Diseñar un compensador en cascada para introducir antes de los rectificadores de silicio controlados, con el objeto de proporcionar una respuesta para una orden de escalón con una sobreelongación menor que el 5%. Una razón de amortiguamiento adecuada para este sistema es 0.7. La ganancia de los rectificadores de silicio es $K_R = 5$. Diseñar un compensador adecuado usando (a) el método del diagrama de Bode y (b) el método del plano s.

P10.10. El ferry Avemar, que se muestra en la Figura P10.10(a), es un gran hidromodelo naval de 670 toneladas construido para el servicio de ferrys del Mediterráneo. Es capaz de alcanzar una velocidad de 45 nudos (52 mph) [33]. La apariencia de la embarcación, como su comportamiento, se deriva de un diseño innovador del casco que se mueve a través del agua como en las lanchas de competición. Entre los dos cascos hay un tercer casco que proporciona mayor capacidad de flote en aguas agitadas. Cargado con 900 pasajeros y tripulación, y una mezcla de coches, autobuses y vehículos de carga, cada embarcación puede transportar casi su propio peso. El Avemar es capaz de operar en el mar con olas de hasta 8 pies de amplitud a una velocidad de 40 nudos como resultado de la utilización de un sistema automático de control de estabilización. La estabilización se logra mediante alerones en las aletas de sustentación principales y el ajuste de la aleta de popa. El sistema de control de estabilización mantiene una travesía estable en mar agitado. De este modo, se ha diseñado un sistema que minimiza las desviaciones respecto de una fuerza constante de elevación o, en otras palabras, que minimiza el ángulo de cabeceo θ. En la Figura P10.10(b) se muestra un diagrama de bloques del sistema de control de elevación. La respuesta deseada del sistema a una perturbación de las olas es un recorrido de la embarcación con nivel constante. Establecer un conjunto de especificaciones razonables y diseñar un compensador $G_c(s)$ de forma que el comportamiento del sistema sea adecuado. Supóngase que la perturbación se debe a olas con una frecuencia $\omega = 6$ rad/s.



(a)



(b)

FIGURA P10.10
(a) El ferry Avemar construido para el servicio de ferrys entre Barcelona y las Islas Baleares. (b) Un diagrama de bloques del sistema de control.

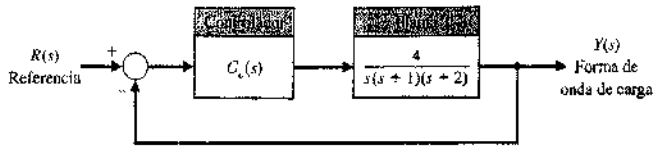


FIGURA P10.14

P10.11. Un sistema con realimentación unidad como el que se muestra en la Figura 10.1(a) tiene una planta

$$G(s) = \frac{4.19}{s(s+1)(s+5)}.$$

(a) Determinar la respuesta frente a un escalón cuando $G_c(s) = 1$ y calcular el tiempo de asentamiento y el estado estacionario para una entrada rampa $r(t) = t$, $t > 0$. (b) Diseñar una red de retardo utilizando el método del lugar de las raíces de forma que la velocidad constante se incremente a 8.4. Determinar el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) del sistema compensado.

P10.12. Un sistema con realimentación unidad como el que se muestra en la Figura 10.1(a) tiene una planta

$$G(s) = \frac{160}{s^2}.$$

Seleccionar un compensador adelanto-retardo de manera que el tanto por ciento de sobreelongación para una entrada escalón sea menor del 5% y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) sea menor que 1 segundo. Además se desea que la aceleración constante K_a sea mayor que 7500 (*véase* la Tabla 5.5).

P10.13. Un sistema con realimentación unidad tiene una planta

$$G(s) = \frac{20}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.05s)}.$$

Seleccionar un compensador $G_c(s)$ de manera que el margen de fase sea al menos de 75°. Utilizar un compensador de adelanto de dos estados

$$G_c(s) = \frac{K(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_3)}{(1 + s/\omega_2)(1 + s/\omega_4)}.$$

Se requiere que el error para una entrada rampa sea de 1/2% de la magnitud de la entrada rampa ($K_v = 200$).

P10.14. Los materiales de ensayo requieren el diseño de sistemas de control que puedan reproducir fielmente entornos de operación típicos sobre un rango de parámetros específicos [26]. Desde el punto de vista del diseño de los sistemas de control, un sistema para testear materiales se puede considerar como un servomecanismo en el que se desea que la forma de onda de carga siga a la señal de referencia.
El sistema se muestra en la Figura P10.14.

(a) Determinar el margen de fase del sistema con $G_c(s) = K$, escogiendo K de manera que el margen de fase que se consiga sea de 50°. Determinar el ancho de banda del sistema para este diseño.
(b) Se introduce como requisito adicional que la velocidad constante K_v sea igual a 2.0. Diseñar una red de retardo de forma que el margen de fase sea de 50° y $K_v = 2$.

P10.15. Para el sistema descrito en el Problema 10.14, el objetivo es lograr un margen de fase de 50° con el requisito adicional de que el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2% del valor final) sea menor que 4 segundos. Diseñar una red de adelanto para conseguir las especificaciones. Como en el caso anterior, se requiere $K_v = 2$.

P10.16. Un robot con un brazo extendido tiene una carga pesada, cuyo efecto es una perturbación, tal y como se muestra en la Figura P10.16 [25]. Suponiendo que $R(s) = 0$, diseñar $G_c(s)$ de manera que el efecto de la perturbación sea menor que el 20% del efecto del sistema en lazo abierto.

P10.17. Un conductor y un coche se pueden representar mediante el modelo simplificado de la Figura P10.17 [18]. El objetivo es conseguir que la velocidad esté ajustada frente a una entrada escalón con una sobreelongación menor que el 10% y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de

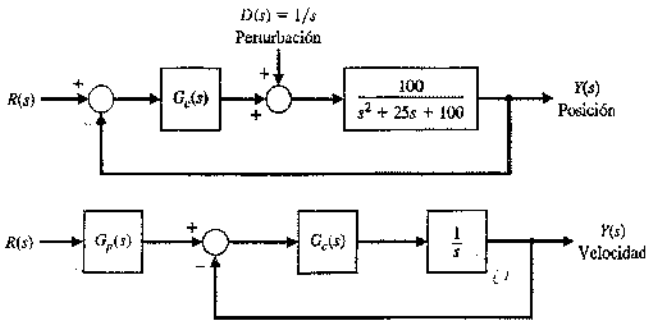


FIGURA P10.16
Control de robot.

FIGURA P10.17
Control de velocidad de un automóvil.

1 segundo. Seleccionar un controlador proporcional más integral (PI) para conseguir dichas especificaciones. Para el controlador seleccionado determinar la respuesta real (a) para $G_p(s) = 1$ y (b) con un prefiltro $G_p(s)$ que anule el cero de la función de transferencia en lazo cerrado $T(s)$.

P10.18. Un sistema de control con realimentación unitaria para un submarino robot tiene una planta con una función de transferencia de tercer orden [22]:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 10)(s + 50)}.$$

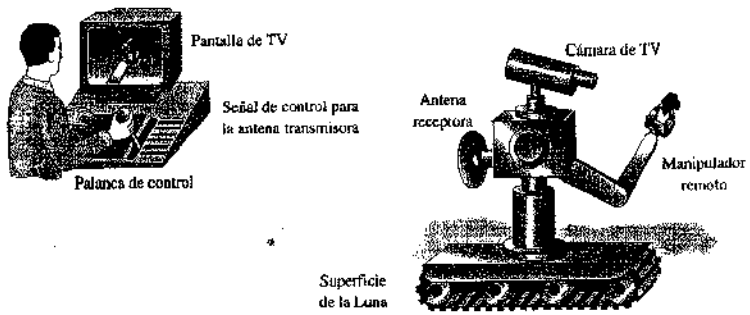
Se desea que la sobreelongación sea aproximadamente del 7.5% para una entrada de escalón y que el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) del sistema sea de 400 ms. Encontrar un compensador adecuado de adelanto de fase usando los métodos del lugar de las raíces. Suponiendo que el cero del compensador se localiza en $s = -15$, determinar el polo del compensador. Determinar la K_v resultante para el sistema.

P10.19. La NASA está desarrollando manipuladores remotos que pueden usarse para ampliar el alcance y poder del hombre a través del espacio por medio de la radio. En la Figura P10.19(a) [12, 25] se muestra un diagrama conceptual de un manipulador remoto. El control de lazo cerrado se muestra esquemáticamente en la Figura P10.19(b). Suponiendo una distancia promedio de 238 855 millas de la Tierra a la Luna, el tiempo de retardo en la transmisión de una señal de comunicación T es de 1.28 segundos. El operador usa una palanca de control para controlar remotamente el manipulador colocado en la Luna con el fin de ayudar en experimentos geológicos, y la pantalla de TV para observar la respuesta del manipulador. La constante de tiempo del manipulador es de 1/4 de segundo.

(a) Establecer la ganancia K_1 de forma que el sistema tenga un margen de fase de aproximadamente 30°. Calcular el porcentaje del error de este sistema en estado estacionario para una entrada de escalón. (b) Con el objeto de reducir el error en estado estacionario al 5% para una orden de entrada de posición, añadir una red de compensación en cascada con K_1. Dibujar la respuesta frente a un escalón.

P10.20. Se han conseguido desarrollos significativos en la aplicación de la tecnología robótica a los problemas de mantenimiento en plantas de potencia nuclear. Hasta ahora, la tecnología robótica en la industria nuclear se ha usado fundamentalmente en el reprocesamiento de combustible quemado y la administración de desechos. Actualmente, esta industria está comenzando a aplicar dicha tecnología en áreas como inspección de contenedores, mantenimiento de reactores, descontaminación de instalaciones y actividades de recuperación en accidentes. Tales desarrollos sugieren que la aplicación de dispositivos de control remoto pueden reducir significativamente la exposición del personal a la radiación y mejorar el comportamiento de programas de mantenimiento.

En la actualidad se está desarrollando un sistema robótico operacional dirigido a los problemas de una planta de potencia nuclear. Este dispositivo, conocido como IRIS (Sistema de Inspección Remota Industrial), es un sistema de vigilancia



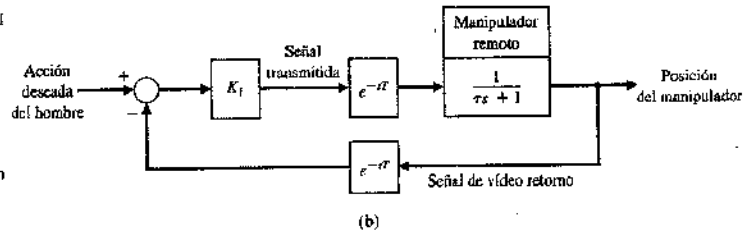


FIGURA P10.19
(a) Diagrama conceptual de un manipulador remoto en la Luna, controlado por un hombre en la Tierra. (b) Diagrama de realimentación del sistema de control manipulador remoto con T = tiempo de retardo en la transmisión de la señal de vídeo.

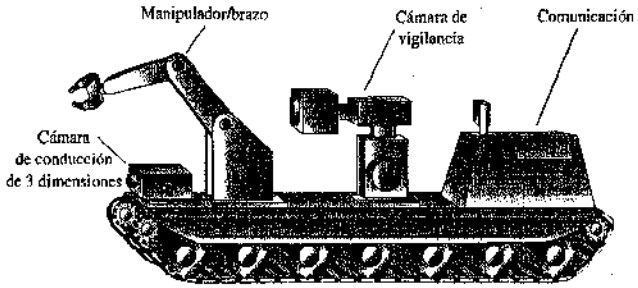


FIGURA P10.20
Robot controlado remotamente para plantas nucleares.

de múltiples propósitos desarrollado para realizar tareas de inspección y operación particulares con el objetivo de reducir significativamente la exposición del personal a altos campos de radiación [13]. Tal dispositivo se muestra en la Figura P10.20. La función de transferencia de lazo cerrado es

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT}}{(s+1)(s+3)}.$$

(a) Determinar una ganancia K adecuada para el sistema cuando $T = 0.5$ segundos, de manera que la sobreelongación a una entrada de escalón sea menor que el 30%. (b) Diseñar un compensador de adelanto

$$G_c(s) = \frac{s+2}{s+b}$$

para mejorar la respuesta de escalón para el sistema del apartado (a) de manera que el error en estado estacionario sea menor que el 12%. Suponer el sistema en lazo cerrado de la Figura 10.1(a).

P10.21. Un sistema de control no compensado con realimentación unitaria tiene una función de transferencia de planta

$$G(s) = \frac{K}{s(s/2+1)(s/6+1)}.$$

Se desea tener una constante de error de velocidad $K_v = 20$. También se desea tener un margen de fase aproximadamente a 45° y un ancho de banda de lazo cerrado mayor que $\omega = 4$ rad/s. Utilizar dos redes en cascada de adelanto de fase idénticas para compensar el sistema.

P10.22. Para el sistema del Problema 10.21, diseñar una red de retardo de fase para cumplir las especificaciones deseadas, pero ahora se aceptará un ancho de banda igual o mayor que 2 rad/s.

P10.23. Para el sistema del Problema 10.21, se desea obtener el mismo margen de fase y K_v, pero además se desea limitar el ancho de banda a menos de 10 rad/s pero a más de 2 rad/s. Utilizar una red de compensación de adelanto-retardo para compensar el sistema. La red de adelanto-retardo puede ser de la forma

$$G_c(s) = \frac{(1+s/10a)(1+s/b)}{(1+s/a)(1+s/10b)},$$

donde a se selecciona para la parte de retardo del compensador y b para la de adelanto. La relación α se escoge igual a 10 para ambas partes.

P10.24. Un sistema como el de la Figura 10.1(a) con realimentación unidad tiene

$$G(s) = \frac{K}{(s+3)^2}.$$

Se desea que el error en estado estacionario frente a una entrada escalón sea aproximadamente del 4% y el margen de fase del sistema aproximadamente de 45°. Diseñar una red de retardo que consiga estas especificaciones.

P10.25. La estabilidad y el comportamiento de la rotación de un robot (similar a la rotación de la cintura) es un problema de control muy interesante. El sistema requiere grandes ganancias para lograr una alta resolución, pero no se puede tener una sobreelongación alta en la respuesta transitoria. En la Figura P10.25 se muestra el diagrama de bloques de un sistema electrohidráulico para el control de la rotación [16]. La dinámica del brazo rotatorio se representa por

$$G(s) = \frac{100}{s(s^2/6400 + s/50 + 1)}.$$

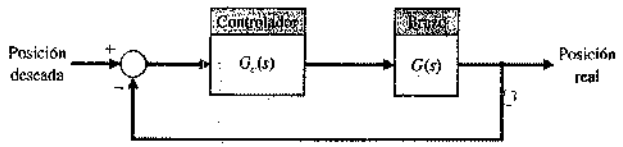


FIGURA P10.25
Control de posición de un robot.

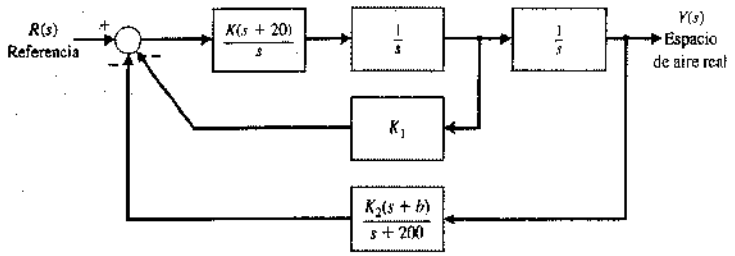


FIGURA P10.26
Control de espacio de aire de tren.

Se desea tener una $K_v = 20$ para el sistema compensado. Diseñar un compensador que proporcione una sobreelongación menor que el 10% a una entrada de escalón.

P10.26. En todo el mundo se está investigando la posibilidad de vencer la fricción de las ruedas, el desgaste y la vibración, por medio de vehículos para el transporte masivo de pasajeros con suspensión sin contacto. Uno de estos diseños emplea una suspensión magnética con una fuerza de atracción entre el vehículo y un riel guía, con un espacio de aire controlado de una manera muy precisa. En la Figura P10.26 se muestra un sistema que incorpora compensación con realimentación. Empleando los métodos del lugar de las raíces, seleccionar un valor adecuado para K_1 y b, de manera que el sistema tenga una razón de amortiguamiento para las raíces subamortiguadas de $\zeta = 0.50$. Supóngase, si se considera adecuado, que se puede despreciar el polo del lazo de realimentación del espacio de aire ($s = -200$).

P10.27. Un computador emplea una impresora como dispositivo de salida rápida. Se desea mantener un control de posición preciso con un paso rápido de papel por la impresora. Considerar un sistema con una realimentación unitaria y una función de transferencia para el motor y el amplificador como

$$G(s) = \frac{0.15}{s(s+1)(5s+1)}.$$

Diseñar un compensador de red de adelanto para que el ancho de banda del sistema sea de 0.75 rad/s y el margen de fase de 30°. Emplear una red de adelanto con $\alpha = 10$.

P10.28. Un equipo de diseño de ingenieros está intentando controlar el proceso que se muestra en la Figura P10.28. El sistema tiene un controlador $G_c(s)$, pero el equipo es incapaz de seleccionar $G_c(s)$ de forma adecuada. Están de acuerdo en que un sistema con un margen de fase de 50° es aceptable, pero no se conoce $G_c(s)$.

En primer lugar, suponiendo $G_c(s) = K$: (a) y determinar el valor de K para el que se obtiene un margen de fase de 50° y la respuesta a un escalón para este valor de K. (b) Determinar el tiempo de asentamiento, el tanto por ciento de sobreelongación y el tiempo de pico. (c) Obtener la respuesta en frecuencia del sistema en lazo cerrado, y determinar M_{p_m} y el ancho de banda.

El equipo de ingenieros ha decidido proponer

$$G_c(s) = \frac{K(s+12)}{(s+20)}$$

Y repetir los apartados (a), (b) y (c). Determinar la ganancia K que resulta en un margen de fase de 50° y después proceder a evaluar la respuesta temporal y la respuesta en frecuencia en lazo cerrado. Realizar una tabla para contrastar los resultados de los dos controladores seleccionados $G_c(s)$, comparando el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%), el tanto por ciento de sobreelongación, el tiempo de pico, M_{p_m} y el ancho de banda.

P10.29. Un sistema de suspensión adaptativo de un vehículo utiliza un principio de locomoción con patas. El control de la pata se puede representar mediante un sistema con realimentación unidad con [13]

$$G(s) = \frac{K}{s(s+10)(s+14)}.$$

Se desea lograr un error en estado estacionario para una entrada rampa del 10% y una razón de amortiguamiento de las raíces dominantes de 0.707. Determinar un compensador de retardo adecuado y calcular la sobreelongación real y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2% del valor final).

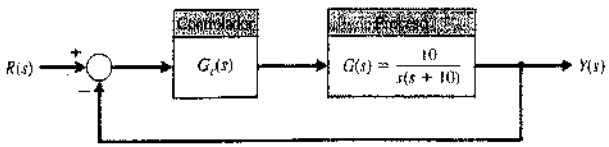


FIGURA P10.28
Diseño de controlador.

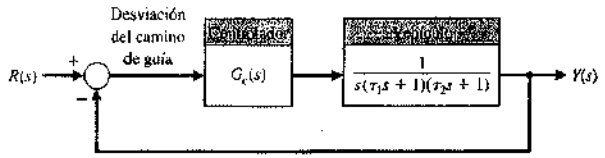


FIGURA P10.31
Control de dirección para vehículo

P10.30. Un sistema de control del nivel de un líquido (*véase* Figura 9.32) tiene una función de transferencia de lazo

$$G_c(s)G(s)H(s),$$

donde $H(s) = 1$, $G_c(s)$ es un compensador y la planta es

$$G(s) = \frac{10e^{-sT}}{s^2(s + 10)},$$

donde $T = 50$ ms. Diseñar un compensador de manera que $M_{p_{cl}}$ no exceda de 3.5 dB y ω_c sea de unos 1.4 rad/s. Predecir la sobreelongación y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) del sistema compensado cuando la entrada es un escalón. Dibujar la respuesta real.

P10.31. Un vehículo guiado automáticamente (AGV) se puede considerar como un transportador móvil automático diseñado para transportar materiales. La mayoría de los AGV requieren algún tipo de camino guiado. La estabilidad de dirección del sistema de control de guiado es un problema que no está del todo resuelto. El ligero culebreo del AGV sobre la vía ha sido normalmente aceptado, aunque indica inestabilidad del sistema de control de guiado de la dirección.

La mayoría de los AGV tienen una especificación de máxima velocidad de alrededor de 1 m/s, aunque en la práctica normalmente operan a la mitad de esta velocidad. En un medio de manufacturado totalmente automatizado, debería haber poco personal en el área de producción; por lo tanto, el AGV debería poder emplear su velocidad máxima. Cuanto más aumenta la velocidad del AGV más se dificulta el diseño de la estabilidad y los controles de seguimiento suaves.

En la Figura P10.31 se muestra un sistema dirección para un AVG, donde $\tau_1 = 40$ ms y $\tau_2 = 1$ ms. Se requiere que la velocidad constante K_p sea 100 de manera que el error en estado estacionario para una entrada rampa sea del 1% de la pendiente de la rampa. Despreciar τ_2 y diseñar un compensador de adelanto de manera que el margen de fase sea

$$45° \leqslant \text{PM} \leqslant 65°.$$

Se propone el obtener los dos casos límite para el margen de fase y comparar los resultados para los dos diseños determinando el tanto por ciento de sobreelongación y el tiempo de asentamiento para una entrada escalón.

P10.32. Para el sistema del Problema 10.31, utilizar un compensador de retardo de fase para lograr un margen de fase de aproximadamente 50°. Determinar la sobreelongación real y el tiempo de pico para el sistema compensado.

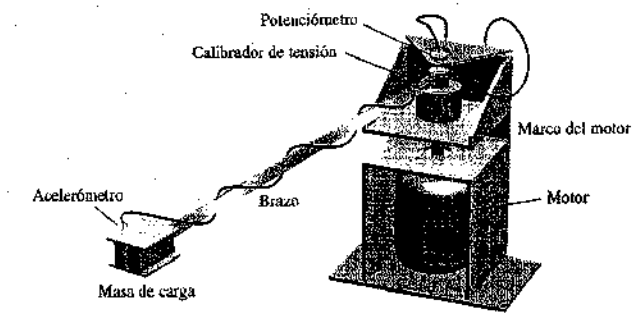
P10.33. Cuando un motor dirige una estructura flexible, las frecuencias naturales de la estructura, comparadas con el ancho de banda de la servodirección, determinan la contribución de la estructura flexible a los errores del movimiento resultante. En los robots industriales de hoy en día las transmisiones suelen ser relativamente lentas, y las estructuras son relativamente rígidas; por lo tanto, las sobreelongaciones y otros errores están ocasionados fundamentalmente por la servodirección. Sin embargo, dependiendo de la precisión que se requiera, pueden ser significativas las desviaciones estructurales de los miembros actuados. Se debe considerar la flexibilidad estructural como la mayor fuente de errores de movimiento en las estructuras espaciales y manipuladores. Debido a las restricciones de peso en el espacio, resultan brazos de estructuras flexibles de longitudes grandes. Además, los robots industriales del futuro deberían requerir manipuladores más ligeros y más flexibles.

Para investigar los efectos de la flexibilidad de las estructuras y cómo se pueden reducir las oscilaciones no deseadas utilizando diferentes esquemas de control, se construyó un aparato experimental que consiste en un motor de cc que dirige una barra larga y delgada de aluminio. El propósito del experimento era identificar estrategias de control simples y efectivas para tratar con errores de movimiento que tiene lugar cuando el servomotor está dirigiendo una estructura muy flexible [14].

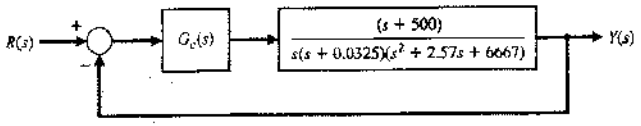
En la Figura P10.33(a) se muestra el aparato experimental y en la Figura P10.33(b) se puede observar el sistema de control. El objetivo es que el sistema tenga una K_p de 100. (a) Cuando $G_c(s) = K$, determinar K y dibujar el diagrama de Bode. (b) Utilizando la carta de Nichols, determinar ω_c, $M_{p_{cl}}$ y ω_B. (c) Seleccionar un compensador de manera que el margen de fase sea mayor que 35° y determinar ω_c, $M_{p_{cl}}$ y ω_B para el sistema compensado.

P10.34. La capacidad del ser humano para llevar a cabo tareas físicas está limitada no por su inteligencia sino por la fuerza física. Si en un medio adecuado, una máquina de potencia mecánica está integrada con un brazo humano de fuerza mecánica controlado por la inteligencia de un ser humano, el sistema resultante será superior a la combinación resultante de un humano y un robot totalmente automatizado.

Los extensores se definen como un tipo de robots manipuladores que aumentan la fuerza de un brazo humano mientras mantienen el control humano de la tarea [15]. La característica que define a un extensor es la transmisión tanto de potencia como de señales de información. El extensor es manipulado por el ser humano; el contacto físico entre el extensor y el operario permite la transferencia directa de la potencia mecánica y de las señales de información. Debido a este interfaz único, se puede lograr el control de la trayectoria del extensor sin ningún tipo de palanca de mando, teclado o sistema maestro-esclavo. El ser humano proporciona un sistema de control al extensor, mientras que los actuadores de éste proporcionan la mayor parte de la fuerza necesaria para la tarea. El operario llega a ser una parte del extensor y «siente» una mínima parte de la carga que soporta el extensor. Este dispositivo se diferencia del sistema convencional maestro-esclavo, en este tipo de sistemas, el operador humano está o en un lugar remoto o cerca del manipulador esclavo, pero no está en contacto físico directo con el esclavo en el sentido de transferencia de potencia. En la Figura P10.34(a) se muestra un extensor [15]. El diagrama de blo-

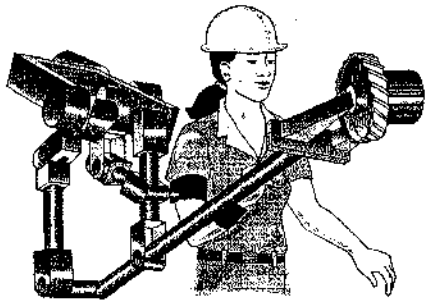


(a)

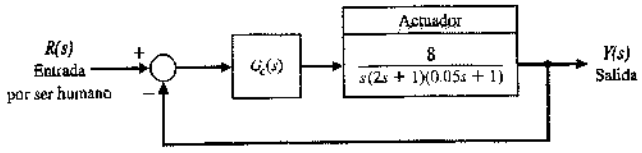


(b)

FIGURA P10.33
Control de brazo flexible.



(a)



(b)

FIGURA P10.34
Control de un robot extensor.

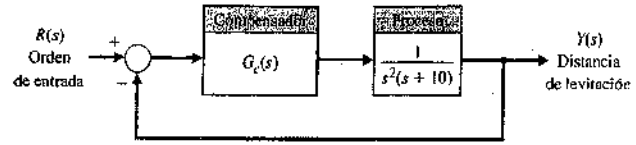


FIGURA P10.35
Control de un tren levitado magnéticamente.

ques del sistema se muestra en la Figura P10.34(b). El objetivo es que el sistema compensado tenga una velocidad constante, K_v, igual a 80, de manera que el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) sea de 1.6 segundos y la sobreelongación sea del 16%, de forma que las raíces dominantes tengan una ζ de 0.5. Determinar un compensador adelanto-retardo utilizando métodos del lugar de las raíces.

P10.35. Un tren levitador magnético está operando en Berlín. La línea M-Bahn 1600 m representa el estado de hoy en día de estos sistemas en el mundo. Trenes totalmente automatizados pueden correr en pequeños intervalos y operar con excelentes eficiencias de energía. El sistema de control para la levitación del coche se muestra en la Figura P10.35. Seleccionar un compensador de manera que el margen de fase del sistema sea $45° \leq MF \leq 55°$, y determinar la respuesta real frente a un escalón para comparaciones.

P10.36. Los ingenieros están desarrollando sensores nuevos para máquinas y procesos de manufacturado. Una técnica nueva de medida recoge información sobre el proceso de corte desde las señales de emisión acústica (AE). AE es una onda de presión de amplitud pequeña y alta frecuencia producida por una rápida emisión de energía de tensión en un medio continuo. AE es sensible al material, geometría de la herramienta, rotura de la herramienta y parámetros del corte tales como alimentación y velocidad. Los sensores AE son normalmente cristales piezoeléctricos con sensibilidad en el rango de 100 kHz a 1 MHz. Son rentables y se pueden montar sobre la mayoría de las máquinas de herramientas.

Las investigaciones actuales se centran en extraer información de la profundidad del corte a partir de las señales AE. Un estudio afina la sensibilidad de la potencia de la señal AE con los pequeños cambios en las profundidades del corte durante el giro del diamante y el fresado convencional. En la Figura P10.36(a) se muestra una fresadora que utiliza un sensor AE. En la Figura P10.36(b) se muestra el sistema para controlar la profundidad del corte de una fresadora. Diseñar un compensador de manera que el tanto por ciento de sobreelongación frente a una entrada escalón sea menor o igual que el 20% mientras que la velocidad constante sea mayor que 8.

P10.37. La función de transferencia de un sistema en lazo abierto es un retardo temporal puro de 0.5 segundos, de forma que $G(s) = e^{-s/2}$. Seleccionar un compensador $G_c(s)$ de manera que el error estacionario frente a una entrada escalón sea menor que el 2% de la magnitud del escalón y el margen de fase sea mayor que 30°. Determinar el ancho de banda del sistema compensado y dibujar la respuesta frente a un escalón.

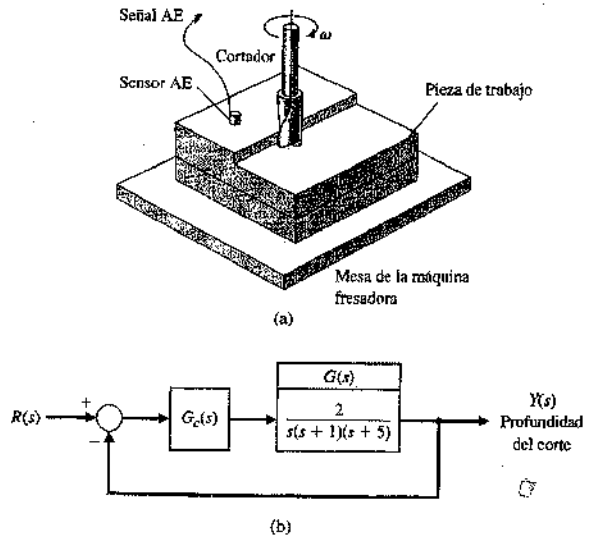


FIGURA P10.36
Control de una máquina fresadora.

P10.38. Un sistema con realimentación unidad negativa tiene

$$G(s) = \frac{1}{s(s+10)(s+20)}.$$

El objetivo es que las raíces dominantes tengan una ζ igual a 0.707 mientras se logra un error en estado estacionario nulo para una entrada rampa. Seleccionar un controlador proporcional integral (PI) de manera que se cumplan las especificaciones. Determinar el tiempo de pico resultante y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) del sistema.

P10.39. Un sistema con realimentación unidad como el que se muestra en la Figura 10.1(a) tiene

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+10)}.$$

Diseñar un compensador $G_c(s)$ de manera que la sobreelongación para una entrada escalón unidad $R(s)$ sea menor que el 10% y el error en estado estacionario sea menor que el 5%. Determinar el ancho de banda del sistema.

P10.40. Un sistema con realimentación unidad tiene una planta

$$G(s) = \frac{40}{s(s+2)}.$$

Se desea tener un margen de fase de 30° y un ancho de banda relativamente grande. Seleccionar la frecuencia de cruce, $\omega_c = 10$ rad/s, y diseñar un compensador de adelanto utilizando el método analítico explicado en la Sección 10.9. Verificar los resultados dibujando el diagrama de Bode del sistema compensado.

P10.41. Un sistema realimentado tiene una planta

$$G(s) = \frac{40}{s(s+2)}.$$

Se desea un margen de fase igual a 30°. Para una entrada rampa, $r(t) = t$, se desea que el error en estado estacionario sea igual a 0.05. Diseñar un compensador de retardo que satisfaga los requisitos utilizando los métodos de la Sección 10.9. Comprobar los resultados utilizando el diagrama de Bode.

P10.42. Para el sistema y las especificaciones del Problema 10.41, determinar el compensador requerido para que el error en estado estacionario para una entrada rampa sea igual a 0.02.

P10.43. Repetir el Ejemplo 10.12 cuando se requiere que el 100% del tiempo de subida, T_r, sea de 1 segundo.

P10.44. Considerar de nuevo el diseño del Ejemplo 10.4. Utilizando un sistema como el que se muestra en la Figura 10.22 y el compensador determinado en la Ecuación (10.46), seleccionar un prefiltro apropiado. Comparar la respuesta del sistema con y sin prefiltro.

PROBLEMAS AVANZADOS

PA10.1. Una aplicación de coger y situar de tres ejes exige el movimiento preciso de un brazo robótico en el espacio tridimensional, como se muestra en la Figura PA10.1 para la junta 2. El brazo tiene caminos lineales específicos que debe seguir para evitar otras piezas de la maquinaria. La sobreelongación para una entrada escalón debería ser menor del 13%. (a) Suponiendo $G_c(s) = K$, determinar la ganancia K que satisfaga las especificaciones. Determinar el tiempo de asentamiento resultante (con el criterio del 2%). (b) Utilizar una red de adelanto y reducir el tiempo de asentamiento para que sea menor que 3 segundos.

PA10.2. Al sistema del Problema Avanzado 10.1 se le requiere un tanto por ciento de sobreelongación menor que el 13%. Además se desea que el error en estado estacionario frente a una entrada rampa unitaria sea menor que 0.125 ($K_v = 8$) [28]. Diseñar una red de retardo para conseguir estas especificaciones. Calcular el tanto por ciento de sobreelongación resultante y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) para el diseño realizado.

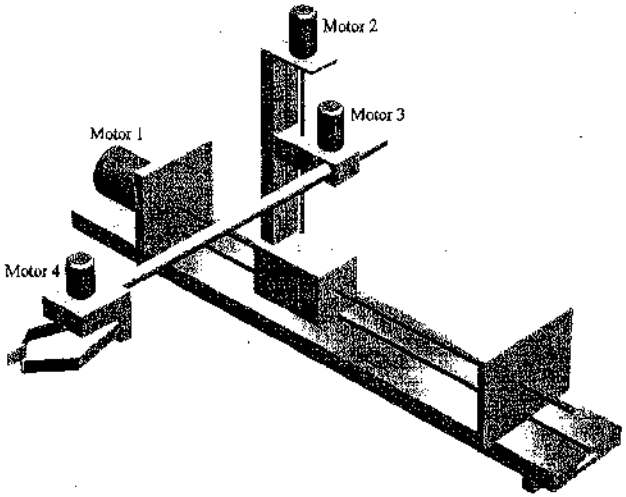
PA10.3. Al sistema del Problema Avanzado 10.1 se le requiere un tanto por ciento de sobreelongación menor que el 13% con un error en estado estacionario para una entrada rampa unidad menor que 0.125 ($K_v = 8$) [28]. Diseñar un controlador proporcional integral (PI) que consiga las especificaciones.

PA10.4. Un sistema de control de un motor de cc con realimentación unidad tiene la forma que se muestra en la Figura PA10.4. Seleccionar K_1 y K_2 de manera que la respuesta del sistema tenga un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 1 segundo y una sobreelongación menor que el 5% frente a una entrada escalón.

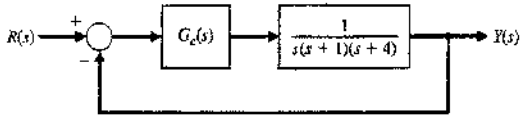
PA10.5. En la Figura PA10.5 se muestra un sistema con realimentación unidad. Se desea que la respuesta del sistema a un escalón tenga una sobreelongación aproximada del 16%, una respuesta rápida, y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de unos 1.8 segundos.

(a) Diseñar un compensador de adelanto, $G_c(s)$ para lograr las raíces dominantes deseadas. (b) Determinar la respuesta del sistema para una entrada escalón cuando $G_p(s) = 1$. (c) Seleccionar un prefiltro $G_p(s)$, y determinar la respuesta del sistema con el prefiltro para una entrada escalón.

PA10.6. Considerar de nuevo el Ejemplo 10.12 cuando se desea minimizar el tiempo de asentamiento del sistema al tiempo que se requiere que $K < 52$. Determinar un compensador adecuado que minimice el tiempo de asentamiento. Dibujar la respuesta del sistema.



(a)



(b)

FIGURA PA10.1
Robot de coger y situar.

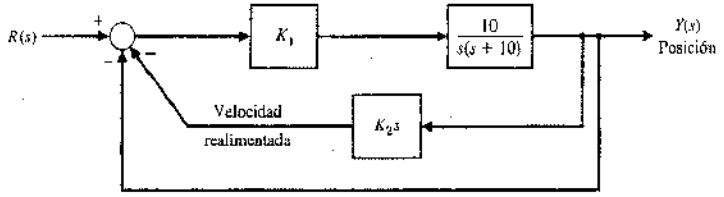


FIGURA PA10.4
Sistema de control de motor.

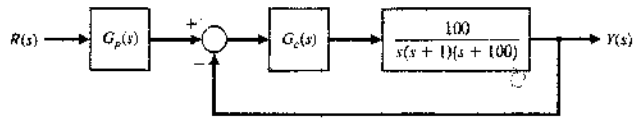
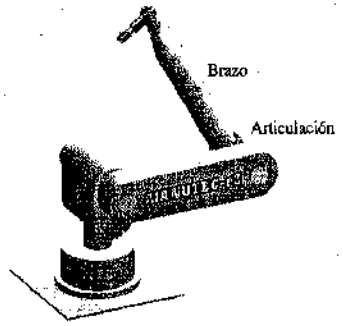
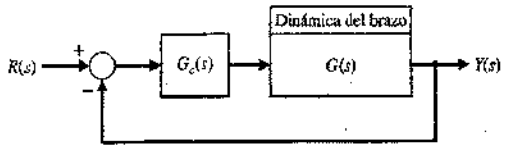


FIGURA PA10.5
Realimentación unidad con un prefiltro.



(a)



(b)

FIGURA PA10.8
(a) Robot Manutec.
(b) Diagrama de bloques.

PA10.7. Un sistema tiene la forma que se muestra en la Figura 10.22, con

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+8)}.$$

Se utiliza un compensador de adelanto, con

$$G_c(s) = \frac{K(s+3)}{(s+28)}.$$

Determinar K de manera que las raíces complejas tengan $\zeta = 1/\sqrt{2}$. El prefiltro es

$$G_p(s) = \frac{p}{(s+p)}.$$

(a) Determinar la sobreelongación y el tiempo de subida para $G_p(s) = 2$ y para $p = 3$. (b) Seleccionar un valor de p apropiado para que la sobreelongación resultante sea del 1% y comparar los resultados.

PA10.8. Como se muestra en la Figura PA10.8(a), el robot Manutec tiene una gran inercia y una longitud de brazo resultante de un problema de control complicado. En la Figura PA10.8(b) se muestra un modelo del diagrama de bloques del sistema. La dinámica de la planta está representada por

$$G(s) = \frac{250}{s(s+2)(s+40)(s+45)}.$$

El tanto por ciento de sobreelongación para una entrada escalón debería ser menor que el 20% con un tiempo de subida menor que 1/2 y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 1.2 segundos. Además, se desea que para una entrada rampa, $K_v \geq 10$. Determinar un compensador de adelanto adecuado para que se cumplan los requisitos especificados.

PA10.9. La dinámica de la planta de un proceso químico está representada por

$$G(c) = \frac{100}{s(s+5)(s+10)}.$$

Se desea que el sistema tenga un error pequeño en estado estacionario par una entrada rampa de manera que $K_v = 100$. Como requisito de estabilidad, se desea un margen de ganancia de 10 dB o mayor y un margen de fase de 40° o mayor. Determinar un compensador adelanto-retardo que consiga estas especificaciones. Supóngase que el sistema tiene la forma que se muestra en la Figura 10.1(a) con $H(s) = 1$.

PA10.10. En la Figura PA10.10 se muestra un circuito de adelanto con amplificadores operacionales. (a) Determinar la función de transferencia de este circuito. (b) Dibujar la respuesta en frecuencia del circuito cuando $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 10$ Ω, $C_1 = 0.1$ μF y $C_2 = 1$ mF.

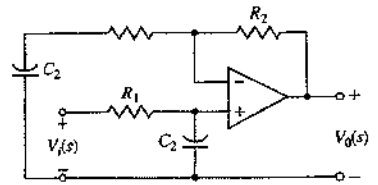


FIGURA PA10.10. Circuito de adelanto con amplificador operacional.

PROBLEMAS DE DISEÑO

PDC10.1. El sistema de arrastre de la mesa deslizante de la Figura PDC4.1 utiliza un controlador PD. Determinar los valores necesarios de las constantes de ganancia del controlador PD de manera que se logre una respuesta plana. También se desea un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 250 ms. Verificar los resultados.

PD10.1. En la Figura PD10.1 se muestran dos robots cooperando entre sí para manipular un eje largo antes de insertarlo en un agujero en el bloque resultante sobre la mesa. Las inserciones de largo recorrido son un buen ejemplo de una tarea que se puede beneficiar del control cooperativo. El sistema de control realimentado de un robot de una articulación como el que se ha mostrado tiene $H(s) = 1$ y

$$G(s) = \frac{4}{s(s + 0.5)}.$$

Las especificaciones requieren un error en estado estacionario para una entrada rampa unidad de 0.0125 y la respuesta frente a un escalón tiene una sobreelongación menor que el 25% con un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 2 segundos. Determinar un compensador de adelanto-retardo que consiga las especificaciones y dibujar las respuestas del sistema compensado y no compensado frente a entradas rampa y escalón

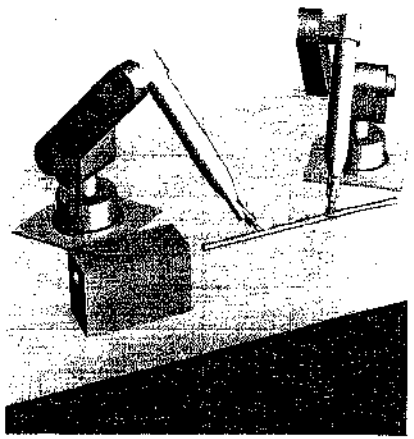
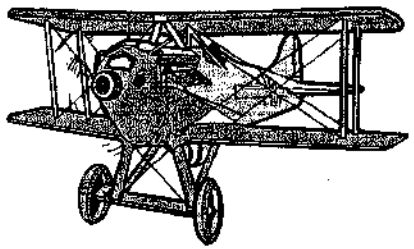


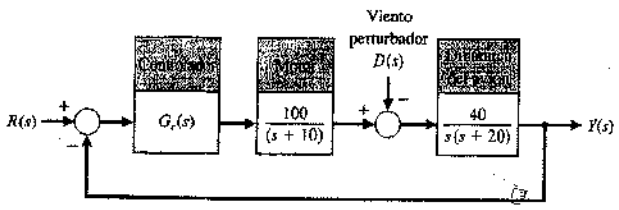
FIGURA PD10.1. Dos robots cooperan para insertar un eje largo.

PD10.2. El control del cabeceo de un avión biplano tradicional, como el que se muestra en la Figura PD10.2(a), está representado por el diagrama de bloques de la Figura PD10.2(b).

(a) Determinar el valor mínimo de la ganancia K cuando $G_c(s) = K$ de manera que el efecto de una perturbación escalón unidad, $D(s) = 1/s$, sea menor o igual que el 5% del escalón unidad [$y(\infty) = 0.05$].

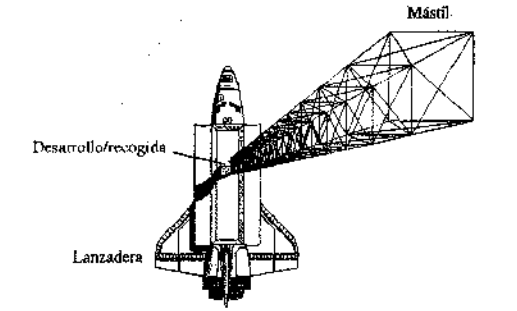


(a)

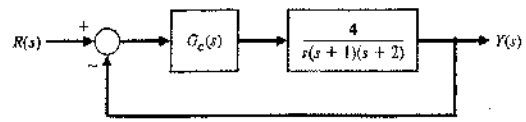


(b)

FIGURA PD10.2
(a) Avioneta. (*Fuente: The Illustrated London News*, 9 octubre 1920. (b) Sistema de control.



(a)



(b)

FIGURA PD10.3
Sistema de vuelo con mástil.

(b) Utilizando la ganancia de la apartado (a), determinar si el sistema es estable.

(c) Diseñar un compensador utilizando una compensación por adelanto de un estado de forma que el margen de fase sea de 30°.

(d) Diseñar un compensador utilizando una compensación por adelanto de dos estados de forma que el margen de fase sea de 55°.

(e) Comparar el ancho de banda de los sistemas de los apartados (c) y (d).

(f) Dibujar la respuesta para un escalón $y(t)$ para los sistemas de los apartados (c) y (d) y comparar el tanto por ciento de sobreelongación, el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) y el tiempo de pico.

PD10.3. La NASA ha identificado la necesidad de grandes estructuras espaciales desplegables, que se construirán de materiales ligeros y contendrán gran número de juntas o conexiones estructurales. Esta necesidad es evidente para programas como los de la estación espacial. Estas estructuras espaciales desplegables pueden requerir precisión en su forma y necesitar la supresión de vibración durante las operaciones en órbita [17].

Una de tales estructuras es el sistema de vuelo con mástil, que se muestra en la Figura PD10.3(a). El objetivo del sistema es proporcionar un entorno de pruebas para control y dinámica. El elemento básico en el sistema de vuelo con mástil es una estructura metálica anclada de 60.7 m de longitud, que está unida a la lanzadera espacial que está en órbita. Incluidos en el extremo de la estructura anclada están los actuadores primarios y los sensores colocados. Se proporciona un subsistema de desarrollo/recogida, que además afianza el conjunto del haz plegado durante el despegue y aterrizaje.

El sistema utiliza un motor grande para mover la estructura y tiene el diagrama de bloques que se muestra en la Figura PD10.3(b). El objetivo es una sobreelongación como respuesta a un escalón menor o igual que el 16%; así, se estima que para el sistema ζ sea de 0.5 y se requiere un margen de fase de 50°. Realizar el diseño para $0.1 < K < 1$ y obtener la sobreelongación, el tiempo de subida y el margen de fase para las ganancias seleccionadas.

PD10.4. En la Figura PD10.4 se muestra un robot móvil que utiliza un sistema de visión como instrumento de medida [22]. El sistema de control tiene la forma que se muestra en la Figura 10.14, donde

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(0.5s + 1)},$$

y $G_c(s)$ se selecciona como un controlador PI de forma que el error en estado estacionario frente a una entrada escalón es nulo. Entonces se tiene

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{P_{cs} + K_I}{s}.$$

Determinar una $G_c(s)$ adecuada de manera que (a) el tanto por ciento de sobreelongación para una entrada escalón sea del 5% o menor; (b) el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) sea menor que 6 segundos; (c) la K_p del sistema sea mayor que 0.9; y (d) se minimice el tiempo de pico para una entrada escalón.

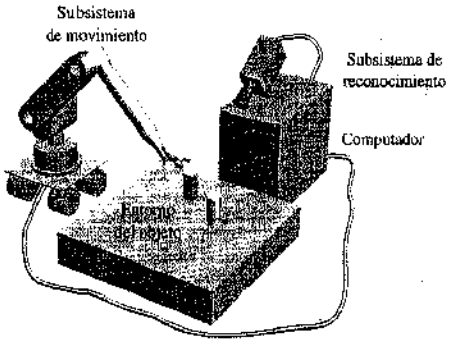


FIGURA PD10.4. Un robot y un sistema de visión.

PD10.5. En Texas se está desarrollando un tren de alta velocidad con un diseño basado en el *Train à Grande Vitesse* (TGV). Se esperan velocidades del tren de 186 millas por hora. Para lograr estas velocidades en curvas cerradas, el tren debe utilizar ejes giratorios combinados con la posibilidad de inclinar el tren. Cilindros hidráulicos que conectan los compartimentos de pasajeros sus a sus ruedas permiten al tren entrar en las curvas como si se tratase de una motocicleta. Un dispositivo que pendula en la rueda delantera de cada coche mide cuándo se está entrando en una curva y transmite esta información al sistema hidráulico. La inclinación no hace al tren más seguro, pero hace que sea más confortable para los pasajeros.

Se considera el sistema de control del inclinado que se muestra en la Figura PD10.5. Diseñar un compensador $G_c(s)$ para una entrada escalón de manera que la sobreelongación sea menor que el 5% y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 0.6 segundos. También se desea que el error en estado estacionario para una entrada velocidad (rampa) sea menor que $0.15A$, donde $r(t) = At$, $t > 0$. Verificar los resultados del diseño.

PD10.6. Una gran antena, como la que se muestra en la Figura PD10.6(a), se utiliza para recibir señales desde un satélite y debe seguir al satélite con precisión cuando éste se mueve. El sistema de control utiliza un motor controlado por

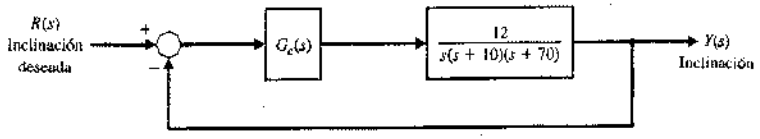
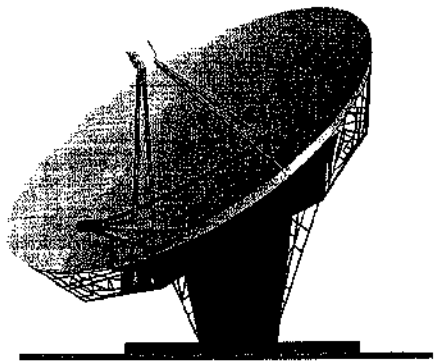
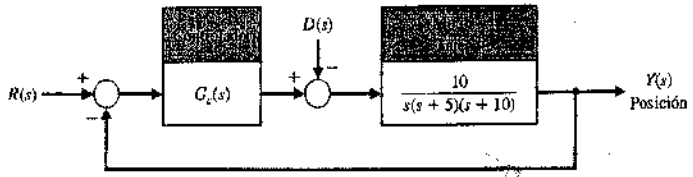


FIGURA PD10.5
Sistema de control realimentado de tren de alta velocidad.



(a)



(b)

FIGURA PD10.6
Control de posición de una antena.

armadura y un controlador para ser seleccionado, como el que se muestra en la Figura PD10.6(b). Las especificaciones del sistema requieren un error en estado estacionario para una entrada rampa $r(t) = Bt$, menor o igual que $0.01B$. Además se desea una sobreelongación para una entrada escalón menor del 5% con un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 2 segundos. (a) Diseñar un controlador $G_c(s)$ y dibujar la respuesta temporal resultante. (b) Determinar el efecto de la perturbación $D(s) = Q/s$ sobre la salida $Y(s)$. [Para facilitar los cálculos, se supone que $R(s) = 0$.]

PD10.7. Los sistemas transportadores de cinta de alto rendimiento están diseñados con un pequeño motor de arrastre para tirar de la cinta pasada las cabezas de lectura/escritura y con carretes movidos por motores de cc. La cinta se va a controlar a una velocidad de 200 pulgadas por segundo, con un tiempo de arranque tan rápido como sea posible, mientras que se previene la distorsión permanente de la cinta. Como se desea controlar la velocidad y la tensión de la cinta, se pretende utilizar un tacómetro de cc para el sensor de velocidad y un potenciómetro para el sensor de posición. Se utilizará un motor de cc para el actuador. Entonces el modelo lineal para el sistema realimentado con $H(s) = 1$ y

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = G(s) = \frac{K(s + 4000)}{s(s + 1000)(s + 3000)(s + p_1)(s + p_1^*)},$$

donde $p_1 = +2000 + j2000$ y $Y(s)$ es la posición.

Las especificaciones para el sistema son (1) tiempo de asentamiento menor que 12 ms, (2) una sobreelongación para una entrada escalón de posición menor que el 10% y (3) un error de velocidad en estado estacionario menor que el 5%. Determinar un esquema de compensación que logre estas especificaciones.

PD10.8. En los años pasados en la industria del automóvil se ha llevado a cabo una importante actividad en la construcción de modelos de motores denominada modelos de «control orientado» o «diseño de control». Estos modelos contienen representaciones de la válvula reguladora, del efecto del bombeo del motor, de la dinámica de inducción del proceso, del sistema de combustión, de la generación del par del motor e inercia de rotación.

El control de la relación de carburante frente al aire en el carburador de un automóvil ha sido tema de primera importancia en los años 80 puesto que los ingenieros trabajaban en reducir al mínimo las emisiones de polución. Así, los diseñadores de motores de coche volvieron al control realimentado de la relación de carburante frente al aire. La operación de un motor en o cerca de una relación particular de carburante-aire requiere el tratamiento del aire y del flujo de carburante en el sistema. La orden de carburante se considera como la entrada y la velocidad de la máquina como la salida [9, 11].

El diagrama de bloques del sistema se muestra en la Figura PD10.8, donde $T = 0.066$ segundos. Se requiere un compensador para lograr un error en estado estacionario nulo frente a una entrada escalón y una sobreelongación menor del 10%. También se desea que el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) no exceda de 10 segundos.

PD10.9. En la Figura PD10.9(a) se muestra un avión de alto rendimiento, y en la Figura PD10.9(b) se muestra un sis-

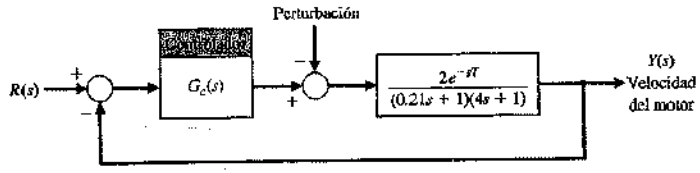
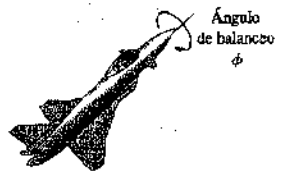
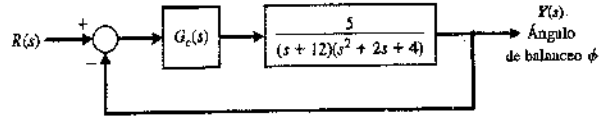


FIGURA PA10.8
Sistema de control de un motor.



(a)



(b)

FIGURA PA10.9
Control del ángulo de balanceo de un avión.

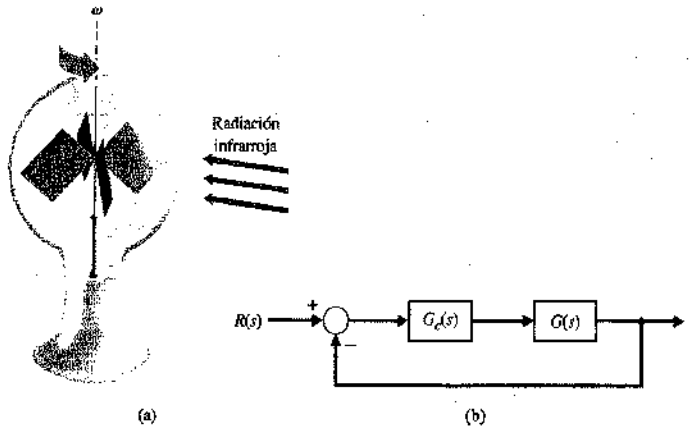


FIGURA PD10.10
(a) Radiómetro de molino de viento.
(b) Sistema de control.

tema de control del ángulo de balanceo. Diseñar un controlador $G_c(s)$ de forma que la respuesta frente a un escalón presente un buen comportamiento y el error en estado estacionario sea nulo.

PD10.10. Se ha propuesto un sistema de control simple en lazo cerrado para demostrar el control proporcional integral (PI) de un radiómetro de molino de viento [31]. En la Figura PD10.10(a) se muestra el radiómetro de molino de viento, y en la Figura PD10.10(b) se muestra el sistema de control. La variable que se va a controlar es la velocidad angular ω del radiómetro de molino de viento cuyas palas giran cuando se exponen a radiación infrarroja. Una puesta en marcha experimental utiliza un sensor fotoeléctrico reflexivo y la circuitería electrónica básica hace posible el diseño y la implementación de un sistema de control de alto rendimiento.

La función de transferencia de la fuente de luz y el radiómetro es

$$G(s) = \frac{\tau}{\tau s + 1},$$

donde $\tau = 20$ segundos. Diseñar un controlador PI de manera que el sistema logre una respuesta plana con un tiempo de asentamiento menor que 25 segundos.

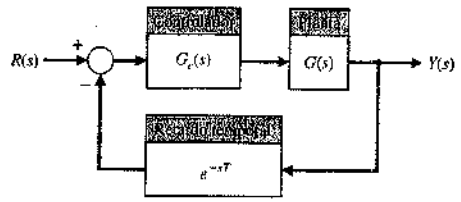


FIGURA PA10.11
Sistema de control realimentado con un retardo temporal.

PD10.11. El sistema de control realimentado de la Figura PD10.11 tiene una función de transferencia

$$G(s) = \frac{60}{(s^2 + 4s + 6)(s + 10)}.$$

Diseñar un compensador PID $G_{c_1}(s)$ y un compensador por adelanto de fase $G_{c_2}(s)$ tal que, en cada caso, el sistema en lazo cerrado sea estable en presencia de un tiempo de retardo $T = 0.1$ segundos. Comentar la posibilidad de que cada compensador garantice la estabilidad cuando se aumenta la incertidumbre del tiempo de retardo en 0.2 segundos.

PROBLEMAS CON MATLAB

PM10.1. Considerar el sistema de control de la Figura PM10.1, donde

$$G(s) = \frac{10}{s + 1} \quad \text{y} \quad G_c(s) = \frac{9}{s + 1}.$$

Utilizando MATLAB, mostrar que el margen de fase es aproximadamente de 12° y que el tanto por ciento de sobreelongación para una entrada escalón es del 70%.

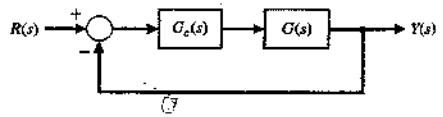


FIGURA PM10.1. Un sistema de control con compensación.

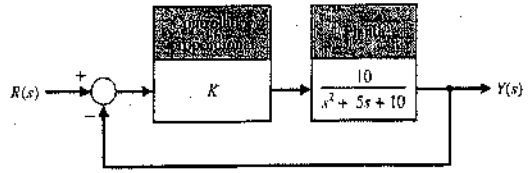


FIGURA PM10.2
Sistema de control realimentado de lazo único con controlador proporcional.

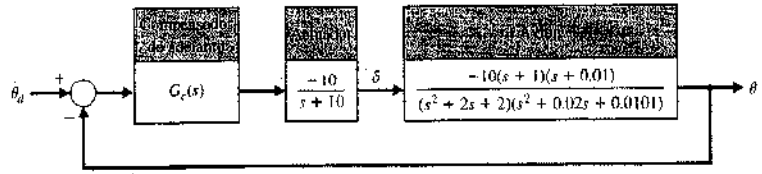


FIGURA PM10.4
Un sistema de control realimentado del índice de cabeceo de un avión.

PM10.2. En la Figura PM10.2 se muestra un sistema de control con realimentación negativa. Diseñar un controlador proporcional $G_c(s) = K$ de manera que el sistema tenga un margen de fase de 45°. Obtener el diagrama de Bode utilizando MATLAB y comprobar que se satisfacen las especificaciones de diseño.

PM10.3. Considerar el sistema de la Figura PM10.1, donde

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 2)}.$$

Diseñar un compensador $G_c(s)$ de manera que el error de seguimiento en estado estacionario para una entrada rampa sea nulo y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) sea menor que 5 segundos. Obtener la respuesta del sistema en lazo cerrado frente a una entrada $R(s) = 1/s^2$ y comprobar que el requisito de tiempo de asentamiento se satisface y que el error en estado estacionario es nulo.

PM10.4. Un avión de lucha tiene la función de transferencia

$$\frac{\dot{\theta}}{\delta} = \frac{-10(s + 1)(s + 0.01)}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 0.02s + 0.0101)},$$

donde $\dot{\theta}$ es el índice de cabeceo (rad/s) y δ es la desviación de subida (rad). Los cuatro polos representan los modos fugoides y periodo corto. El modo fugoide tiene una frecuencia natural de 0.1 rad/s y el modo de periodo corto es 1.4 rad/s. El diagrama de bloques se muestra en la Figura PM10.4.

(a) Sea el compensador de adelanto

$$G_c = K\frac{s + z}{s + p},$$

donde $|z| < |p|$. Utilizando los métodos de Bode, diseñar un compensador por adelanto que consiga las especificaciones siguientes: (1) tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) para un escalón unidad menor que 2 segundos y (2) tanto por ciento de sobreelongación menor que el 10%. (b) Simular el sistema en lazo cerrado con una entrada escalón de 10°/segundo y mostrar la evolución histórica de θ.

PM10.5. El movimiento de cabeceo de una nave espacial está descrito por

$$J\ddot{\theta} = u,$$

donde J es el momento de inercia principal y u es el par de entrada al vehículo [7]. Considerar el controlador PD

$$G_c(s) = K_P + K_D s.$$

(a) Obtener el diagrama de bloques del sistema de control. Diseñar un sistema de control par conseguir las especificaciones siguientes: (1) ancho de banda del sistema en lazo cerrado de unos 10 rad/s, y (2) tanto por ciento de sobreelongación menor que el 20% frente a una entrada escalón de 10°. Completar el diseño desarrollando un código en MATLAB interactivo. (b) Comprobar el diseño simulando la respuesta frente a una entrada escalón de 10°. (c) Incluir un diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo cerrado para verificar que se satisface el requisito de ancho de banda.

PM10.6. Considerar el sistema de control de la Figura PM10.6. Diseñar un compensador de retardo utilizando métodos del lugar de las raíces para conseguir las especificaciones siguientes: (1) error en estado estacionario menor que el 10% para una entrada escalón, (2) margen de fase mayor que 45°, y (3) tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 5 segundos frente a una entrada escalón unidad.

(a) Diseñar un compensador de retardo utilizando los métodos del lugar de las raíces para conseguir las especificaciones de diseño. Desarrollar un conjunto de códigos en MATLAB para

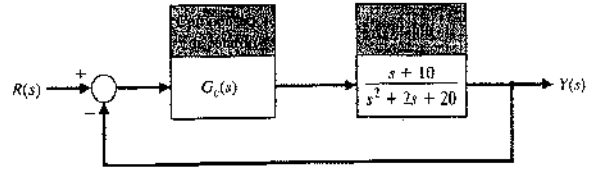


FIGURA PM10.6
Un sistema de control con realimentación unidad.

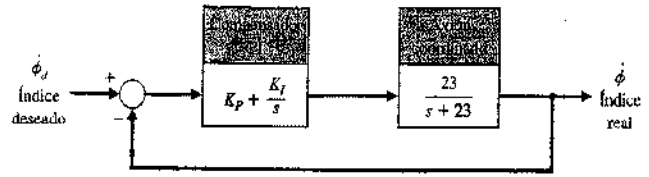


FIGURA PM10.7
Un lazo interno de un sistema de guías de vigas laterales.

llevar a cabo el proceso de diseño. (b) Comprobar el controlador desarrollado en el apartado (a) simulando la respuesta del sistema en lazo cerrado frente a una entrada escalón unidad. Proporcionar la historia temporal de la salida $y(t)$. (c) Calcular el margen de fase haciendo uso de la función margin.

PM10.7. Un sistema de guías de vigas laterales tiene un lazo interno como el mostrado en la Figura PM10.7, donde la función de transferencia para el avión coordinado es [30]

$$G(s) = \frac{23}{s + 23}.$$

Considerar el controlador PI

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}.$$

(a) Diseñar un sistema de control que consiga las especificaciones siguientes: (1) tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) para una entrada escalón unidad menor que 1 segundo, y (2) error de seguimiento en estado estacionario para una entrada rampa unidad menor que 0.1. (b) Comprobar el diseño mediante simulación.

PM10.8. Considerar de nuevo el sistema y el compensador de adelanto diseñado en el Ejemplo 10.3. La sobreelongación real del sistema compensado será del 46%. Se desea reducir la sobreelongación al 32%. Utilizando código MATLAB, determinar un valor apropiado para el cero de $G_c(s)$.

PM10.9. Dibujar la respuesta en frecuencia para el circuito de PA10.10.

PM10.10. El sistema de control realimentado que se muestra en la Figura PM10.10 tiene la función de transferencia

$$G(s) = \frac{K(s + 0.1)}{s^3 + 5s^2}$$

El tiempo de retardo es $T = 0.1$ segundo. Dibujar el margen de fase para el sistema frente a la ganancia en el rango $0.1 \leq K \leq 10$. Determinar la ganancia K que maximiza el margen de fase.

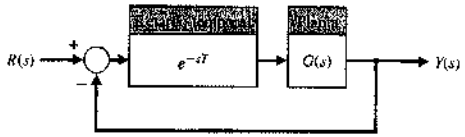


FIGURA PM10.10
Sistema de control realimentado con retardo temporal.

TÉRMINOS Y CONCEPTOS

Compensación. Alteración o ajuste de un sistema de control para proporcionar un comportamiento adecuado.

Compensador. Componente adicional o circuito que se inserta en el sistema para compensar una deficiencia de comportamiento.

Compensador de adelanto de fase. Compensador ampliamente utilizado que posee un cero y un polo con el cero más cercano al origen en el plano s. Este compensador aumenta el ancho de banda del sistema y mejora la dinámica del proceso.

Compensador de retardo de fase. Compensador ampliamente utilizado que posee un cero y un polo con el polo más cercano al origen en el plano s. Este compensador reduce los errores de seguimiento en estado estacionario.

Controlador PI. Controlador con término proporcional y término integral (Proporcional-Integral).

Diseño de un sistema de control. Reestructuración o planificación de la estructura de un sistema y selección de componentes y parámetros apropiados.

Prefiltro. Función de transferencia, $G_p(s)$, que filtra la señal de entrada $R(s)$ antes de calcular la señal de error.

Red de adelanto. *Véase* Red de adelanto de fase.

Red de adelanto de fase. Red que proporciona un ángulo de fase positivo en el rango de frecuencias de interés. Por lo tanto, una red de adelanto puede lograr que el sistema tenga un margen de fase adecuado.

Red de adelanto-retardo. Red con características tanto de una red de adelanto como de una red de retardo.

Red de compensación en cascada. Red de compensación situada en cascada o serie con el proceso del sistema.

Red de integración. Red que actúa, en parte, como un integrador.

Red de retardo. *Véase* Red de retardo de fase.

Red de retardo de fase. Red que proporciona un ángulo de fase negativo y una atenuación significativa en el rango de frecuencias de interés.

Respuesta plana. Sistema con respuesta rápida, con mínima sobreelongación y error estacionario nulo para una entrada escalón.

Diseño de sistemas realimentados con variables de estados

CAPÍTULO **11**

11.1. Introducción 660
11.2. Controlabilidad 660
11.3. Observabilidad 663
11.4. Diseño del sistema de control con realimentación del vector de estado completo 666
11.5. Fórmula de Ackermann 670
11.6. Diseño del observador 671
11.7. Diseño del compensador: Integración de la realimentación del vector de estado completo y del observador 675
11.8. Entradas de referencia 681
11.9. Sistemas de control óptimo 683
11.10. Diseño con modelo interno 693
11.11. Ejemplo de diseño: Sistema de verificación automático 696
11.12. Diseño con variables de estado utilizando MATLAB 699
11.13. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 707
11.14. Resumen 709

SINOPSIS

El diseño de controladores utilizando realimentación de estados es tema de este capítulo. En primer lugar se presenta un criterio para determinar la controlabilidad y la observabilidad de un sistema. Utilizando la potente noción de realimentación de variables de estado, se introduce la técnica de diseño mediante desplazamiento de polos. La fórmula de Ackermann se puede utilizar para determinar la matriz de ganancia de realimentación de la variable de estado para situar los polos del sistema en las posiciones deseadas. La localización de los polos del sistema en lazo cerrado puede ser arbitraria si y sólo si el sistema es controlable. Cuando no está disponible el estado completo para realimentación, se utiliza un observador. Se describe el proceso de diseño del observador y se establece la aplicabilidad de la fórmula de Ackermann. El compensador en variables de estado se obtiene conectando la ley de realimentación de estados completa con el observador. Se considera el diseño del sistema de control óptimo y se describe el uso del diseño de modelo interno para lograr la respuesta prescrita en estado estacionario frente a entradas seleccionadas. El capítulo concluye revisando el Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco.

11.1. INTRODUCCIÓN

El método en el dominio temporal, expresado en términos de variables de estado, se puede utilizar para diseñar esquemas de compensación adecuados para un sistema de control. Normalmente se está interesado en controlar el sistema con una señal de control, $\mathbf{u}(t)$, que es función de distintas medidas de variables de estado. Entonces se desarrolla un controlador en variables de estado que opera sobre la información disponible en forma medida. Esta manera de compensar sistemas es bastante útil para la optimización de sistemas y se considerará en este capítulo.

Normalmente el diseño en variables de estado comprende *tres* pasos. En el primer paso se presupone que todas las variables de estado son medibles y se utilizan en una ley **de control por realimentación de estados completo**. La realimentación de estados completa no es normal en la práctica porque no es posible (en general) medir todos los estados. En la práctica, sólo ciertos estados (o combinaciones lineales de ellos) son medidos y proporcionados como salidas del sistema. El segundo paso en el diseño en variables de estado es construir un **observador** para estimar los estados que no son directamente medibles y no están disponibles como salidas. Los observadores pueden ser bien observadores de estado completos o bien observadores de orden reducido. Los observadores de orden reducido tienen en cuenta el hecho de que ciertos estados ya están disponibles como salidas del sistema; por lo tanto, no necesitan ser estimados [29]. En este capítulo sólo se considerarán observadores de estado completos. El paso final en el proceso de diseño consiste en conectar de manera apropiada el observador con la ley de control realimentada de estado completa. Es común referirse al controlador en variables de estado (ley de control de estados completo más el observador) como un **compensador**. El diseño en variables de estado conduce a un compensador de la forma que aparece en la Figura 11.1. Además, es posible considerar entradas de referencia al compensador en variables de estado para completar el diseño. Estos tres pasos del proceso de diseño se discuten en las secciones siguientes, al igual que se comenta cómo incorporar entradas de referencia.

11.2. CONTROLABILIDAD

El diseño mediante realimentación de todos los estados normalmente se basa en técnicas de **asignación de polos** [2, 30]. La asignación de polos se explica con detalle en la Sección 11.4. Es importante darse cuenta de que el sistema debe ser completamente

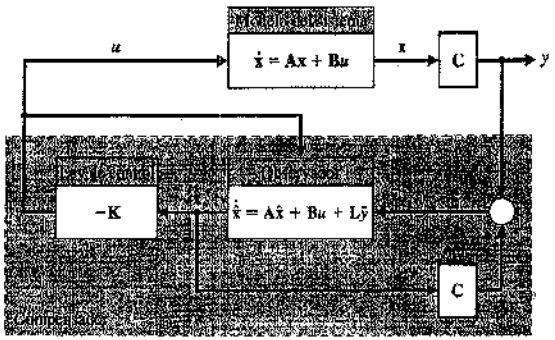


FIGURA 11.1
Compensador en variables de estado que utiliza realimentación de estados completa en serie con un observador de estados completo.

controlable y completamente observable para que permita la flexibilidad de colocar *todos* los polos del sistema arbitrariamente. Los conceptos de controlabilidad y observabilidad (que se estudian en las Secciones 11.2 y 11.3, respectivamente) los introdujo Kalman en los años 60 [31-33]. Kalman fue una figura central en el desarrollo de la teoría de sistemas matemáticos sobre la que descansa la mayoría de los métodos de variables de estado. A Rudolph Kalman se le conoce por su papel en el desarrollo del denominado filtro de Kalman, que fue decisivo en el éxito de los alunizajes del Apollo [34, 35].

[redacted]

Para el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,$$

se puede determinar si el sistema es controlable examinando la condición algebraica

$$\text{rango}\,[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n. \tag{11.1}$$

La matriz $\mathbf{A}$ tiene dimensión $n \times n$ y $\mathbf{B}$ $n \times 1$. Para sistemas con múltiples entradas, $\mathbf{B}$ $n \times m$, donde m es el número de entradas.

Para un sistema de única entrada, única salida, la **matriz de controlabilidad** $\mathbf{P}_c$ se describe en términos de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ como

$$\boxed{\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}],} \tag{11.2}$$

que es una matriz $n \times n$. Por lo tanto, si el determinante de $\mathbf{P}_c$ es distinto de cero, el sistema es controlable [12].

Existen técnicas avanzadas de diseño en variables de estado que pueden manejar situaciones en las que el sistema no sea completamente controlable, pero en las que los estados (o combinaciones lineales de ellos) que no puedan ser controlados sean inherentemente estables. A estos sistemas se les denomina estabilizables. Si un sistema es completamente controlable, también es estabilizable. La descomposición de Kalman en el espacio de estado proporciona un mecanismo para particionar el espacio de estados de manera que resulta claro qué estados (o combinaciones de estados) son controlables y cuáles no [14, 20]. De esta manera, el subespacio controlable se identifica claramente, y si el sistema es estabilizable, el diseño del sistema de control puede, en teoría, continuar. En este capítulo, únicamente se consideran sistemas completamente controlables.

EJEMPLO 11.1. Controlabilidad de un sistema

Se considera el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u.$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x} + [0]u$$

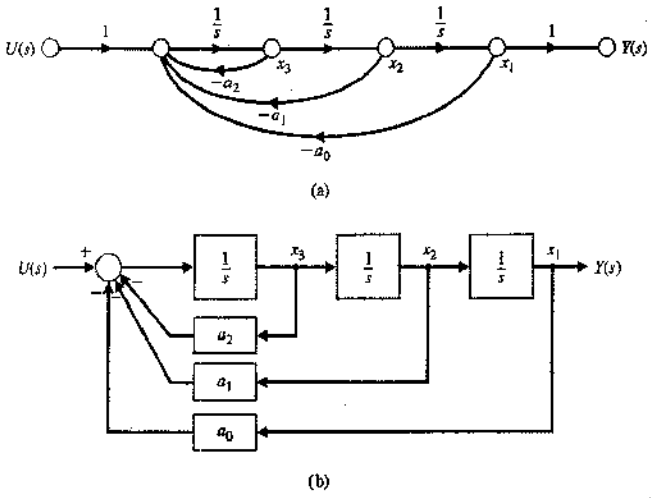


FIGURA 11.2
Sistema de tercer orden. (a) Modelo de grafo de flujo de señal. (b) Modelo en diagrama de bloques.

En la Figura 11.2 se muestra el grafo de flujo de señales y el diagrama de bloques del modelo. Entonces se tiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A^2B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_2 \\ (a_2^2 - a_1) \end{bmatrix},$$

donde se obtiene

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A^2B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & (a_2^2 - a_1) \end{bmatrix}.$$

El determinante de $\mathbf{P}_c = 1 \neq 0$, por lo que el sistema es controlable. Obsérvese que la determinación de la controlabilidad no utiliza las matrices **C** y **D**. ■

EJEMPLO 11.2. Controlabilidad de un sistema de dos estados

Se considera un sistema representado por las dos ecuaciones de estado

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + u \quad \text{y} \quad \dot{x}_2 = -3x_2 + dx_1$$

y se determina la condición de controlabilidad. Además, como se muestra en la Figura 11.3, se tiene $y = x_2$. El modelo del sistema en variables de estado es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u,$$
$$y = [0 \quad 1]\mathbf{x} + [0]u.$$

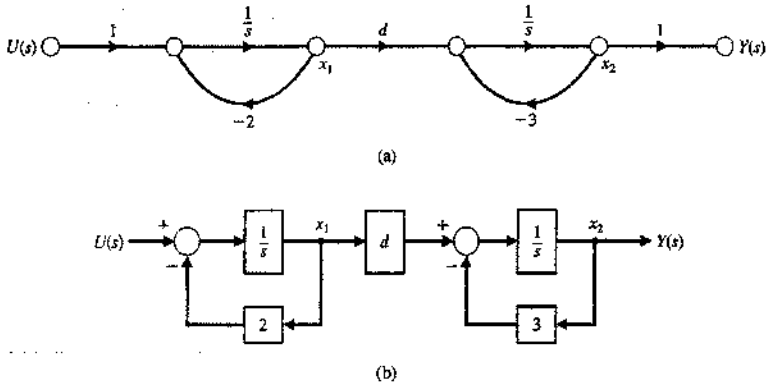


FIGURA 11.3
(a) Modelo de grafo de flujo para el Ejemplo 11.2. (b) Modelo en diagrama de bloques.

Se puede determinar el requisito del parámetro d generando la matriz $\mathbf{P}_c$. De esta manera, con

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ d \end{bmatrix},$$

se tiene

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

El determinante de $\mathbf{P}_c$ es igual a d, que es distinto de cero sólo cuando d sea distinto de cero.

11.3. OBSERVABILIDAD

Todos los polos de un sistema en lazo cerrado se pueden situar arbitrariamente en el plano complejo si y sólo si el sistema es **observable** y controlable. La observabilidad se refiere a la posibilidad de estimar una variable de estado.

Considerar el sistema de una entrada-una salida

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \quad \text{e} \quad y = \mathbf{Cx},$$

donde $\mathbf{C}$ es un vector fila $1 \times n$ y $\mathbf{x}$ es un vector columna $n \times 1$. Este sistema es completamente observable cuando el determinante de la matriz de observabilidad $\mathbf{P}_o$ es distinto de cero, donde

$$\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{11.3}$$

que es una matriz $n \times n$.

Como se mostró en la Sección 11.2, las técnicas de diseño avanzadas en el especio de estados pueden resolver situaciones en las que el sistema no es completamente controlable, mientras que el sistema sea estabilizable. Estas mismas técnicas pueden aplicarse en los casos en los que el sistema no es completamente observable, pero en los que los estados (o combinaciones lineales de ellos) que no se pueden observar son inherentemente estables. Estos sistemas se clasifican como **detectables**. Si un sistema es completamente observable, también es detectable. La descomposición en el espacio de estados de Kalman proporciona un mecanismo para particionar el espacio de estados de manera que resulte claro qué estados (o combinaciones de estados) son observables y cuáles no [14, 20]. De esta manera se determina el subespacio no observable, y si el sistema es detectable, el diseño de sistemas de control puede, en teoría, continuar. La aproximación al diseño en variables de estado conlleva el tener que verificar en primer lugar que el sistema en consideración es completamente controlable y completamente observable. Si lo es, la técnica de diseño mediante asignación de polos que se considera aquí puede proporcionar comportamiento aceptable para el sistema en lazo cerrado.

EJEMPLO 11.3. Observabilidad de un sistema

Considérese de nuevo el sistema del Ejemplo 11.1. El modelo se muestra en la Figura 11.2. Para construir $\mathbf{Q}$ se utiliza

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{CA} = [0 \quad 1 \quad 0] \quad \text{y} \quad \mathbf{CA}^2 = [0 \quad 0 \quad 1].$$

Así, se obtiene

$$\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El $\det \mathbf{P}_o = 1$, y el sistema es completamente observable. Obsérvese que la determinación de la observabilidad no utiliza las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{D}$. ■

EJEMPLO 11.4. Observabilidad de un sistema de dos estados

Considérese el sistema dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}u \quad \text{e} \quad y = [1 \quad 1]\mathbf{x}.$$

El sistema se ilustra en la Figura 11.4. Se puede comprobar la controlabilidad del sistema y la observabilidad utilizando las matrices $\mathbf{P}_c$ y $\mathbf{P}_o$.

Para el sistema definido, se obtiene

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz de controlabilidad es

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

y $\det \mathbf{P}_c = 0$. Por lo tanto, el sistema no es controlable.

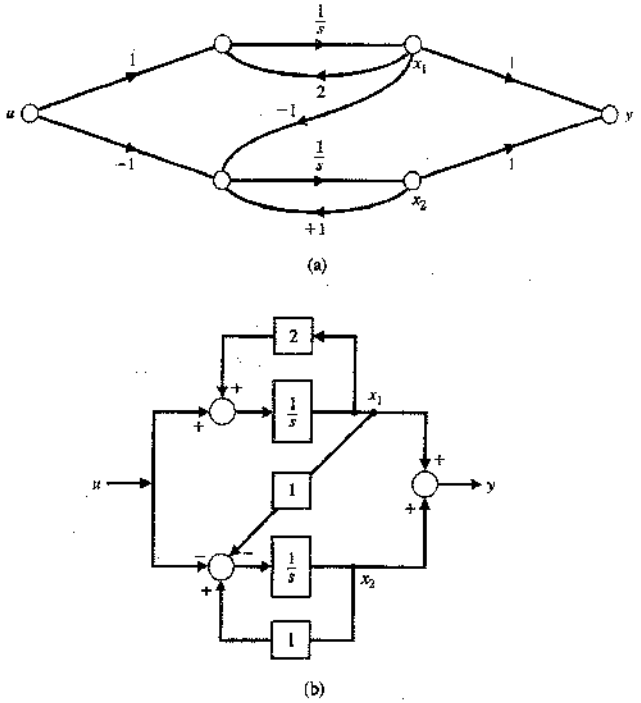


FIGURA 11.4
Modelo de sistema con dos estados para el Ejemplo 11.4. (a) Modelo de grafo de flujo de señal. (b) Modelo en diagrama de bloques.

A partir de la definición del sistema, se tiene

$$\mathbf{C} = [1 \quad 1] \quad \text{y} \quad \mathbf{CA} = [1 \quad 1].$$

Por lo tanto, el cálculo de la matriz de observabilidad conlleva a

$$\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

y $\mathbf{P}_o = 0$. Por lo tanto, el sistema no es observable.

Si se mira de nuevo el modelo de estados, se observa que

$$y = x_1 + x_2.$$

Sin embargo,

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2x_1 + (x_2 - x_1) + u - u = x_1 + x_2.$$

Por lo tanto, las variables del sistema no dependen de u, y el sistema no es controlable. Análogamente, la salida $(x_1 + x_2)$ depende de $x_1(0)$ más $x_2(0)$ y no se pueden determinar $x_1(0)$ y $x_2(0)$ de forma independiente. En consecuencia, el sistema no es observable. ■

11.4. DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL CON REALIMENTACIÓN DEL VECTOR DE ESTADO COMPLETO

En esta sección se considera la realimentación del vector de estado completo para conseguir la situación deseada de los polos del sistema en lazo cerrado.

El primer paso en el proceso de diseño en variables de estado requiere que se suponga que todos los estados están disponibles para la realimentación; esto es, que se tiene acceso al estado completo, $\mathbf{x}(t)$, para todo t. La entrada al sistema, $u(t)$, está dada por

$$u = -\mathbf{Kx}. \tag{11.4}$$

El objetivo del proceso de diseño mediante la realimentación del vector de estado completo es determinar la matriz de ganancia K. Lo bueno del proceso de diseño mediante variables de estado es que el problema separa de forma natural una componente de realimentación del vector de estado completa y una componente de diseño del observador. Estos dos procesos de diseño se pueden llevar a cabo de manera independiente, y, de hecho, el **principio de separación** es una prueba de que esta aproximación es óptima. Se mostrará que la estabilidad del sistema en lazo cerrado se garantiza si la ley de control estabiliza el sistema (en el supuesto de que se pueda acceder al estado completo) y el observador es estable (el error de seguimiento es asintóticamente estable). Los observadores se tratan en la Sección 11.6. En la Figura 11.5 se muestra el diagrama de bloques de un sistema con realimentación del vector de estado completa.

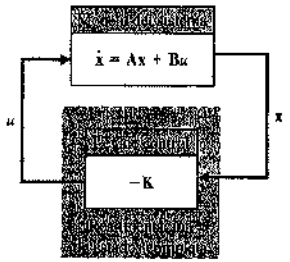


FIGURA 11.5
Diagrama de bloques realimentado de estados completos (sin señal de referencia).

Con el sistema definido por el modelo en variables de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$

y la ley de control realimentada dada por

$$u = -\mathbf{Kx},$$

se determina que el sistema de control en lazo cerrado es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u = \mathbf{Ax} - \mathbf{BKx} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}. \tag{11.5}$$

Como se expuso en la Sección 6.4, la ecuación característica asociada con la Ecuación (11.5) es

$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = 0.$$

Si todas las raíces de la ecuación característica se encuentran en el semiplano izquierdo, entonces el sistema en lazo cerrado es estable. En otras palabras, para cualquier condición inicial $\mathbf{x}(t_0)$, se sigue que

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})t}\mathbf{x}(t_0) \to 0 \quad \text{cuando } t \to \infty.$$

Dado el par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, siempre se puede determinar $\mathbf{K}$ para situar todos los polos del sistema en lazo cerrado en el semiplano izquierdo si y sólo si el sistema es completamente controlable; esto es, si y sólo si la matriz de controlabilidad $\mathbf{P}_c$ tiene rango completo (para un sistema de una entrada una salida, el rango completo implica que $\mathbf{P}_c$ es invertible).

La adición de una entrada de referencia se puede considerar como

$$u(t) = -\mathbf{Kx}(t) + Nr(t),$$

donde $r(t)$ es la entrada de referencia. En la Sección 11.8 se volverá a tratar el tema de las entradas de referencia. Cuando $r(t) = 0$ para todo $t > t_0$, el problema del diseño de control se denomina **problema de regulador**. Esto es, se desea calcular $\mathbf{K}$ de manera que todas las condiciones iniciales sean forzadas a cero de un modo determinado (como se determinó en las especificaciones de diseño).

Cuando se utiliza esta realimentación de variables de estado, las raíces de la ecuación característica se sitúan de manera que el comportamiento transitorio obtenga la respuesta deseada.

EJEMPLO 11.5. Diseño de un sistema de tercer orden

Se considera el sistema de tercer orden con la ecuación diferencial

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u.$$

Se pueden seleccionar las variables de estado como variables físicas (*véase* la Sección 3.4) de manera que $x_1 = y$, $x_2 = dy/dt$, $x_3 = d^2y/dt^2$, y entonces

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$

y

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x}.$$

Si la matriz de realimentación en variables de estados

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

y

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

Entonces el sistema en lazo cerrado es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}.$$

La matriz de realimentación de estados es

$$[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ (-2 - k_1) & (-3 - k_2) & (-5 - k_3) \end{bmatrix},$$

y la ecuación característica es

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) = \lambda^3 + (5 + k_3)\lambda^2 + (3 + k_2)\lambda + (2 + k_1) = 0. \quad (11.6)$$

Si se desea una respuesta rápida con una sobreelongación pequeña, se selecciona la ecuación característica de manera (*véanse* la Ecuación 5.18 y la Tabla 5.2)

$$\Delta(\lambda) = (\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2)(\lambda + \zeta\omega_n).$$

Se selecciona $\zeta = 0.8$ para obtener una sobreelongación mínima y ω_n para satisfacer los requisitos de tiempo de asentamiento. Si se quiere un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) igual a 1 segundo, entonces

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{(0.8)\omega_n} \simeq 1.$$

Si se elige $\omega_n = 6$, la ecuación característica es

$$(\lambda^2 + 9.6\lambda + 36)(\lambda + 4.8) = \lambda^3 + 14.4\lambda^2 + 82.1\lambda + 172.8. \quad (11.7)$$

Comparando las Ecuaciones (11.6) y (11.7) se obtienen las tres ecuaciones

$$5 + k_3 = 14.4$$
$$3 + k_2 = 82.1$$
$$2 + k_1 = 172.8.$$

Por lo tanto, se requiere que $k_3 = 9.4$, $k_2 = 79.1$ y $k_1 = 170.8$. La respuesta frente a un escalón no tiene sobreelongación y el tiempo de asentamiento es de 1 segundo, como se deseaba. ■

EJEMPLO 11.6. Control de un péndulo invertido

Se considera el control de un carro y de un péndulo invertido inestable como el que se muestra en la Figura 3.19. Se miden y se utilizan las variables de estado del sistema para controlar el carro (*véase* el Ejemplo 3.3). Por tanto, si se desea medir la variable de estado $x_3 = \theta$, se podría utilizar un potenciómetro conectado al desplazamiento del eje del péndulo. Análogamente, se podría medir el cambio del ángulo, $x_4 = \dot{\theta}$, utilizando un tacómetro. Las variables de estado, x_1 y x_2, que son la posición y la velocidad del carro,

también se pueden medir utilizando sensores adecuados. Si todas las variables de estado son medibles, entonces se pueden utilizar en la realimentación del controlador de manera que $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, donde $\mathbf{K}$ es la matriz de realimentación. El vector de estados $\mathbf{x}$ representa el estado del sistema; por lo tanto, el conocimiento de $\mathbf{x}(t)$ y las ecuaciones que describen la dinámica del sistema proporcionan suficiente información para el control y estabilización de este sistema [4, 5, 7].

Para ilustrar el uso de la realimentación de variables de estado, se considera de nuevo la parte inestable del sistema de péndulo invertido y se diseña un sistema de control realimentación apropiado en variables de estado. Se comienza considerando el sistema reducido. Si se supone que la señal de control es una señal de aceleración y que la masa del carro es despreciable, se puede centrar el problema en la dinámica inestable del péndulo. Cuando $u(t)$ es una señal de aceleración, la Ecuación (3.61) es

$$gx_3 - lx_4 = \dot{x}_2 = \ddot{y} = u(t).$$

Para el sistema reducido, en el que la señal del control es una señal de aceleración, la posición y velocidad del carro son funciones integrales de $u(t)$. La parte del vector de estado que se considera es $[x_3, x_4] = [\theta, \dot{\theta}]$. Entonces, la ecuación diferencial del vector de estado se reduce a

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(1/l) \end{bmatrix}u(t). \quad (11.8)$$

La matriz $\mathbf{A}$ de la Ecuación (11.8) es simplemente la parte inferior derecha de la matriz $\mathbf{A}$ de la Ecuación (3.65), y el sistema tiene la ecuación característica $[\lambda^2 - (g/l)]$ con una raíz en el lado derecho del plano s. Para estabilizar el sistema, se genera una señal de control que es función de dos variables de estado, x_3 y x_4. Entonces se tiene

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -[k_1 \quad k_2]\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = -k_1x_3 - k_2x_4.$$

Sustituyendo esta relación de la señal de control en la Ecuación (11.8), se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ +(1/l)(k_1x_3 + k_2x_4) \end{bmatrix}.$$

Combinando los dos términos aditivos de la parte derecha de la ecuación, se sigue que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1/l)(g + k_1) & +(k_2/l) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Si se obtiene la ecuación característica, se tiene

$$\begin{bmatrix} +\lambda & -1 \\ -(1/l)(g + k_1) & (\lambda - k_2/l) \end{bmatrix} = \lambda\left(\lambda - \frac{k_2}{l}\right) - \frac{1}{l}(g + k_1)$$

$$= \lambda^2 - \left(\frac{k_2}{l}\right)\lambda + \frac{1}{l}(k_1 + g). \quad (11.9)$$

Por lo tanto, para que el sistema sea estable, se requiere que $(k_2/l) < 0$ y $k_1 > -g$. Obsérvese que se ha estabilizado un sistema inestable midiendo las variables de estado x_3 y x_4 y utilizando la función de control $u = -\mathbf{Kx}$ para obtener un sistema estable. Si se desea lograr una respuesta rápida con una sobreelongación razonable, se selecciona $\omega_n = 10$ y $\zeta = 0.8$. Entonces se requiere

$$\frac{k_2}{l} = -16 \quad \text{y} \quad \frac{(k_1 + g)}{l} = 100.$$

La respuesta a un escalón tendría una sobreelongación del 1.5% y un tiempo de asentamiento de 0.5 segundos. ■

En esta sección, se ha establecido una aproximación para el diseño de sistemas de control realimentados utilizando las variables de estado como variables de realimentación para aumentar la estabilidad del sistema y obtener la respuesta deseada.

11.5. FÓRMULA DE ACKERMANN

Para un sistema de una entrada-una salida, la fórmula de Ackermann es útil para determinar la matriz de realimentación en variables de estado

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \cdots k_n],$$

donde

$$u = -\mathbf{Kx}.$$

Dada la ecuación característica deseada

$$q(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n,$$

la matriz de ganancia de realimentación es

$$\boxed{\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]\mathbf{P}_c^{-1}q(\mathbf{A}),} \tag{11.10}$$

donde

$$q(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots \alpha_{n-1}\mathbf{A} + \alpha_n\mathbf{I},$$

y $\mathbf{P}_c$ es la matriz de controlabilidad de la Ecuación (11.2).

EJEMPLO 11.7. Sistema de segundo orden

Se considera el sistema

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2}$$

y se va a determinar la ganancia de realimentación para situar los polos en lazo cerrado en $s = -1 \pm j$. Por lo tanto, se requiere que

$$q(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2,$$

y $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$. Con $x_1 = y$ y $x_2 = \dot{y}$, la ecuación matricial para el sistema $G(s)$ es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u.$$

La matriz de controlabilidad es

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, se obtiene

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} q(\mathbf{A}),$$

donde

$$\mathbf{P}_c^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$q(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces se tiene

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = [2 \quad 2]. \quad ■$$

Obsérvese que el cálculo de la matriz de ganancia $\mathbf{K}$ utilizando la fórmula de Ackermann requiere el uso de $\mathbf{P}_c^{-1}$. Se observa que la controlabilidad completa es esencial porque sólo en este caso se puede garantizar que la matriz de controlabilidad $\mathbf{P}_c$ tiene rango completo y, por lo tanto, que $\mathbf{P}_c^{-1}$ existe.

11.6. DISEÑO DEL OBSERVADOR

En el proceso de diseño mediante realimentación del vector de estado completo que se presentó en la Sección 11.4, se supone que todos los estados están disponibles para realimentación en cualquier instante de tiempo. Ésta es una buena suposición para los procesos de diseño de las leyes de control. Sin embargo, hablando de manera general, sólo un subconjunto de los estados son medibles y están disponibles para realimentación. El tener todos los estados disponibles para realimentación implica que esos estados son medibles mediante un sensor o combinación de sensores. El coste y complejidad del sistema de control aumenta a medida que el número de sensores que requiere se incrementa. Por lo tanto, incluso en las situaciones en las que hay disponibles sensores extras, puede no ser efectivo en cuanto al coste emplear tales sensores si, de hecho, se pueden conseguir los objetivos de diseño del sistema de control sin utilizarlos. Afortunadamente, si el sistema es completamente observable con un conjunto de salidas dado, entonces es posible determinar (o estimar) los estados que no son medibles (u observables) directamente.

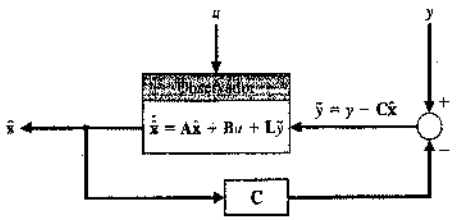


FIGURA 11.6
Observador de estados completo.

De acuerdo con Luenberger [29], el observador de estados completo para el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

está dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \tag{11.11}$$

donde $\hat{\mathbf{x}}$ denota la estimación del estado $\mathbf{x}$. La matriz $\mathbf{L}$ es la matriz de ganancia y se determina como parte del procedimiento de diseño del observador. El observador se muestra en la Figura 11.6. Éste tiene dos entradas, u e y, y una salida, $\hat{\mathbf{x}}$.

El objetivo del observador es dar una estimación $\hat{\mathbf{x}}$. De modo que $\hat{\mathbf{x}} \to \mathbf{x}$ cuando $t \to \infty$. Recuérdese que no se conoce $\mathbf{x}(t_0)$; por tanto, se debe proporcionar al observador una estimación inicial $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$. Se define el **error de estimación** del observador como

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t). \tag{11.12}$$

El diseño del observador debería generar un observador con la propiedad de que $\mathbf{e}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Uno de los principales resultados de la teoría de sistemas es que si el sistema es completamente observable, siempre se puede determinar $\mathbf{L}$ de manera que el error de seguimiento es asintóticamente estable, como se desea.

Si se toma la derivada respecto al tiempo del error de estimación en la Ecuación (11.2) se obtiene

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}$$

y usando el modelo del sistema y el observador en la Ecuación (11.11), resulta

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}u - \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

o

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t). \tag{11.13}$$

Se puede garantizar que $\mathbf{e}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para cualquier error de seguimiento inicial $\mathbf{e}(t_0)$ si la ecuación característica

$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})) = 0 \tag{11.14}$$

tiene todas sus raíces en el semiplano izquierdo. Por lo tanto, el proceso de diseño del observador se reduce a encontrar la matriz $\mathbf{L}$ de manera que las raíces de la ecuación característica en la Ecuación (11.14) pertenezcan al semiplano izquierdo. Esto se puede lograr siempre que el sistema sea completamente observable; esto es, si la matriz de observabilidad, $\mathbf{P}_o$, tiene rango completo (para un sistema de una entrada-una salida, rango completo implica que $\mathbf{P}_o$ es invertible).

EJEMPLO 11.8. Diseño del observador de un sistema de segundo orden

Se considera el sistema de segundo orden

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = [1 \quad 0]\mathbf{x}.$$

En este ejemplo, sólo se puede observar directamente el estado $y = x_1$. El observador proporcionará estimaciones del segundo estado, x_2.

En este libro, sólo se consideran observadores de estados completos, lo que implica que el observador proporciona estimaciones de todos los estados. En principio se podría suponer que, puesto que algunos estados son directamente medibles, sería posible diseñar un observador que proporcionase sólo estimaciones de aquellos estados que no son directamente medibles. Esto, de hecho, es posible, y los observadores resultantes se denominan observadores de orden reducido [14, 20]. Sin embargo, puesto que los sensores no están libres de ruido, incluso los estados que son directamente medibles son generalmente estimados para poder reducir el efecto del ruido del sensor en el estado estimado. El filtro de Kalman (que es un observador óptimo variante en el tiempo) resuelve el problema del observador en presencia de medidas de ruido (y también en procesos de ruido) [36, 37].

El diseño del observador comienza comprobándose la observabilidad del sistema para verificar que se puede construir un observador que garantice la estabilidad del error de estimación. A partir del modelo del sistema, se sigue que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0].$$

La matriz de observabilidad correspondiente es

$$\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como $\det \mathbf{P}_o = 3 \neq 0$, el sistema es completamente observable. Se supone que la ecuación característica deseada está dada por

$$\Delta_d(\lambda) = \lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2. \tag{11.15}$$

Se puede seleccionar $\zeta = 0.8$ y $\omega_n = 10$, lo que origina un tiempo de asentamiento menor que 0.5 segundos. Si se calcula la ecuación característica real, se obtiene

$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})) = \lambda^2 + (L_1 - 6)\lambda - 4(L_1 - 2) + 3(L_2 + 1), \tag{11.16}$$

donde $\mathbf{L} = [L_1 \quad L_2]^T$. Igualando los coeficientes en la Ecuación (11.15) con los de la Ecuación (11.16) se obtiene

$$L_1 - 6 = 16$$
$$-4(L_1 - 2) + 3(L_2 + 1) = 100$$

y tras resolver estas ecuaciones se obtiene

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix}.$$

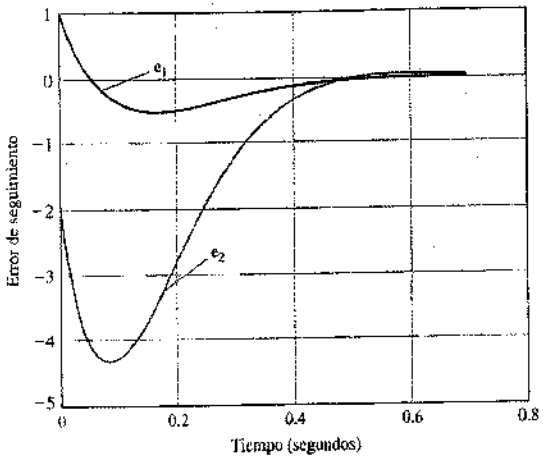


FIGURA 11.7
Respuesta de un observador de segundo orden a errores iniciales de seguimiento.

Por lo tanto, el observador está dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix}(y - \hat{x}_1).$$

La respuesta del error de estimación a un error inicial de

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

se muestra en la Figura 11.7. ■

Se puede utilizar la fórmula de Ackermann para situar las raíces de la ecuación característica del observador en los lugares deseados. Se considera la matriz de ganancia del observador

$$\mathbf{L} = [L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_n]^T$$

y la ecuación característica *deseada* del observador

$$p(\lambda) = \lambda^n + \beta_1\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}\lambda + \beta_n.$$

Las β se seleccionan para conseguir las especificaciones de comportamiento requeridas para el observador. La matriz de ganancia del observador se calcula mediante

$$\boxed{\mathbf{L} = p(\mathbf{A})\mathbf{P}_o^{-1}[0 \quad \cdots \quad 1]^T,} \tag{11.17}$$

donde $\mathbf{P}_o$ es la matriz de observabilidad dada en la Ecuación (11.3) y

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \beta_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}\mathbf{A} + \beta_n\mathbf{I}.$$

EJEMPLO 11.9. Diseño del observador de un sistema de segundo orden utilizando la fórmula de Ackermann

Se considera el sistema de segundo orden del Ejemplo 11.8. La ecuación característica *deseada* está dada por

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2,$$

donde $\zeta = 0.8$ y $\omega_n = 10$; de donde $\beta_1 = 16$ y $\beta_2 = 100$. Si se calcula $p(\mathbf{A})$ se obtiene

$$p(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^2 + 16\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 100\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133 & 66 \\ -22 & 177 \end{bmatrix},$$

y del Ejemplo 11.8, se tiene que la matriz de observabilidad es

$$\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

lo que implica que

$$\mathbf{P}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Utilizando la fórmula de Ackermann en la Ecuación (11.7) se obtiene la matriz de ganancia del observador

$$\mathbf{L} = p(\mathbf{A})\mathbf{P}_o^{-1}[0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]^T = \begin{bmatrix} 133 & 66 \\ -22 & 177 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix}.$$

Este resultado es idéntico al obtenido en el Ejemplo 11.8 utilizando otros métodos. ■

11.7. DISEÑO DEL COMPENSADOR: INTEGRACIÓN DE LA REALIMENTACIÓN DEL VECTOR DE ESTADO COMPLETO Y DEL OBSERVADOR

El compensador en variables de estado se construye de manera apropiada conectando la ley de control de realimentación de estados completos (*véase* la Sección 11.4) con el observador (*véase* la Sección 11.6). En la Figura 11.1 se muestra el compensador (como se expone en la Sección 11.1). La estrategia consiste en diseñar la ley de control de estados realimentados como $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, donde se supone que se tiene acceso al estado completo $\mathbf{x}(t)$. Después se diseña un observador para proporcionar una estimación del estado $\hat{\mathbf{x}}(t)$. Parece razonable que se pueda emplear la estimación de estados en la ley de control realimentada en lugar de $\mathbf{x}(t)$. En otras palabras, se puede considerar la ley de realimentación

$$u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t). \tag{11.18}$$

Pero ¿es ésta una buena estrategia? La matriz de realimentación de ganancia $\mathbf{K}$ se diseñó para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado; esto es, las raíces de la ecuación característica

$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) = 0$$

están en el semiplano izquierdo. En el supuesto de que el estado completo $\mathbf{x}(t)$ esté disponible para realimentación, la ley de control realimentada (con la matriz de ganancia $\mathbf{K}$ diseñada de manera adecuada) conduce al resultado deseado, que $\mathbf{x}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para cualquier condición inicial $\mathbf{x}(t_0)$. Se necesita verificar que, cuando se utiliza la ley de control realimentada de la Ecuación (11.8), se mantiene la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Se considera el observador (de la Sección 11.6)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}).$$

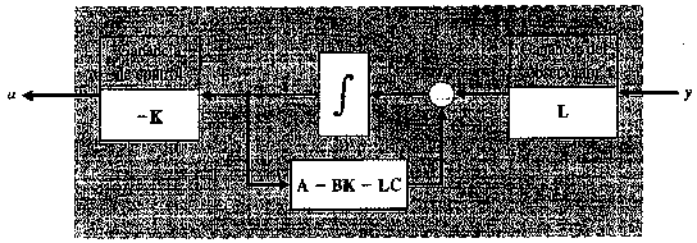


FIGURA 11.8
Compensador en variables de estado con realimentación de estados completa y observador integrados.

Si se sustituye la ley de realimentación en la Ecuación (11.18) y se reordenan los términos en el observador se obtiene el sistema compensador

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y$$
$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}. \tag{11.19}$$

Obsérvese que el sistema de la Ecuación (11.19) tiene la forma de modelo de variables de estado con entrada y y salida u, como se ilustra en la Figura 11.8.

Si se calcula el error de estimación utilizando el compensador de la Ecuación (11.19) se obtiene

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}u - \mathbf{L}y + \mathbf{LC}\hat{\mathbf{x}}$$

o

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}. \tag{11.20}$$

Este es el mismo resultado que se obtuvo para el error de estimación en la Sección 11.6. Como se observa en la Ecuación (11.20) el error de estimación no depende de la entrada, donde los términos de la entrada se cancelan. Recordando que el modelo del sistema está dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{Cx}.$$

Si se sustituye la ley de realimentación $u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$ en el modelo del sistema, resulta

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u = \mathbf{Ax} - \mathbf{BK}\hat{\mathbf{x}},$$

y con $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{e}$, se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BKe}. \tag{11.21}$$

Si se escriben las Ecuaciones (11.20) y (11.21) de forma matricial, se tiene

$$\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \dot{\mathbf{e}}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{e}\end{pmatrix}. \tag{11.22}$$

Se recuerda que el objetivo consiste en verificar que, con $u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$, se mantiene la estabilidad del sistema en lazo cerrado y del observador. La ecuación característica asociada con la Ecuación (11.22) es

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}))\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})).$$

De esta manera, si las raíces de $\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = 0$ yacen en el semiplano izquierdo (lo hacen debido al diseño de la ley de realimentación de estados completa), y si las raíces de $\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})) = 0$ están en el semiplano izquierdo (lo hacen debido al diseño del observador), entonces el sistema global es estable. Por lo tanto, el utilizar los estados estimados para realimentación es, de hecho, una buena estrategia.

En otras palabras, cuando se utiliza $u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$, donde $\mathbf{K}$ se diseña mediante los métodos propuestos en el Sección 11.4 y $\hat{\mathbf{x}}$ se calcula a partir del observador como se trató en la Sección 11.6, entonces $\mathbf{x}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para cualquier condición inicial $\mathbf{x}(t_0)$ y $\mathbf{e}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para cualquier estimación inicial del error $\mathbf{e}(t_0)$. El hecho de que la ley de realimentación y el observador se puedan diseñar de manera independiente es ilustrativo del **principio de separación**.

El proceso de diseño se resume de la siguiente forma:

1. Determinar $\mathbf{K}$ de manera que $\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = 0$ tenga raíces en el semiplano izquierdo y sitúe los polos de forma apropiada para conseguir las especificaciones de diseño del sistema de control. La posibilidad de situar los polos de forma arbitraria en el plano complejo está garantizada si el sistema es completamente controlable.
2. Determinar $\mathbf{L}$ de forma que $\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})) = 0$ tenga raíces en el semiplano izquierdo y sitúe los polos para lograr un comportamiento aceptable del observador (se estudiará más sobre asignación de polos en la Sección 11.8). La posibilidad de situar los polos del observador de forma arbitraria en el plano complejo está garantizada si el sistema es completamente observable.
3. Conectar el observador con la ley de realimentación de estados completo utilizando la expresión
$$u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t).$$

Función de Transferencia del Compensador. El compensador dado en la Ecuación (11.19) se puede expresar de forma equivalente mediante la función de transferencia con entrada $Y(s)$ y salida $U(s)$. Tomando la transformada de Laplace (con condiciones iniciales nulas) del compensador, se obtiene

$$s\hat{\mathbf{X}}(s) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{L}Y(s)$$
$$U(s) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{X}}(s),$$

y reordenando términos y resolviendo para $U(s)$, se obtiene la función de transferencia

$$U(s) = [-\mathbf{K}(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC}))^{-1}\mathbf{L}]Y(s). \tag{11.23}$$

Obsérvese que la función de transferencia del compensador (cuando se ve como un sistema) puede ser estable o no. Incluso aunque $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ sea estable y $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ sea estable, no se sigue necesariamente que $\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC}$ sea estable. Sin embargo, el sistema global en lazo cerrado es estable (como se ha probado en los análisis previos). El controlador de la Ecuación (11.23) se denomina normalmente **controlador estabilizante**.

EJEMPLO 11.10. Diseño de un compensador para el péndulo invertido

Se considera el péndulo invertido del Ejemplo 3.3. La representación del modelo en variables de estado del péndulo invertido en lo alto de un carro en movimiento es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{-mg}{M} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dfrac{g}{l} & 0\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \dfrac{1}{M}\\ 0\\ \dfrac{-1}{Ml}\end{bmatrix}u,$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, x_1 es la posición del carro, x_2 es la velocidad del carro, x_3 es la posición angular del péndulo (medida desde la vertical), x_4 es la velocidad angular del péndulo y u es la entrada aplicada al carro. Como se mostró en el Ejemplo 11.6, se puede medir la variable de estado $x_3 = \theta$ utilizando un potenciómetro unido al eje, o medir $x_4 = \dot{\theta}$ utilizando un tacómetro. Sin embargo, se supone que se dispone de un sensor para medir la posición del carro. ¿Es posible mantener la posición angular del péndulo en el valor deseado ($\theta = 0^o$) cuando únicamente está disponible $y = x_1$ (la posición del carro)? En este caso se tiene la ecuación de salida

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x}.$$

Sean los parámetros del sistema

$$l = 0.098 \text{ m}$$
$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$
$$m = 0.825 \text{ kg}$$
$$M = 8.085 \text{ kg}.$$

Por lo tanto, si se utilizan los valores de los parámetros, las matrices de estado y de entrada del sistema son

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1237 \\ 0 \\ -1.2621 \end{bmatrix}.$$

Si se comprueba la controlabilidad, la matriz de controlabilidad es

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0.1237 & 0 & 1.2621 \\ 0.1237 & 0 & 1.2621 & 0 \\ 0 & -1.2621 & 0 & 126.21 \\ -1.2621 & 0 & -126.21 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si se calcula $\det \mathbf{P}_c = 196.49 \neq 0$; por lo tanto, el sistema es completamente controlable. De la misma forma, si se calcula la matriz de observabilidad

$$\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y $\det \mathbf{P}_o = 1 \neq 0$; por lo tanto, el sistema es completamente observable. Ahora se puede proceder con los tres pasos del proceso de diseño, sabiendo de antemano que se puede determinar una matriz de control de ganancia $\mathbf{K}$ y una matriz de ganancia del observador $\mathbf{L}$ para situar todos los polos del sistema en lazo cerrado en las posiciones deseadas.

Paso 1: Diseño de la ley de control por realimentación de estados completa
Los polos del sistema en lazo abierto están localizados en $\lambda = 0, 0, -10$ y 10. Es evidente que el sistema en lazo abierto es inestable (hay polo en el semiplano derecho). Se supone que la ecuación característica deseada del sistema en lazo cerrado está dada por

$$q(\lambda) = (\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2)(\lambda^2 + a\lambda + b),$$

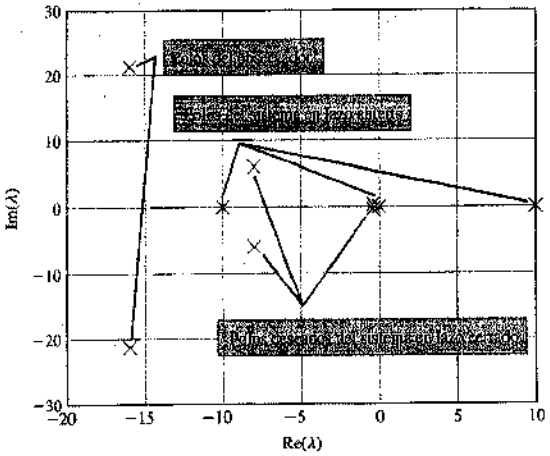


FIGURA 11.9
Mapa de polos del sistema: polos en lazo abierto, polos deseados en lazo cerrado y polos del observador.

donde se selecciona (1) el par (ζ, ω_n) de manera que esos polos sean polos dominantes y (2) el par (a, b) en posiciones apartadas del semiplano izquierdo de manera que no dominan la respuesta. Para obtener un tiempo de asentamiento menor que 10 segundos con una sobreelongación pequeña, se puede seleccionar $(\zeta, \omega_n) = (0.8, 0.5)$. Entonces, se selecciona la separación entre los polos dominantes y los restantes polos de 20, de donde se sigue que $(a, b) = (16, 100)$. La Figura 11.9 muestra el mapa de polos y ceros para el diseño del sistema. El valor de separación entre los polos dominantes y los no dominantes es un parámetro que se puede variar como parte del proceso de diseño. Cuanto mayor sea la separación seleccionada, más alejados en el semiplano izquierdo estarán situados los polos no dominantes, y por lo tanto mayores serán las ganancias requeridas en la ley de control. La especificación de las raíces deseadas es

$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = (\lambda + 8 \pm 6i)(\lambda + 0.4 \pm 0.3i).$$

Los polos situados en $\lambda = -0.4 \pm 0.3i$ son los dominantes. Utilizando la fórmula de Ackermann se obtiene la matriz de ganancia para la realimentación

$$\mathbf{K} = [-2.2509 \quad -7.5631 \quad -169.0265 \quad -14.0523].$$

Paso 2: Diseño del observador
El observador necesita proporcionar una estimación de los estados que no son directamente observables. El objetivo consiste en lograr una estimación precisa tan rápido como sea posible sin que resulte una matriz de ganancia $\mathbf{L}$ demasiado grande. Cómo de grande es demasiado grande depende del problema que se considere. En particular, si hay niveles significativos de medida de ruido (éste es un sensor dependiente), entonces la magnitud de la matriz de observador debería mantenerse lo suficientemente baja para evitar la amplificación en la medida del ruido. El equilibrio entre el tiempo requerido para obtener el comportamiento preciso del observador y la cantidad de amplificación de ruido es un requisito primordial de diseño. A efectos de diseño, se intentará asegurar una separación entre los polos deseados del sistema en lazo cerrado y los polos del observador en un orden de 2 a 10 (como se ilustra en la Figura 11.9). La ecuación característica del observador deseado se selecciona de la forma

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + c_1\lambda + c_2)^2,$$

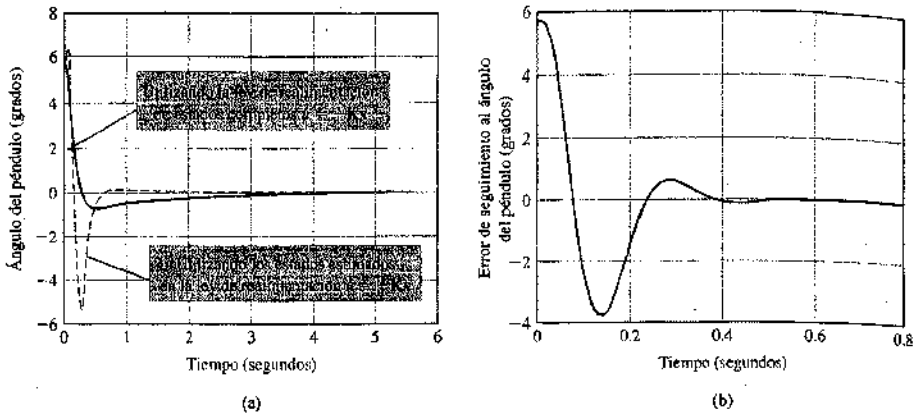


FIGURA 11.10. Comportamiento del péndulo bajo el control realimentado de estados completos con un observador en el lazo.

donde las constantes c_1 y c_2 se eligen de manera apropiada. Como primer intento, se selecciona $c_1 = 32$ y $c_2 = 711.11$. Estos valores deberían producir una respuesta a un error de estimación de estado inicial que se asiente en menos de 0.5 segundos con una sobreelongación mínima. Si se utiliza la fórmula de Ackermann de la Sección 11.6, se determina que la ganancia del observador que logra las situaciones deseadas de los polos del observador $\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})) = (\lambda + 16 \pm 21.3i)^2$ es

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 64.0 \\ 2546.22 \\ -5.1911\text{E}04 \\ -7.6030\text{E}05 \end{bmatrix}.$$

Paso 3: Diseño del compensador

El paso final del diseño consiste en conectar el observador a la ley de control realimentada de estados completos mediante $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$. Como se probó anteriormente, el sistema en lazo cerrado permanecerá estable; sin embargo, no se debería esperar que el comportamiento en lazo cerrado fuese tan bueno cuando el observador utilice el estimador de estados. Esto tiene sentido, puesto que el observador tarda una cantidad finita de tiempo en proporcionar con precisión los estados estimados. La respuesta del diseño para el péndulo invertido se muestra en la Figura 11.10. El péndulo inicialmente está estacionario en $\theta_0 = 5.72°$, y el carro inicialmente está parado. La estimación inicial del estado en el observador se fija a cero.

En la Figura 11.10(a), se observa que, de hecho, el péndulo se equilibra en la vertical en menos de 4 segundos. La respuesta del compensador (con el observador) es más oscilatoria que sin el observador en el lazo; pero esta diferencia en el comportamiento era esperada, puesto que el observador tarda aproximadamente 0.4 segundos en converger al mínimo estado de seguimiento del error, como se observa en la Figura 11.10(b). ■

11.8. ENTRADAS DE REFERENCIA

Las estrategias de realimentación que se analizaron en las secciones previas (y que se ilustraron en la Figura 11.1) se presentaron sin la consideración de las entradas de referencia. Al diseño de compensadores realimentados en variables de estado sin entradas de referencia [es decir, $r(t) = 0$] se le denomina reguladores. Puesto que las **órdenes de seguimiento** son también un aspecto importante en el diseño realimentado, es importante considerar cómo se puede introducir una señal de referencia en el compensador realimentado en variables de estado. De hecho, hay muchas técnicas distintas que se pueden utilizar para permitir el seguimiento de una entrada de referencia. En esta sección se presentan dos de los métodos más comunes.

La forma general de un compensador realimentado en variables de estado es

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{u} + \mathbf{L}\tilde{y} + \mathbf{M}r$$
$$u = \tilde{u} + Nr = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + Nr, \qquad (11.24)$$

donde $\tilde{y} = y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$ y $\tilde{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$. En la Figura 11.11 se muestra el compensador en variables de estado con la entrada de referencia. Obsérvese que cuando $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ y $N = 0$, el compensador de la Ecuación (11.24) se reduce al regulador descrito en la Sección 11.7 y que se ilustra en la Figura 11.1.

Los parámetros de diseño fundamentales requeridos para implementar las órdenes de seguimiento de una entrada de referencia son $\mathbf{M}$ y N. Cuando la entrada de referencia es una señal escalar (es decir, una única entrada), el parámetro $\mathbf{M}$ es un vector columna de longitud n, donde n es la longitud del vector de estado $\mathbf{x}$, y N es un escalar. Aquí, se consideran dos posibilidades para seleccionar $\mathbf{M}$ y N. En el primer caso, se selecciona $\mathbf{M}$ y N de forma que el error de estimación $\mathbf{e}(t)$ es independiente de la entrada de referencia $r(t)$. En el segundo caso, se selecciona $\mathbf{M}$ y N de manera que el error de seguimiento $y(t) - r(t)$ se utiliza como una entrada al compensador. Estos dos casos darán lugar a implementaciones en las que el compensador es una lazo de realimentación para el primer caso y un lazo hacia delante en el segundo.

Si se utiliza el compensador generalizado de la Ecuación (11.24), el error de estimación está descrito mediante la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\tilde{u} - \mathbf{L}y - \mathbf{M}r,$$

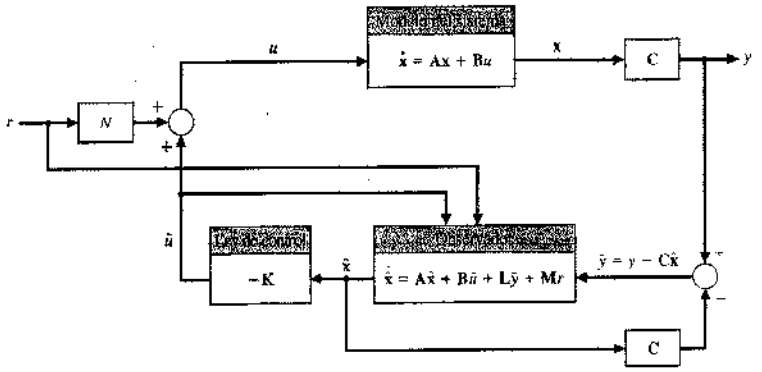


FIGURA 11.11 Compensador en variables de estado con una entrada de referencia.

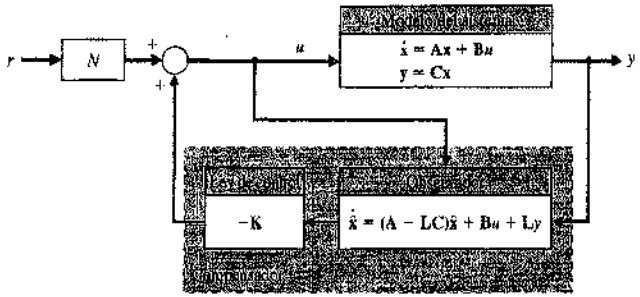


FIGURA 11.12
Compensador en variables de estado con entrada de referencia y $\mathbf{M} = \mathbf{B}N$.

o

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e} + (\mathbf{B}N - \mathbf{M})r.$$

Se supone que se selecciona

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}N. \tag{11.25}$$

Entonces el correspondiente error de estimación está dado por

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}.$$

En este caso, el error de estimación es independiente de la entrada de referencia $r(t)$. Éste es un resultado idéntico al que se estableció en la Sección 11.6, donde se consideraba el diseño del observador sin suponer entradas de referencia. La cuestión que resta por resolver es el determinar un valor apropiado de N, puesto que el valor de $\mathbf{M}$ se obtiene de la Ecuación (11.25). Por ejemplo, se podría seleccionar N para obtener un error de seguimiento nulo en estado estacionario frente a una entrada escalón $r(t)$.

Con $\mathbf{M} = \mathbf{B}N$, se sigue que el compensador está dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}\tilde{y}$$
$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + Nr.$$

Esta implementación del compensador en variables de estado se ilustra en la Figura 11.12.

Como aproximación alternativa, se supone que se selecciona $N = 0$ y $\mathbf{M} = -\mathbf{L}$. Entonces, el compensador en la Ecuación (11.24) está dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}\tilde{y} - \mathbf{L}r$$
$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}},$$

lo que se puede reescribir como

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}(y - r)$$
$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}.$$

En esta formulación, el observador está dirigido por el error de seguimiento $y - r$. En la Figura 11.13 se ilustra la implementación del seguimiento de la entrada de referencia.

Obsérvese que en la primera implementación (con $\mathbf{M} = \mathbf{B}N$) el compensador está en el lazo de realimentación, mientras que en la segunda implementación ($N = 0$ y $\mathbf{M} = -\mathbf{L}$) el compensador está en el camino directo. Estas dos implementaciones son

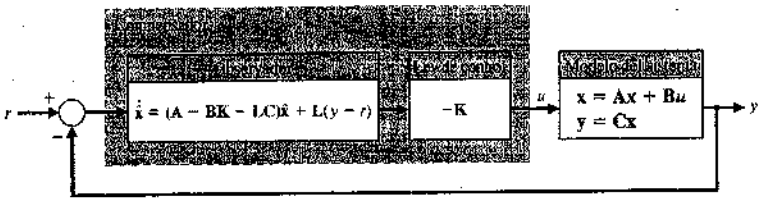


FIGURA 11.13
Compensador en variables de estado con entrada de referencia y $N = 0$ y $\mathbf{M} = -\mathbf{L}$.

representativas de las posibilidades de los diseños del sistema de control en lazo abierto cuando se consideran entradas de referencia.

Dependiendo de la selección de N y $\mathbf{M}$, también son posibles otras implementaciones. Por ejemplo, en la Sección 11.10 se presenta un método de seguimiento de entradas de referencia que garantizan errores de seguimiento en estado estacionario utilizando técnicas de **diseño de modelo interno**.

11.9. SISTEMAS DE CONTROL ÓPTIMO

El diseño de sistemas óptimos de control es una función importante de la ingeniería de control. El propósito del diseño es realizar un sistema con componentes prácticos que proporcione el comportamiento de operación deseado. El comportamiento deseado puede establecerse fácilmente en términos de índices de comportamiento en el dominio del tiempo. Por ejemplo, la máxima sobreelongación y el tiempo de subida para una entrada de escalón son índices valiosos en el dominio del tiempo. En el caso del comportamiento transitorio y en estado estacionario, los índices de comportamiento se especifican normalmente en el dominio del tiempo, por lo que es natural que se desee desarrollar procedimientos de diseño en el dominio del tiempo.

El comportamiento de un sistema de control puede representarse por medidas integrales de comportamiento, como se vio en la Sección 5.9. Por tanto, el diseño de un sistema debe basarse en minimizar un índice de comportamiento, como la integral de cuadrado del error (ISE), como en la Sección 5.9. Los sistemas que se ajustan para proporcionar un índice mínimo de comportamiento frecuentemente se conocen como **sistemas de control óptimos**. En esta sección se considera el diseño de un sistema óptimo de control donde el sistema se describe mediante una formulación de variables de estado. Se considera la medición de las variables de estado y su uso en el desarrollo de una señal de control $u(t)$ para optimizar el comportamiento del sistema.

El comportamiento de un sistema de control, expresado en variables de estado, puede escribirse en general como

$$J = \int_0^{t_f} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\, dt, \tag{11.26}$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector de estado, $\mathbf{u}$ es el vector de control y t_f es el tiempo[1] final.

[1] Obsérvese que para indicar el índice de comportamiento se usa J en lugar de I, que se usó en el Capítulo 5. Esto permite al lector distinguir fácilmente el índice de comportamiento respecto de la matriz de identidad, que se representa por la mayúscula negrita $\mathbf{I}$.

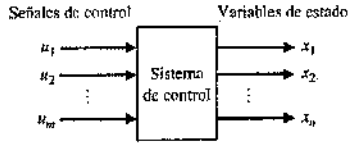


FIGURA 11.14
Un sistema de control en términos de x y u.

Interesa minimizar el error del sistema, por lo que, cuando el vector de estado deseado se representa como $\mathbf{x}_d = \mathbf{0}$, se puede considerar el error como idénticamente igual al valor del vector de estado. Esto es, se desea que el sistema esté en equilibrio, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_d = \mathbf{0}$, y cualquier desviación del equilibrio se considera un error. Por tanto, en esta sección se considera el diseño de los sistemas óptimos de control usando realimentación de las variables de estado e **índices del cuadrado del error para el comportamiento** [1-3].

El sistema de control que se considera se muestra en la Figura 11.14 y puede representarse por la ecuación diferencial vectorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \tag{11.27}$$

Se seleccionará un regulador de realimentación de forma que $\mathbf{u}$ sea función de las variables de estado $\mathbf{x}$ medidas y, por tanto,

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k}(\mathbf{x}).$$

Por ejemplo, podríamos usar

$$u_1 = -k_1x_1, \quad u_2 = -k_2x_2, \quad \ldots, \quad \text{y} \quad u_m = -k_mx_m. \tag{11.28}$$

Alternativamente, se podría escoger el vector de control como

$$u_1 = -k_1(x_1 + x_2), \quad u_2 = -k_2(x_2 + x_3), \quad \ldots \tag{11.29}$$

La elección de las señales de control es un poco arbitraria y depende parcialmente del comportamiento real deseado y de la complejidad de la estructura de realimentación permisible. Frecuentemente se está limitado en el número de las variables de estado disponibles para la realimentación, en virtud de que solamente se pueden utilizar variables de estado medibles.

Ahora bien, en nuestro caso, se limita la función de realimentación a una función lineal de forma que $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, donde $\mathbf{K}$ es una matriz de $m \times n$. Por tanto, en forma desarrollada, se tiene

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ & & \\ \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{11.30}$$

Entonces, sustituyendo la Ecuación (11.30) en la (11.27), se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x}, \tag{11.31}$$

donde $\mathbf{H}$ es la matriz de $n \times n$ que resulta de la suma de los elementos de $\mathbf{A}$ y de $-\mathbf{B}\mathbf{K}$.

Ahora bien, regresando al índice de comportamiento del cuadrado del error, se recuerda, de la Sección 5.9, que el índice para una sola variable de estado, x_1, se escribe

$$J = \int_0^{t_f} [x_1(t)]^2\, dt. \tag{11.32}$$

Un índice de comportamiento escrito en términos de dos variables de estado sería entonces

$$J = \int_0^{t_f} (x_1^2 + x_2^2)\, dt. \tag{11.33}$$

Por tanto, como se desea definir el índice de comportamiento en términos de una integral de la suma de los cuadrados de las variables de estado, se utiliza la operación matricial

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2), \tag{11.34}$$

donde $\mathbf{x}^T$ indica la transpuesta de la matriz[2] $\mathbf{x}$. Entonces la forma general del índice de comportamiento, en términos del vector de estado, es

$$J = \int_0^{t_f} (\mathbf{x}^T\mathbf{x})\, dt. \tag{11.35}$$

La forma general del índice de comportamiento (Ecuación 11.26) incorpora un término sin $\mathbf{u}$ que no se ha incluido en este punto, pero que se incluirá más tarde en esta sección.

Considerando de nuevo la Ecuación (11.35), se hará que el tiempo final de interés sea $t_f = \infty$. Para obtener el valor mínimo de J, se postula la existencia de una diferencial exacta, de forma que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T\mathbf{x}, \tag{11.36}$$

donde $\mathbf{P}$ se debe determinar. Se usará una matriz $\mathbf{P}$ simétrica para simplificar el proceso algebraico sin ninguna pérdida de generalidad. Entonces, para una matriz simétrica $\mathbf{P}$, $p_{ij} = p_{ji}$. Efectuando la derivación indicada en la parte izquierda de la Ecuación (11.36), se tiene

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}.$$

Entonces, sustituyendo la Ecuación (11.31), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}) &= (\mathbf{H}\mathbf{x})^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}(\mathbf{H}\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^T\mathbf{H}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T(\mathbf{H}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{H})\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{11.37}$$

donde $(\mathbf{H}\mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T\mathbf{H}^T$ por la definición de transpuesta de un producto. Si se hace $(\mathbf{H}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{H}) = -\mathbf{I}$, entonces la Ecuación (11.37) será

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T\mathbf{x}, \tag{11.38}$$

[2] En la web del MCS se trata la operación de la matriz $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$.

que es la diferencial exacta buscada. Sustituyendo la Ecuación (11.38) en la (11.35), se obtiene

$$J = \int_0^\infty -\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x})\,dt = -\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}\Big|_0^\infty = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0). \tag{11.39}$$

En el cálculo del límite en $t = \infty$, se ha supuesto que el sistema es estable y, por consiguiente, $\mathbf{x}(\infty) = 0$, como se quería. Por tanto, para minimizar el índice de comportamiento J, se consideran las dos ecuaciones

$$\boxed{J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{x}\,dt = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)} \tag{11.40}$$

y

$$\boxed{\mathbf{H}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{H} = -\mathbf{I}.} \tag{11.41}$$

Entonces los pasos diseño son los siguientes:

1. Determinar la matriz **P** que satisfaga la Ecuación (11.41), donde **H** es conocida.
2. Minimizar J determinando el mínimo de la Ecuación (11.40) ajustando uno o más de los parámetros no especificados del sistema.

EJEMPLO 11.11. Realimentación en variables de estado

Considérese el sistema de control mostrado en la Figura 11.15. Las variables de estado se identifican como x_1 y x_2. El comportamiento de este sistema es muy poco satisfactorio, pues resulta una respuesta no amortiguada para una señal de entrada o una perturbación de escalón. La ecuación diferencial vectorial de este sistema es

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t), \tag{11.42}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se escoge un sistema de control por realimentación de forma que

$$u(t) = -k_1x_1 - k_2x_2, \tag{11.43}$$

y, por tanto, la señal de control es una función lineal de las dos variables de estado. Entonces la (11.42) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1x_1 - k_2x_2; \end{aligned} \tag{11.44}$$

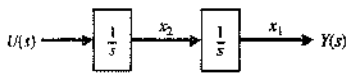


FIGURA 11.15
Sistema de control en lazo abierto del Ejemplo 11.11.

en forma matricial, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{H}\mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{11.45}$$

Se observa que x_1 representaría la posición de un sistema de control de posición; la función de transferencia del sistema sería $G(s) = 1/Ms^2$, donde $M = 1$, y la fricción es despreciable. Se hace $k_1 = 1$ y se determina un valor adecuado para k_2 de forma que se minimice el índice de comportamiento. Entonces, escribiendo la Ecuación (11.41), se tiene

$$\mathbf{H}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{H} = -\mathbf{I},$$

y de forma expandida

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{11.46}$$

Efectuando la multiplicación y suma de la matriz, se tiene

$$\begin{aligned} -p_{12} - p_{12} &= -1, \\ p_{11} - k_2p_{12} - p_{22} &= 0, \\ p_{12} - k_2p_{22} + p_{12} - k_2p_{22} &= -1. \end{aligned} \tag{11.47}$$

Así, resolviendo estas ecuaciones simultáneas, se obtiene

$$p_{12} = \frac{1}{2}, \quad p_{22} = \frac{1}{k_2}, \quad p_{11} = \frac{k_2^2 + 2}{2k_2}.$$

El índice integral de comportamiento es entonces

$$J = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0), \tag{11.48}$$

y se considera el caso donde cada estado se desplaza inicialmente una unidad respecto del equilibrio, de forma que $\mathbf{x}^T(0) = [1, 1]$. Por tanto, la Ecuación (11.48) será

$$\begin{aligned} J &= [1 \quad 1]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad 1]\begin{bmatrix} (p_{11} + p_{12}) \\ (p_{12} + p_{22}) \end{bmatrix} \\ &= (p_{11} + p_{12}) + (p_{12} + p_{22}) = p_{11} + 2p_{12} + p_{22}. \end{aligned} \tag{11.49}$$

Sustituyendo los valores de los elementos de **P**, se tiene

$$J = \frac{k_2^2 + 2}{2k_2} + 1 + \frac{1}{k_2} = \frac{k_2^2 + 2k_2 + 4}{2k_2}. \tag{11.50}$$

Para minimizar en función de k_2, se toma la derivada respecto de k_2 y se hace igual a cero como sigue:

$$\frac{\partial J}{\partial k_2} = \frac{2k_2(2k_2 + 2) - 2(k_2^2 + 2k_2 + 4)}{(2k_2)^2} = 0. \tag{11.51}$$

y, por tanto, $k_2^2 = 4$ y $k_2 = 2$ cuando J es un mínimo. El valor mínimo de J se halla sustituyendo $k_2 = 2$ en la Ecuación (11.50). Por esto se obtiene

$$J_{\min} = 3.$$

La matriz del sistema, **H**, que se obtuvo para el sistema compensado, es entonces

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{11.52}$$

La ecuación característica del sistema compensado es, por tanto,

$$\det[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{H}] = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1. \tag{11.53}$$

Como éste es un sistema de segundo orden, se observa que la ecuación característica es de la forma $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ y, por tanto, la razón de amortiguamiento del sistema compensado es $\zeta = 1.0$. Se considera que este sistema es óptimo, pues da como resultado un valor mínimo para el índice de comportamiento. Por supuesto, este sistema solamente es óptimo para el conjunto específico de condiciones iniciales supuestas; en la Figura 11.16 se muestra el sistema compensado. En la Figura 11.17 se presenta una curva del índice de comportamiento en función de k_2. Es evidente que este sistema no es muy sensible a los cambios en k_2 y que mantendrá un índice de comportamiento casi mínimo si la k_2 se altera en algún porcentaje. Se define la sensibilidad de un sistema óptimo como

$$S_k^{\text{opt}} = \frac{\Delta J/J}{\Delta k/k}, \tag{11.54}$$

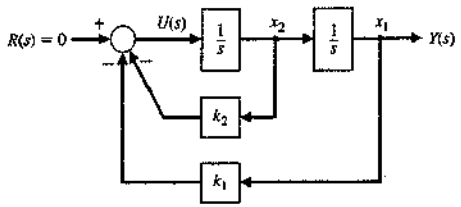


FIGURA 11.16. Sistema de control compensado del Ejemplo 11.11.

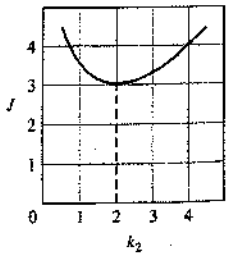


FIGURA 11.17. Índice de comportamiento frente al parámetro k_2.

donde k es el parámetro de diseño. Entonces, para este ejemplo, tenemos $k = k_2$ y, por tanto,

$$S_{k_2}^{\text{opt}} \simeq \frac{0.08/3}{0.5/2} = 0.107. \tag{11.55}$$ ■

EJEMPLO 11.12. Determinación de un sistema óptimo

Ahora se reconsidera el sistema del Ejemplo 11.11, donde no se especifican las ganancias de realimentación k_1 y k_2. Para simplificar el proceso algebraico sin ninguna pérdida de comprensión del problema, hacemos $k_1 = k_2 = k$. El lector puede probar que si k_1 y k_2 no se especifican, entonces $k_1 = k_2$ cuando se obtiene el mínimo del índice de (Ecuación 11.40). Así, para el sistema del Ejemplo 11.11, la Ecuación (11.45) se transforma en

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{H}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -k \end{bmatrix}\mathbf{x}. \tag{11.56}$$

Para determinar la matriz **P**, se utilizará la Ecuación (11.19), que es

$$\mathbf{H}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{H} = -\mathbf{I}. \tag{11.57}$$

Resolviendo el conjunto de ecuaciones simultáneas que resulta de la Ecuación (11.57), se sigue que

$$p_{12} = \frac{1}{2k}, \quad p_{22} = \frac{(k+1)}{2k^2} \quad \text{y} \quad p_{11} = \frac{(1+2k)}{2k}.$$

Se considera el caso en el que el sistema se desplaza inicialmente una unidad respecto del equilibrio, de forma que $\mathbf{x}^T(0) = [1, 0]$. Entonces el índice de comportamiento (Ecuación 11.40) será

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{x}\,dt = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) = p_{11}. \tag{11.58}$$

Por esto, el índice de comportamiento que se minimiza es

$$J = p_{11} = \frac{(1+2k)}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}. \tag{11.59}$$

Evidentemente, el valor mínimo de J se obtiene cuando k se aproxima al infinito; el resultado es $J_{\min} = 1$. En la Figura 11.18 se muestra una representación gráfica de J frente

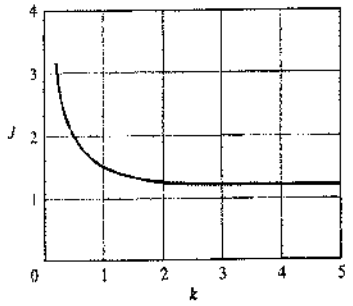


FIGURA 11.18 Índice de comportamiento frente a la ganancia de realimentación k para el Ejemplo 11.12.

a k, la cual ilustra que el índice de comportamiento se aproxima asintóticamente a un mínimo cuando k se aproxima a un valor infinito. Ahora se observa que proporcionando una ganancia k muy alta, se consigue que la señal de realimentación

$$u(t) = -k[x_1(t) + x_2(t)]$$

sea muy grande. Sin embargo, existen restricciones sobre las magnitudes realizables de la señal de control $u(t)$. Por tanto, se debe introducir una restricción sobre $u(t)$ de forma que la ganancia k no se haga demasiado grande. Entonces, por ejemplo, si se establece una restricción sobre $u(t)$ de forma que

$$|u(t)| \leqslant 50, \tag{11.60}$$

se necesita que el valor máximo aceptable de k sea en este caso

$$k_{max} = \frac{|u|_{max}}{x_1(0)} = 50. \tag{11.61}$$

Entonces el valor mínimo de J es

$$J_{min} = 1 + \frac{1}{2k_{max}} = 1.01, \tag{11.62}$$

que es suficientemente próximo al mínimo absoluto de J para satisfacer nuestros requisitos.

Examinando el índice de comportamiento (Ecuación 1.35), se sigue que la magnitud de la señal de control no se tiene en cuenta en los cálculos originales, debido a que $u(t)$ no se incluye dentro de la expresión para el índice de comportamiento. Sin embargo, hay muchos casos en los que interesa el gasto energético de la señal de control. Por ejemplo, en un sistema de control de posición de un vehículo espacial, $[u(t)]^2$ representa el gasto energético de combustible y debe restringirse para conservar la energía combustible durante largos periodos de vuelo. Para tener en cuenta el gasto energético de la señal de control, se utilizará el índice de comportamiento

$$\boxed{J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{I}\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}^T\mathbf{u})\,dt,} \tag{11.63}$$

donde λ es un factor escalar de valoración e $\mathbf{I}$ = matriz identidad. El factor de valoración λ se escogerá de forma que la importancia relativa del comportamiento de las variables de estado contraste con la importancia del gasto de la fuente energética del sistema, el cual se representa por $\mathbf{u}^T\mathbf{u}$. Como en párrafos anteriores, se representará la realimentación de las variables de estado por la ecuación matricial

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \tag{11.64}$$

y el sistema con esta realimentación de las variables de estado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{x}. \tag{11.65}$$

Ahora bien, sustituyendo la Ecuación (11.64) en la (11.63), se tiene

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{I}\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{K}\mathbf{x})^T(\mathbf{K}\mathbf{x}))\,dt \\ &= \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(\mathbf{I} + \lambda\mathbf{K}^T\mathbf{K})\mathbf{x}]\,dt = \int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}\,dt, \end{aligned} \tag{11.66}$$

donde $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} + \lambda\mathbf{K}^T\mathbf{K})$ es una matriz de $n \times n$. Siguiendo el desarrollo de las Ecuaciones (11.35) hasta (11.39), se postula la existencia de una diferencial exacta de forma que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}. \tag{11.67}$$

Entonces, en este caso se necesita que

$$\mathbf{H}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{H} = -\mathbf{Q}, \tag{11.68}$$

y así se tiene, como antes (Ecuación 11.39),

$$J = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0). \tag{11.69}$$

Los pasos de diseño son ahora análogos a los de las Ecuaciones (11.40) y (11.41), con la excepción de que la parte izquierda de la Ecuación (11.68) es igual a $-\mathbf{Q}$ en lugar de $-\mathbf{I}$. Por supuesto, si $\lambda = 0$, la Ecuación (11.68) se reduce a la (11.41). Ahora bien, se va a reconsiderar el ejemplo anterior cuando λ es diferente de cero y representa el gasto energético de la señal de control. ■

EJEMPLO 11.13. Sistema óptimo con consideraciones de control de energía

Se reconsidera el sistema del Ejemplo 11.11 que se muestra en la Figura 11.11. Para este sistema, se utiliza una realimentación de las variables de estado de forma que

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = [-k \quad -k]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -k\mathbf{x}. \tag{11.70}$$

Por tanto, la matriz

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I} + \lambda\mathbf{K}^T\mathbf{K}) = \begin{bmatrix} 1 + \lambda k^2 & \lambda k^2 \\ \lambda k^2 & 1 + \lambda k^2 \end{bmatrix}. \tag{11.71}$$

Como en el Ejemplo 11.12, se hace $\mathbf{x}^T(0) = [1, 0]$ de forma que $J = p_{11}$. Se calcula p_{11} por la Ecuación (11.68) como

$$\mathbf{H}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{H} = -\mathbf{Q}. \tag{11.72}$$

Por esto, se sigue que

$$J = p_{11} = (1 + \lambda k^2)\left(1 + \frac{1}{2k}\right) - \lambda k^2, \tag{11.73}$$

y se observa que la parte derecha de la Ecuación (11.73) se reduce a la Ecuación (11.59) cuando $\lambda = 0$. Ahora el mínimo de J se encuentra tomando la derivada de J, que es

$$\frac{dJ}{dk} = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{k^2}\right) = 0. \tag{11.74}$$

Por tanto, el mínimo del índice de comportamiento se presenta cuando $k = k_{min}$, donde k_{min} es la solución de la Ecuación (11.74).

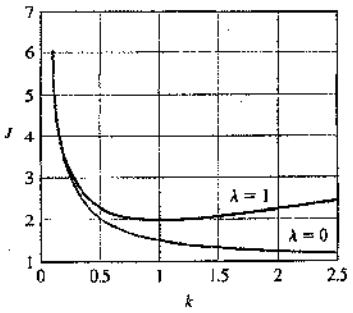


FIGURA 11.19
Índice de comportamiento frente a la ganancia de realimentación k para el Ejemplo 11.13.

Se completa este ejemplo para el caso en que la energía de control y los cuadrados de las variables de estado son igualmente importantes, de tal forma que $\lambda = 1$. Entonces la Ecuación (11.74) se satisface cuando $k^2 - 1 = 0$, y se sigue que $k_{min} = 1.0$. El valor del índice de comportamiento J que se obtiene con k_{min} es considerablemente mayor que el del ejemplo anterior, pues el gasto energético es igualmente valorado como un costo. La representación gráfica de J frente a k para este caso se muestra en la Figura 11.19. También la representación gráfica de J frente a k para el Ejemplo 11.12 se muestra, con fines de comparación, en la Figura 11.19. ■

Según este ejemplo y los anteriores, es claro que el mínimo real obtenido depende de las condiciones iniciales, de la definición del índice de comportamiento y del valor del factor escalar λ.

El diseño de varios parámetros puede efectuarse en forma semejante a la ilustrada en los ejemplos. Además, el procedimiento de diseño puede llevarse a cabo en sistemas de orden mayor. Pero entonces debemos considerar el uso de un computador digital para determinar la solución de la Ecuación (11.41) con el objeto de obtener la matriz **P**. Así mismo, el computador proporcionaría un enfoque adecuado para calcular el valor mínimo de J para uno o más parámetros. Sin embargo, la solución de la Ecuación (11.68) puede ser complicada, especialmente cuando el orden del sistema es bastante alto ($n > 3$). Un método alternativo apropiado para el cálculo mediante computador se muestra sin probarlo en el párrafo siguiente.

Se considera un sistema de una entrada-una salida sin compensar con

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

y realimentación

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]\mathbf{x}.$$

El índice de comportamiento es

$$\boxed{J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + Ru^2)\,dt,}$$

donde R es el factor de peso escalar. Este índice se minimiza cuando

$$\mathbf{K} = R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}.$$

La matriz **P** de dimensión $n \times n$ se determina como la solución de la ecuación

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \tag{11.75}$$

La Ecuación (11.75) puede programarse fácilmente utilizando un computador, o resolverse utilizando MATLAB. La Ecuación (11.75) se denomina ecuación de Riccati. Este control óptimo se conoce como **regulador lineal cuadrático** (LQR) [11, 22].

11.10. DISEÑO CON MODELO INTERNO

En esta sección se considera el problema de diseñar un compensador que proporcione seguimiento asintótico de una entrada de referencia con error nulo en estado estacionario. Las entradas de referencia que se consideran pueden ser escalones, rampas y otras señales persistentes, tales como sinusoides. Para una entrada escalón, los errores de seguimiento nulos en estado estacionario se pueden conseguir con un sistema de tipo uno. La idea se formaliza introduciendo un **modelo interno** de la entrada de referencia en el compensador [5, 20].

Se considera el modelo de la planta en variables de estado dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad y = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{11.76}$$

donde **x** es el vector de estado, u es la entrada e y es la salida. Se considerarán las entradas de referencia generadas por sistemas lineales de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r, \quad r = \mathbf{d}_r\mathbf{x}_r, \tag{11.77}$$

con condiciones iniciales desconocidas. Un modelo equivalente de la entrada de referencia, $r(t)$, es

$$r^{(n)} = \alpha_{n-1}r^{(n-1)} + \alpha_{n-2}r^{(n-2)} + \cdots + \alpha_1\dot{r} + \alpha_0 r, \tag{11.78}$$

donde $r^{(n)}$ es la n-ésima derivada de $r(t)$.

Se comienza considerando un problema de diseño familiar, el diseño de un controlador que permita el seguimiento de una entrada de referencia escalón con error estacionario nulo. En este caso, la entrada de referencia se genera mediante

$$\dot{x}_r = 0, \quad r = x_r, \tag{11.79}$$

o, de forma equivalente,

$$\dot{r} = 0, \tag{11.80}$$

y el error de seguimiento, e, se define como

$$e = y - r.$$

Tomando la derivada temporal se obtiene

$$\dot{e} = \dot{y} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}},$$

donde se ha utilizado el modelo de entrada de referencia de la Ecuación (11.80) y el modelo de la planta de la Ecuación (11.76). Si se definen las dos variables intermedias

$$\mathbf{z} = \dot{\mathbf{x}} \quad \text{y} \quad w = \dot{u},$$

se tiene

$$\begin{pmatrix}\dot{e}\\ \dot{\mathbf{z}}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{A}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}e\\ \mathbf{z}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}w. \tag{11.81}$$

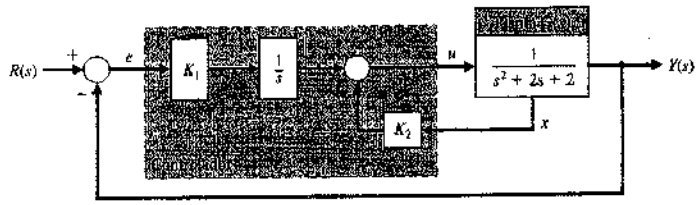


FIGURA 11.20
Diseño de modelo interno para una entrada escalón.

Si el sistema de la Ecuación (11.81) es controlable, se puede encontrar una realimentación de la forma

$$w = -K_1 e - \mathbf{K}_2 \mathbf{z} \tag{11.82}$$

de manera que la Ecuación (11.81) sea estable. Esto implica que el error de seguimiento e es estable; por lo tanto, se habrá logrado el objetivo de seguimiento asintótico con error estacionario nulo. La entrada de control, que se determina integrando la Ecuación (11.82), es

$$u(t) = -K_1 \int_0^t e(\tau)\, d\tau - \mathbf{K}_2 \mathbf{x}(t).$$

El diagrama de bloques correspondiente se muestra en la Figura 11.20. Se observa que el compensador incluye un **modelo interno** (esto es, un integrador) de la entrada de referencia escalón.

EJEMPLO 11.14. Diseño de modelo interno para una entrada escalón unidad

Se considera la planta dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0]\mathbf{x}. \tag{11.83}$$

Se pretende diseñar un controlador para este sistema de manera que siga la entrada de referencia escalón con un error nulo en estado estacionario. A partir de la Ecuación (11.81), se tiene

$$\begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w. \tag{11.84}$$

Si se comprueba la controlabilidad se observa que la Ecuación (11.84) es completamente controlable. Si

$$K_1 = 20, \quad \mathbf{K}_2 = [20 \quad 10],$$

las raíces de la ecuación característica de la Ecuación (11.84) se sitúan en $s = -1 \pm j$, -10. Con w dada por la Ecuación (11.82), se tiene que la Ecuación (11.84) es asintóticamente estable. Por lo tanto, para cualquier error de seguimiento inicial, $e(0)$, se garantiza que $e(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. En la Figura 11.21 se muestra la estabilidad asintótica del error de seguimiento para una entrada escalón. ■

Se considera el modelo de diagrama de bloques de la Figura 11.20, donde la planta se representa mediante $G(s)$, y el controlador en cascada es $G_c(s) = K_1/s$. El **principio del modelo interno** establece que si $G(s)G_c(s)$ contiene $R(s)$, entonces $y(t)$ seguirá a $r(t)$ de forma asintótica. En este caso $R(s) = 1/s$, que está contenida en $G(s)G_c(s)$, como era de esperar.

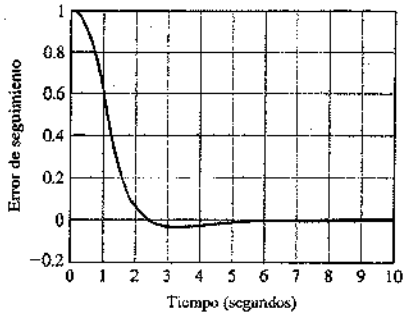


FIGURA 11.21
Diseño del modelo interno de la respuesta a un error de seguimiento inicial para una entrada escalón unidad.

Se considera el problema de diseñar un controlador para proporcionar un seguimiento asintótico de una entrada rampa con error nulo en estado estacionario, $r(t) = Mt$, $t \geqslant 0$, donde M es la magnitud de la rampa. En este caso el modelo de referencia es

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_r$$

$$r = \mathbf{d}_r \mathbf{x}_r = [1 \quad 0]\mathbf{x}_r. \tag{11.85}$$

En forma de entrada-salida, el modelo de referencia de la Ecuación (11.85) está dado por

$$\dddot{r} = 0.$$

Procediendo de igual forma que antes, se define el error de seguimiento como

$$e = y - r,$$

y tomando la derivada temporal **dos veces** se obtiene

$$\ddot{e} = \dddot{y} = \mathbf{C}\dddot{\mathbf{x}}.$$

Con las definiciones

$$\mathbf{z} = \ddot{\mathbf{x}}, \quad w = \dddot{u},$$

se tiene

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{e}} \\ \ddot{e} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C} \\ 0 & 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \dot{e} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} w. \tag{11.86}$$

Por lo tanto, si la Ecuación (11.86) es controlable, entonces se puede calcular K_i, $i = 1$, 2, 3, de manera que con

$$w = -[K_1 \quad K_2 \quad \mathbf{K}_3] \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \tag{11.87}$$

el sistema representado mediante la Ecuación (11.86) es asintóticamente estable; por lo tanto, el error de seguimiento $e(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, como se quería conseguir. El control, u, se determina integrando la Ecuación (11.87) dos veces. En la Figura 11.22, se observa que el controlador resultante tiene un doble integrador, que es el **modelo interno** a la entrada referencia rampa.

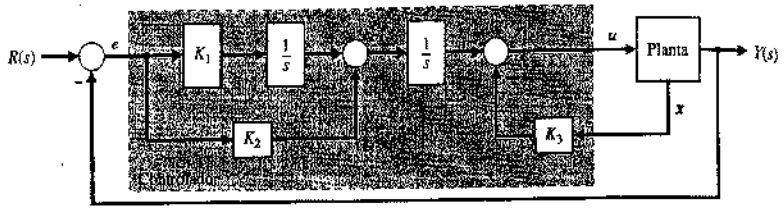


FIGURA 11.22
Diseño del modelo interno para una entrada rampa. Obsérvese que $G(s)G_c(s)$ contiene $(1/s^2)$, la entrada de referencia $R(s)$.

La aproximación de modelo interno se puede extender a otras entradas de referencia siguiendo el mismo procedimiento general desarrollado para las entradas escalón y rampa. Además, se puede utilizar el diseño del modelo interno para rechazar perturbaciones persistentes incluyendo modelos de perturbaciones en el compensador.

11.11. EJEMPLO DE DISEÑO: SISTEMA DE VERIFICACIÓN AUTOMÁTICO

Como se muestra en la Figura 11.23, un sistema de inspección y testeo automático utiliza un motor de cc para mover un conjunto de prueba. La baja capacidad de producción y un elevado grado de error son posibles debido a la comprobación manual de diferentes paneles de interruptores, relés e indicadores luminosos. La automatización de la verificación con un controlador requiere situar una toma a través de los cables de una parte y comprobar la continuidad, resistencia o funcionalidad [19]. El sistema utiliza un motor de cc con un disco codificado para medir la posición y la velocidad, como se muestra en la Figura.11.24. En la Figura 11.25 se pueden observar los parámetros del sistema, donde K representa la amplificación de potencia requerida.

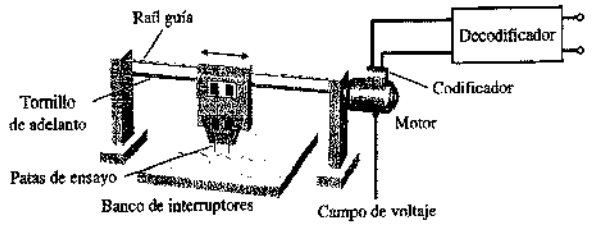


FIGURA 11.23
Sistema de verificación automático.

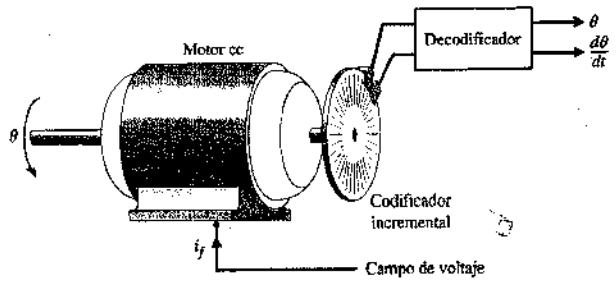


FIGURA 11.24
Un motor de cc con una rueda de codificación montada.

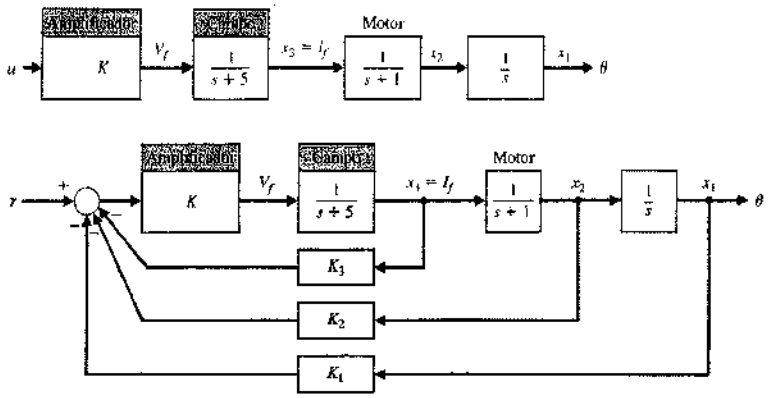


FIGURA 11.25
Diagrama de bloques en lazo abierto del motor de cc con una rueda de codificación montada.

FIGURA 11.26
Diagrama de bloques en lazo cerrado del motor de cc.

Como se muestra en la Figura 11.25, se seleccionan las variables de estado como $x_1 = \theta$, $x_2 = d\theta/dt$ y $x_3 = i_f$. La realimentación de las variables de estado está disponible, y se puede seleccionar

$$u = [-K_1 \quad -K_2 \quad -K_3]\mathbf{x} + r$$

o

$$u = -K_1x_1 - K_2x_2 - K_3x_3 + r, \tag{11.88}$$

como se muestra en la Figura 11.26. El objetivo consiste en seleccionar las ganancias de forma que la respuesta frente a un escalón presente un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 2 segundos y una sobreelongación menor que el 4.0%.

Para lograr una posición de salida precisa, se selecciona $K_1 = 1$ y se determina K, K_2 y K_3. La ecuación característica del sistema se puede obtener de distintas formas.

El modelo en variables de estado asociado con la Figura 11.25 está dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}u,$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x}. \tag{11.89}$$

Sumando u, tal como se define en la Ecuación (11.88), se tiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -K & -KK_2 & -(5 + K_3K) \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}r \tag{11.90}$$

cuando $K_1 = 1$. La ecuación característica se puede obtener a partir de la Ecuación (11.90) como

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ K & KK_2 & s + (5 + K_3K) \end{bmatrix} = 0$$

de donde resulta

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K_3Ks^2 + K_3Ks + KK_2s + K = 0.$$

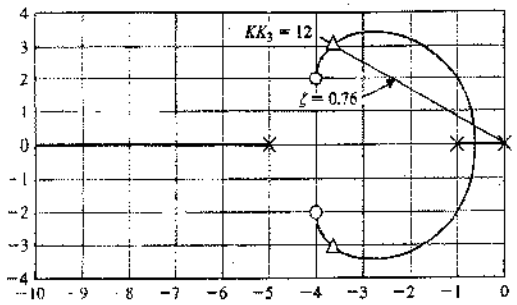


FIGURA 11.27
Lugar de las raíces para el sistema de verificación automático.

Así, se puede dibujar el lugar de las raíces para K_3K como

$$1 + \frac{KK_3(s^2 + as + b)}{s(s + 1)(s + 5)} = 0, \tag{11.91}$$

donde a y b son

$$a = (K_2 + K_3)/K_3$$

y

$$b = 1/K_3.$$

Suponiendo que $K_1 = 1$ y que $a = 8$ y $b = 20$, los ceros se sitúan en $s = -4 \pm j2$ para acercar el lugar al lado izquierdo del plano s. Entonces

$$\frac{K_2 + K_3}{K_3} = 8 \quad \text{y} \quad \frac{1}{K_3} = 20.$$

Por lo tanto, $K_1 = 1$, $K_2 = 0.35$ y $K_3 = 0.05$. En la Figura 11.27 se muestra un dibujo del lugar de las raíces. Cuando $KK_3 = 12$, las raíces están sobre la línea $\zeta = 0.76$, como se observa en la Figura 11.27. Como $K_3 = 0.05$, se tiene $K = 240$. Las raíces en $K = 240$ son

$$s = -10.62 \qquad \text{y} \qquad s = -3.69 \pm j3.00.$$

La respuesta frente a un escalón de este sistema se muestra en la Figura 11.28. La sobreelongación es del 3%, y el tiempo de asentamiento es de 1.8 segundos. Por lo tanto, el diseño es bastante aceptable.

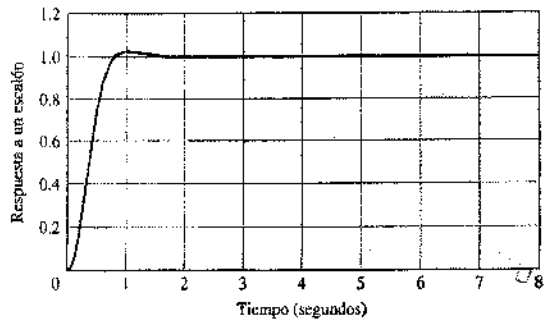


FIGURA 11.28
Respuesta a un escalón del sistema de verificación automático.

11.12. DISEÑO CON VARIABLES DE ESTADO UTILIZANDO MATLAB

Se puede comprobar la controlabilidad y la observabilidad de un sistema realimentado en variables de estado utilizando las funciones de MATLAB ctrb y obsv, respectivamente. Como se muestra en la Figura 11.29, la entradas a la función ctrb son las matriz del sistema **A** y la matriz de entrada **B**; la salida de ctrb es la matriz de controlabilidad $\mathbf{P}_c$. Análogamente, la entrada a la función obsv, que se muestra en la Figura 11.29, es la matriz del sistema **A** y la matriz de salida **C**; la salida de obsv es la matriz de observabilidad $\mathbf{P}_o$.

Obsérvese que la matriz de controlabilidad, $\mathbf{P}_c$, es una función exclusivamente de **A** y de **B**, mientras que la matriz de observabilidad, $\mathbf{P}_o$, es una función sólo de **A** y de **C**.

EJEMPLO 11.15. Control de la trayectoria de un satélite

Se considera un satélite como el que se ilustra en la Figura 11.30, en una órbita circular, ecuatorial a una altitud de 250 millas naúticas sobre la Tierra [16, 27]. El movimiento del satélite (en la órbita plana) viene descrito por el modelo en variables de estado normalizado

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_t, \tag{11.92}$$

donde el vector de estados **x** representa las perturbaciones normalizadas desde la órbita circular ecuatorial; u_r es la entrada desde un motor radial; u_t es la entrada desde un

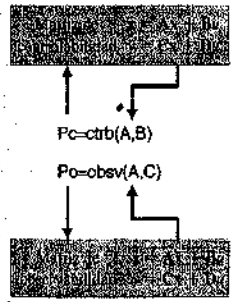


FIGURA 11.29
Funciones ctrb y obsv.

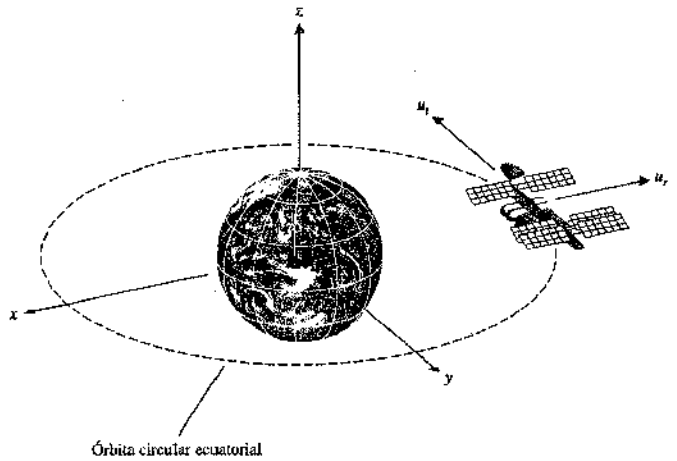


FIGURA 11.30. El satélite en la órbita circular ecuatorial.

radial.m

```
% Este código calcula la controlabilidad del satélite que sólo posee
% un motor radial (i.e. si falla el motor tangencial)
%
w=0.0011;
A=[0 1 0 0;3*w^2 0 0 2*w;0 0 0 1;0 -2*w 0 0];
b1=[0;1;0;0];
Pc=ctrb(A,b1);
n=det(Pc);
if abs(n) < eps
 disp('El satélite no es controlable si sólo posee motor radial')
else
 disp('El satélite es controlable si sólo posee motor radial')
end
```

(a)

```
>>radial
El satélite no es controlable si sólo posee motor radial
```

(b)

FIGURA 11.31. Controlabilidad únicamente con motores radiales: (a) código MATLAB, (b) salida de MATLAB.

motor tangencial, y $\omega = 0.0011$ rad/s (aproximadamente una órbita de 90 minutos) es la velocidad orbital para el satélite a una altitud dada. En ausencia de perturbaciones, el satélite permanecerá en la órbita nominal circular ecuatorial. Sin embargo, perturbaciones como la resistencia aerodinámica pueden ocasionar que el satélite se desvíe del camino nominal. El problema consiste en diseñar un controlador que dirija a los motores del satélite de forma que la órbita real permanezca cerca de la órbita circular deseada. Antes de comenzar con el diseño, se comprueba la controlabilidad. En este caso, se investiga la controlabilidad utilizando los motores radiales y tangenciales de manera independiente.

Se supone que el motor tangencial falla (es decir, $u_t = 0$) y que únicamente el motor radial está operativo. ¿Es controlable el satélite sólo con u_r? Se va a responder a esta pregunta utilizando MATLAB para determinar la controlabilidad. Si se utiliza el código que se muestra en la Figura 11.31, se observa que el determinante de $\mathbf{P}_c$ es cero; por lo tanto, el satélite no es completamente controlable cuando el motor tangencial falla.

Se supone ahora que el motor radial falla (es decir, $u_r = 0$) y que el motor tangencial funciona de forma adecuada. ¿Es controlable el satélite sólo con u_t? Si se utiliza el código de la Figura 11.32, se observa que el satélite es completamente controlable si se utiliza únicamente el motor tangencial. ■

Se concluye esta sección con el diseño de un controlador para un sistema automático de prueba utilizando modelos en variables de estado. La aproximación de diseño utiliza los métodos del lugar de las raíces e incorpora códigos en MATLAB como ayuda del procedimiento.

tangent.m

```
% Este código calcula la controlabilidad del satélite que sólo posee
% un motor radial (i.e. si falla el motor radial)
%
w=0.0011;
A=[0 1 0 0;3*w^2 0 0 2*w;0 0 0 1;0 -2*w 0 0];
b2=[0;0;0;1];
Pc=ctrb(A,b2);
n=det(Pc);
if abs(n) < eps
 disp('El satélite no es controlable si sólo posee motor tangencial')
else
 disp('El satélite es controlable si sólo posee motor tangencial')
end
```

(a)

```
>>tangent
El satélite es controlable si sólo posee motor tangencial
```

(b)

FIGURA 11.32. Controlabilidad únicamente con motores radiales: (a) código MATLAB, (b) salida de MATLAB.

EJEMPLO 11.16. Sistema de prueba automático

La representación en el espacio de estados para un sistema de prueba automático es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \tag{11.93}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}.$$

Las especificaciones de diseño son una respuesta a un escalón con (1) un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 2 segundos y (2) una sobreelongación menor que el 4%. Se supone que las variables de estado están disponibles para realimentación, de manera que el control está dado por

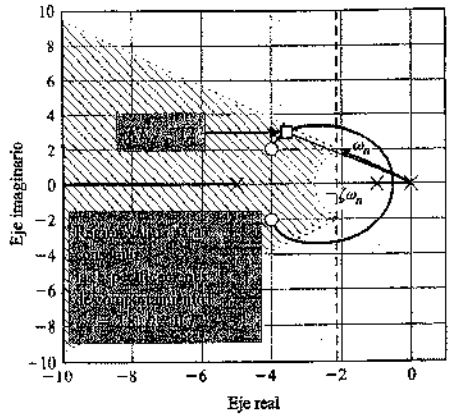
$$u = -(K_1 \quad K_2 \quad K_3)\mathbf{x} + r = -\mathbf{K}\mathbf{x} + r. \tag{11.94}$$

Se deben seleccionar las ganancias K, K_1, K_2 y K_3 para conseguir las especificaciones deseadas. Si se utilizan las aproximaciones de diseño

$$T_s \simeq \frac{4}{\zeta\omega_n} < 2 \quad \text{y} \quad \text{P.O.} \simeq 100\exp^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} < 4,$$

entonces

$$\zeta > 0.72 \quad \text{y} \quad \omega_n > 2.8.$$



(a)

```
% Código del lugar de las raíces para el sistema de verificación
% automático que incluye las regiones de especificación de comportamiento
num=[1 8 20]; den=[1 6 5 0]; sys=tf(num,den);
clf; rlocus(sys); hold on
%
zeta=0.72; wn=2.8;
x=[-10:0.1:-zeta*wn]; y=-(sqrt(1-zeta^2)/zeta)*x;
xc=[-10:0.1:-zeta*wn];c=sqrt(wn^2-xc.^2);
plot(x,y,':',x,-y,':',xc,c,':',xc,-c,':')
```

(b)

FIGURA 11.33
(a) Lugar de las raíces para el sistema de verificación automático.
(b) Código MATLAB.

Como se muestra en la Figura 11.33, esto define una región en el plano complejo en la que se deben encontrar las raíces dominantes, de manera que se puedan conseguir las especificaciones de diseño. Si se sustituye la Ecuación (11.94) en la Ecuación (11.93) se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -KK_1 & -KK_2 & -5 + KK_3) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} r = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{B}r, \qquad (11.95)$$

donde $\mathbf{H} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$. La ecuación característica asociada con la Ecuación (11.95) se puede obtener si se evalúa $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{H}) = 0$, y resulta

$$s(s+1)(s+5) + KK_3\left(s^2 + \frac{K_3 + K_2}{K_3}s + \frac{K_1}{K_3}\right) = 0. \qquad (11.96)$$

Si se toma KK_3 como un parámetro y si $K_1 = 1$, entonces se puede escribir la Ecuación (11.96) como

$$1 + KK_3 \frac{\left(s^2 + \dfrac{K_3 + K_2}{K_3}s + \dfrac{1}{K_3}\right)}{s(s+1)(s+5)} = 0.$$

Se sitúan los ceros en $s = -4 \pm 2j$ para ubicar el lugar de las raíces en el lado izquierdo del plano s. Por lo tanto, el polinomio numerador deseado es $s^2 + 8s + 20$. Si se comparan los coeficientes correspondientes se obtiene

$$\frac{K_3 + K_2}{K_3} = 8 \quad \text{y} \quad \frac{1}{K_3} = 20.$$

Por tanto, $K_2 = 0.35$ y $K_3 = 0.05$. Ahora se puede dibujar el lugar de las raíces con KK_3 como parámetro, tal y como se muestra en la Figura 11.33.

La ecuación característica, Ecuación (11.96), es

$$1 + KK_3 \frac{s^2 + 8s + 20}{s(s+1)(s+5)} = 0.$$

Como se muestra en la Figura 11.33, las raíces para la ganancia seleccionada, $KK_3 = 12$, se encuentran en la región de comportamiento. La función rlocfind se utiliza para determinar el valor de KK_3 para el punto seleccionado. Las ganancias finales son las siguientes:

$$K = 240.00,$$
$$K_1 = 1.00,$$
$$K_2 = 0.35,$$
$$K_3 = 0.05.$$

Como se muestra en la Figura 11.34, del diseño del controlador resulta un tiempo de asentamiento aproximado de 1.8 segundos y una sobreelongación del 3%. ■

En la Sección 11.5 se presentó la fórmula de Ackermann para colocar los polos del sistema en las posiciones deseadas. MATLAB dispone de una función denominada acker que calcula la matriz de ganancias **K** para situar los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas. En la Figura 11.35 se ilustra la función acker.

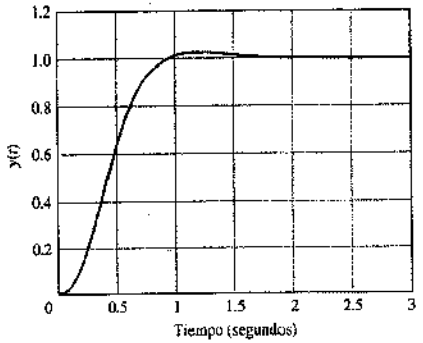


FIGURA 11.34
Respuesta a un escalón para el sistema automático de verificación.

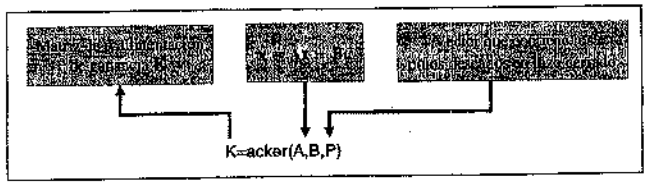


FIGURA 11.35
La función acker.

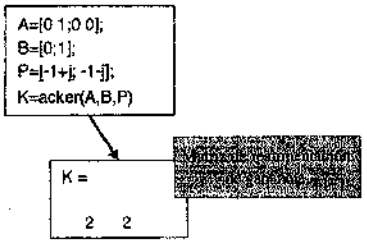


FIGURA 11.36
Empleo de acker para calcular K para situar los polos en $\mathbf{P} = [-1 + j \quad -1 - j]^T$.

EJEMPLO 11.17. Diseño de un sistema de segundo orden utilizando la función acker

Se considera de nuevo el sistema de segundo orden del Ejemplo 11.7. El modelo del sistema es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u.$$

Las situaciones deseadas de los polos en lazo cerrado son $s_{1,2} = -1 \pm j$. Para aplicar la fórmula de Ackermann utilizando la función acker, se forma el vector

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 + j \\ -1 - j \end{bmatrix}.$$

Entonces, con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

la fórmula acker, que se ilustra en la Figura 11.36, determina la matriz de ganancia que logra las posiciones deseadas para los polos, y es

$$\mathbf{K} = [2 \quad 2].$$

Esto confirma el resultado del Ejemplo 11.7. ■

EJEMPLO 11.18. Simulación en el espacio de estados utilizando Simulink

Se considera el sistema dado en variables de estado de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

En la simulación en Simulink, se deseará utilizar la realimentación de estados completa, lo que significa que se necesita que el vector de estados entero (en este caso x_1 y x_2) esté disponible para realimentación. Una forma de lograr esto consiste en elegir las matrices de salida C y D de manera que $\mathbf{y} = \mathbf{x}$; así,

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u,$$

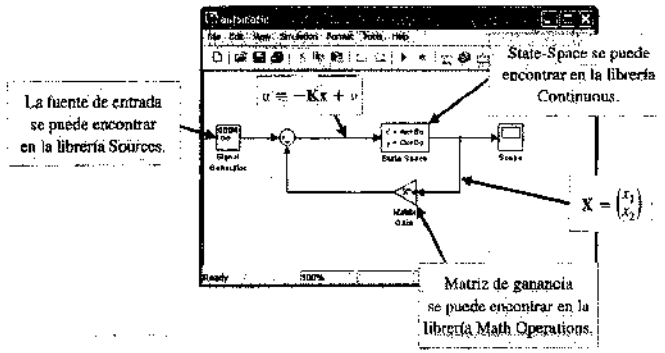

La fuente de entrada se puede encontrar en la librería Sources.
State-Space se puede encontrar en la librería Continuous.
$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + v$
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
Matriz de ganancia se puede encontrar en la librería Math Operations.

FIGURA 11.37
Diagrama de bloques en Simulink para un modelo de sistema en el espacio de estados con realimentación de estados completa.

donde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La ley de control de realimentación de estados completos es

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + v,$$

donde v es la entrada de referencia. El diagrama de bloques en Simulink del sistema en lazo cerrado se muestra en la Figura 11.37. La entrada de referencia la proporciona el bloque Generador de Señales.

Las salidas del bloque de espacio de estados son los dos estados x_1 y x_2. Estos dos estados son realimentados al bloque de la matriz de realimentación de ganancia para obtener las señales de realimentación $\mathbf{K}\mathbf{x}$. La señal de entrada de referencia v se suma (negativamente) con la señal de realimentación formando la señal de entrada a la planta $u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + v$.

Se puede ajustar la señal de entrada de referencia, como se muestra en la Figura 11.38. En el caso que se presenta, la señal de referencia es una onda sinusoidal. Otras entradas de referencia comunes son la onda cuadrada, el diente de sierra y las señales aleatorias.

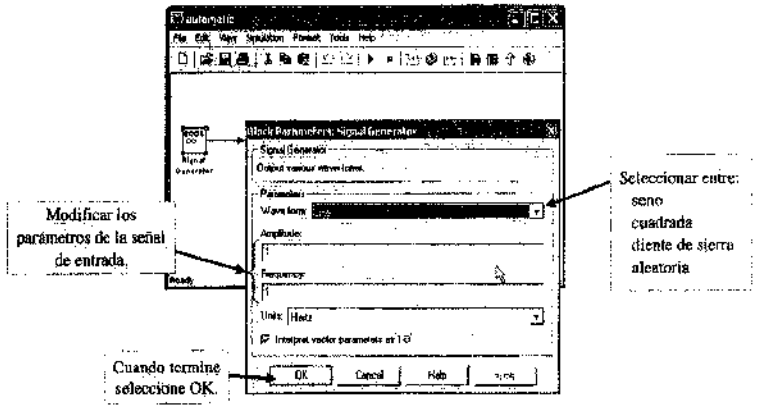


FIGURA 11.38
Selección de la entrada de referencia utilizando la ventana emergente del bloque Signal Generator.

La matriz de ganancia **K** y las matrices del sistema **A**, **B**, **C** y **D** se fijan utilizando las ventanas emergentes asociadas, como se ilustra en las Figuras 11.39 y 11.40. La matriz de realimentación de ganancia se selecciona como

$$\mathbf{K} = [1 \quad 1].$$

Ésta sitúa a los polos en lazo cerrado (esto es, los autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$) en $s_1 = -1$ y $s_2 = -3$. El uso de Simulink permite acceder fácilmente a la matriz de realimentación de ganancia de manera que el estudio de la realimentación utilizando conjuntos de ganancias realimentadas que varían se puede llevar a cabo inmediatamente.

Obsérvese en la Figura 11.40 que las condiciones iniciales son entradas. En la simulación que se presenta aquí, las condiciones iniciales escogidas son

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} s_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

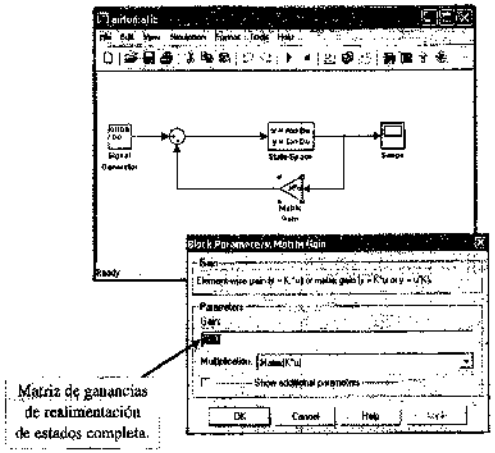


FIGURA 11.39
Incorporación de la matriz de ganancia de realimentación en el diagrama de bloques de la simulación.

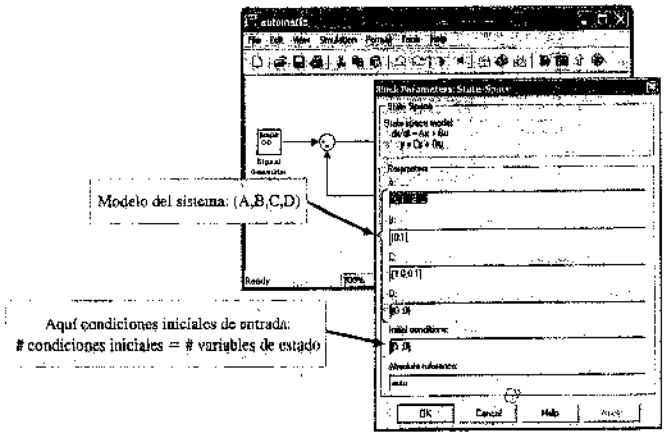


FIGURA 11.40
Definición del modelo en variables de estado mediante las matrices, **A**, **B**, **C** y **D**.

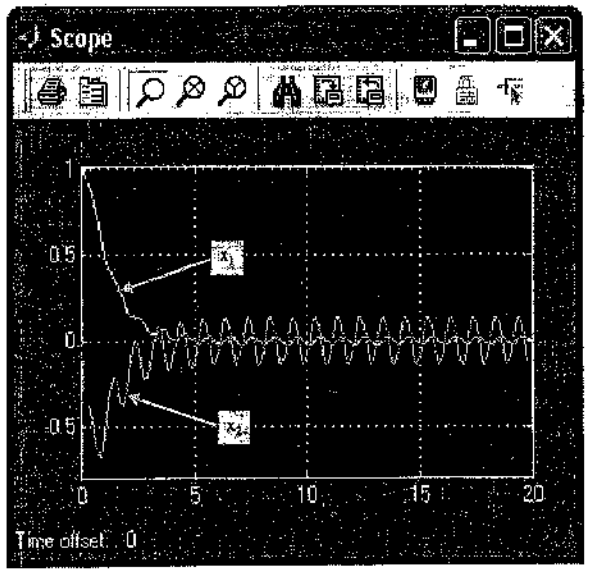


FIGURA 11.41
El resultado de la simulación muestra la historia de las variables de estado.

Una vez que se han definido todos los parámetros, se puede inicializar la simulación (*véanse* el Apéndice B y el Capítulo 5 para obtener más información sobre cómo comenzar una simulación y sobre cómo fijar los parámetros de ésta). En la Figura 11.41 se muestran en variables de estados las historias temporales que resultan. ■

11.13. EJEMPLO DE DISEÑO SECUENCIAL: SISTEMA DE LECTURA DE UNA UNIDAD DE DISCO

En este capítulo, se diseñará un sistema realimentado en variables de estado que consiga la respuesta deseada del sistema. En la Tabla 11.1 se muestran las especificaciones para el sistema. En la Figura 11.42 se presenta el modelo de segundo orden en lazo abierto. Se diseñará el sistema para este modelo de segundo orden y después se comprobará la respuesta del sistema tanto para el modelo de segundo orden como para el de tercer orden.

Tabla 11.1 Especificaciones para el sistema de control de una unidad de disco y comportamiento real

Medida del comportamiento	Valor deseado	Respuesta para un modelo de segundo orden	Respuesta para un modelo de tercer orden
Tanto por ciento de sobreelongación	<5%	<1%	0%
Tiempo de asentamiento	<50 ms	34.3 ms	34.2 ms
Máxima respuesta para una perturbación escalón unidad	$<5 \times 10^{-3}$	5.2×10^{-5}	5.2×10^{-5}

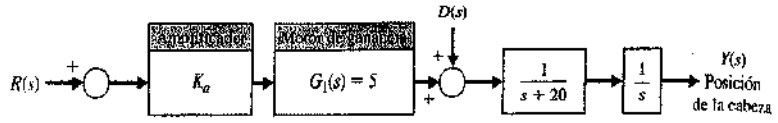


FIGURA 11.42
Modelo en lazo abierto del sistema de control de la cabeza.

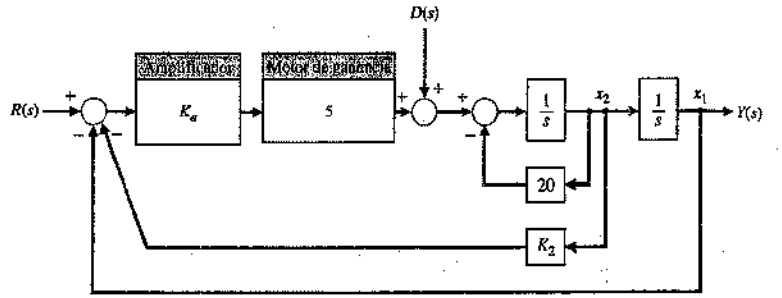


FIGURA 11.43
Sistema en lazo cerrado con realimentación de dos variables de estado.

En primer lugar se seleccionan las dos variables de estado como $x_1(t) = y(t)$ y $x_2(t) = dy/dt = dx_1/dt$, como se muestra en la Figura 11.43. Es práctico medir estas variables como la posición y la velocidad de la cabeza lectora. A continuación, como se muestra en la Figura 11.43, se añaden estas variables a la realimentación. Se selecciona $K_1 = 1$, puesto que el objetivo es que $y(t)$ se mantenga próxima y que siga con precisión a $r(t)$. La ecuación diferencial en variables de estado para el sistema en lazo abierto es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5K_a \end{bmatrix} r(t).$$

A partir de la Figura 11.43 se obtiene la ecuación diferencial del lazo cerrado en variables de estado siguiente

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5K_1K_a & -(20 + 5K_2K_a) \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5K_a \end{bmatrix} r(t).$$

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es

$$s^2 + (20 + 5K_2K_a)s + 5K_a = 0,$$

puesto que $K_1 = 1$. Para lograr las especificaciones se selecciona $\zeta = 0.90$ y $\zeta\omega_n = 125$. Entonces la ecuación característica deseada en lazo cerrado es

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 250s + 19\,290 = 0$$

Por lo tanto, se requiere que $5K_a = 19\,290$ o $K_a = 3858$. Además se requiere que

$$20 + 5K_2K_a = 250,$$

o $K_2 = 0.012$.

El sistema con el modelo de segundo orden presenta la respuesta deseada puesto que consigue todas las especificaciones, como se muestra en la Tabla 11.1. Si se añade el campo de inductancia $L = 1$ mH se tiene el modelo de tercer orden con

$$G_1(s) = \frac{5000}{(s + 1000)}$$

Si se utiliza este modelo, que incorpora el campo de inductancia, se comprueba la respuesta del sistema con las ganancias de realimentación seleccionadas para el modelo de segundo orden. Los resultados se presentan en la Tabla 11.1, y se ilustra que el modelo de segundo orden es un modelo muy bueno del sistema. Los resultados reales del sistema de tercer orden consiguen las especificaciones.

11.14. RESUMEN

En este capítulo se ha examinado el diseño de sistemas de control en el dominio temporal. Se ha presentado un procedimiento de diseño de tres pasos para construir compensadores en variables de estado. Se ha considerado el diseño óptimo de un sistema utilizando realimentación en variables de estado y el índice de comportamiento integral. Además, se ha examinado el diseño de sistemas en el plano s utilizando variables de estado realimentadas. Por último se ha explicado el diseño de modelo interno.

EJERCICIOS

E11.1. Como se muestra en la Figura E11.1 [9], la capacidad de equilibrarse de forma activa es un ingrediente fundamental en la movilidad de un dispositivo que salta y corre sobre una pierna elástica. El control de la altitud del dispositivo utiliza un giróscopo y una realimentación de manera que $\mathbf{u} = \mathbf{Kx}$, donde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

Determinar el valor de k para que la respuesta de cada salto sea críticamente amortiguada.

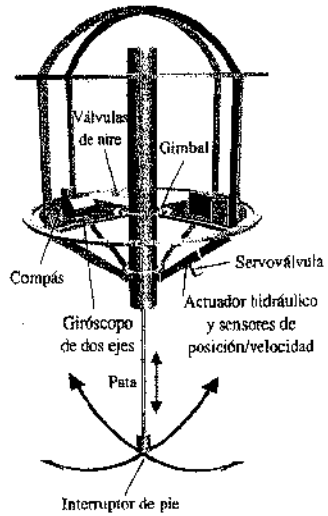


FIGURA E11.1. Control de una única pierna.

E11.2. Una bola de acero suspendida magnéticamente se puede describir mediante la ecuación lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Las variables de estado son x_1 = posición y x_2 = velocidad, y ambas son medibles. Seleccionar un formato de realimentación de manera que el sistema sea críticamente amortiguado y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) sea de 2 segundos.

E11.3. Un sistema está descrito por las ecuaciones matriciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

e $y = 2x_2$. Determinar si el sistema es controlable y observable.

Respuesta: Controlable, no observable.

E11.4. Un sistema está descrito mediante las ecuaciones matriciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

e $y = x_1$. Determinar si el sistema es controlable y observable.

E11.5. Un sistema está descrito mediante las ecuaciones matriciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}u$$

e $y = x_1(t)$. Determinar si el sistema es controlable y observable.

E11.6. Un sistema está descrito mediante las ecuaciones matriciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

e $y = x_1(t)$. Determinar si el sistema es controlable y observable.

Respuesta: controlable y observable.

E11.7. Considerar el sistema representado en variables de estados de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad -2] \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = [0].$$

Dibujar un diagrama de bloques del modelo del sistema.

E11.8. Considerar el sistema de tercer orden

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -3 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}u$$

$$y = [2 \quad 8 \quad 10]\mathbf{x} + [1]u.$$

Dibujar un diagrama de bloques del modelo del sistema.

E11.9. Considerar el sistema de segundo orden

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}y$$

$$y = [1 \quad 0]\mathbf{x} + [0]u.$$

¿Para qué valores de k_1 y k_2 el sistema es completamente controlable?

E11.10. Considerar el diagrama de bloques del modelo de la Figura E11.10. Escribir el modelo correspondiente en variables de estado de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u.$$

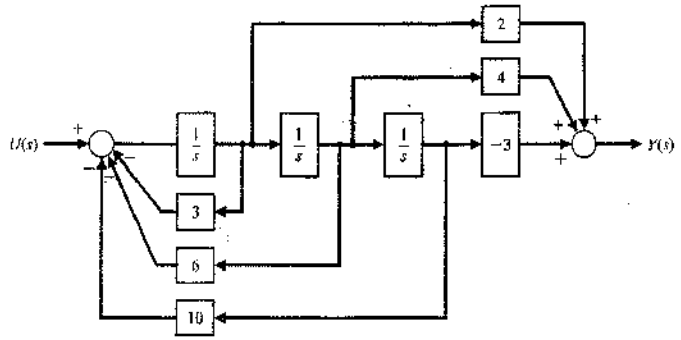


FIGURA E11.10
Diagrama de bloques en variables de estado.

PROBLEMAS

P11.1. Un sistema de primer orden está representado por la ecuación diferencial en el dominio temporal

$$\dot{x} = x + u.$$

Se diseña un controlador realimentado tal que

$$u(t) = -kx,$$

y la condición de equilibrio que se desea es $x(t) = 0$ cuando $t \to \infty$. El comportamiento integral está definido por

$$J = \int_0^\infty x^2\,dt,$$

y el valor inicial de la variable de estado es $x(0) = \sqrt{2}$. Obtener el valor de k para que J sea un mínimo.

¿Es esta k físicamente realizable? Seleccionar un valor práctico de la ganancia k y evaluar el índice de comportamiento con esa ganancia. ¿Es el sistema estable sin la realimentación debida a $u(t)$?

P11.2. Para tener en cuenta el gasto de energía y recursos, la señal de control se incluye a menudo en el comportamiento integral. Entonces el sistema puede no utilizar una señal de control no limitada $u(t)$. Un índice de comportamiento adecuado, que incluye el efecto de la magnitud de la señal de control, es

$$J = \int_0^\infty (x^2(t) + \lambda u^2(t))\,dt.$$

(a) Repetir el Problema 11.1 para el índice de comportamiento.
(b) Si $\lambda = 2$, obtener el valor de k que minimiza el índice de comportamiento. Calcular el valor mínimo resultante de J.

P11.3. Un sistema de robot inestable está descrito mediante la ecuación diferencial vectorial [10]

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t).$$

Ambas variables de estado son medibles, y por lo tanto la señal de control se define como $u(t) = -k(x_1 + x_2)$. Utilizando el método de la Sección 11.9, diseñar la ganancia k de manera que se minimice el índice de comportamiento. Determinar la sensibilidad de comportamiento frente a un cambio en k. Supóngase que las condiciones iniciales son

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

¿Es estable el sistema sin las señales de realimentación debidas a $u(t)$?

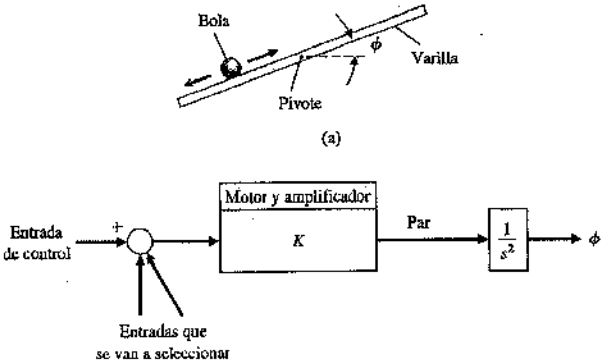


FIGURA P11.9
(a) Bola y varilla.
(b) Modelo de la bola y varilla.

P11.4. Determinar la ganancia de realimentación k del Ejemplo 11.12 que minimiza el índice de comportamiento

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{x}\,dt$$

cuando $\mathbf{x}^T(0) = [1 \quad 1]$. Dibujar el índice de comportamiento J frente a la ganancia k.

P11.5. Determinar la ganancia de realimentación k del Ejemplo 11.13 que minimiza el índice de comportamiento

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{u})\,dt$$

cuando $\mathbf{x}^T(0) = [1 \quad 1]$. Dibujar el índice de comportamiento J frente a la ganancia k.

P11.6. Para las soluciones de los Problemas 11.3, 11.4 y 11.5, determinar las raíces del sistema de control óptimo en lazo cerrado. Obsérvese que las raíces resultantes en lazo cerrado dependen del índice de comportamiento seleccionado.

P11.7. Un sistema tiene la ecuación vectorial diferencial como la que se muestra en la Ecuación (11.42). Se desea que ambas variables de estado se utilicen en la realimentación de manera que $u(t) = -k_1x_1 - k_2x_2$. Además, se desea que este sistema tenga una frecuencia natural, ω_n, igual a 2. Determinar un conjunto de ganancias k_1 y k_2 que logra un sistema óptimo cuando J está dado por la Ecuación (11.13). Supóngase que $\mathbf{x}^T(0) = [1 \quad 0]$.

P11.8. Para el sistema del Ejemplo 11.11, determinar el valor óptimo para k_2 cuando $k_1 = 1$ y $\mathbf{x}^T(0) = [1 \quad 0]$.

P11.9. Un sistema mecánico interesante con un problema de control cambiante es el sistema bola y varilla que se muestra en la Figura P11.9(a) [11]. Consiste en una varilla rígida que está libre para rotar en el plano del papel alrededor de un pivote central, con una bola sólida que rueda por una ranura en la parte de arriba de la varilla. El problema de control consiste en situar la bola en el punto deseado de la varilla utilizando como entrada de control un par aplicado a la varilla en el pivote.

Está disponible un modelo lineal del sistema con un valor medido del ángulo ϕ y su velocidad angular $d\phi/dt = \omega$. Seleccionar el esquema de realimentación de manera que la respuesta del sistema en lazo cerrado tenga una sobreelongación del 4% y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de 1 segundo para una entrada escalón.

P11.10. La dinámica de un cohete está representada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [0 \quad 1]\mathbf{x}$$

y se utiliza realimentación en variables de estado, donde $x_2 = y(t)$ y $u = -2x_1 - x_2$. Determinar las raíces de la ecuación característica de este sistema y la respuesta del sistema cuando las condiciones iniciales son $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 0$.

P11.11. El modelo en variables de estado de una planta que se va a controlar está dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [0 \quad 1]\mathbf{x} + [0]u.$$

Utilizar las variables de estado realimentadas e incorporar una entrada $u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \alpha r$. Seleccionar las ganancias $\mathbf{K}$ y α de manera que el sistema tenga una respuesta rápida con una sobreelongación de aproximadamente el 1%, un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 1 segundo, y un error nulo en estado estacionario para una entrada escalón.

P11.12. Un motor de cc tiene un modelo en variables de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -0.5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1.25]\mathbf{x}.$$

Determinar si el sistema es controlable y observable.

P11.13. Un sistema realimentado tiene una función de transferencia de la planta

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{K}{s(s + 70)}.$$

Se desea que la constante de error de velocidad, K_v, sea de 35 y que la sobreelongación para una entrada escalón sea aproximadamente del 4% de manera que ζ sea de $1/\sqrt{2}$. El tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) deseado es de 0.11 segundos. Diseñar un sistema realimentado en variables de estado apropiado, $r(t) = -k_1x_1 - k_2x_2$.

P11.14. Una planta tiene una función de transferencia

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [0 \quad 1]\mathbf{x} + [0]u.$$

Determinar las ganancias de realimentación en variables de estado para lograr un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de 1 segundo y una sobreelongación aproximada del 10%. Dibujar además el diagrama de bloques del sistema resultante. Supóngase que el vector de estados está disponible por completo para la realimentación.

P11.15. Un sistema de telerrobot tiene las ecuaciones matriciales [18]

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

e

$$y = [1 \quad 0 \quad 2]\mathbf{x}.$$

(a) Determinar la función de transferencia, $G(s) = Y(s)/U(s)$. (b) Dibujar el diagrama de bloques e indique las variables de estado. (c) Determinar si el sistema es controlable. (d) Determinar si el sistema es observable.

P11.16. Los actuadores de potencia hidráulicos se utilizaron para dirigir a los dinosaurios de la película *Parque Jurásico* [23]. Los movimientos de los grandes monstruos requirieron actuadores de alta potencia de 1200 vatios.

Un movimiento de un miembro específico tiene una dinámica representada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [0 \quad 1]\mathbf{x} + [0]u.$$

Se desea situar los polos en lazo cerrado en $s = -2 \pm j2$. Utilizando la fórmula de Ackermann determinar la realimentación en variables de estado requerida. Suponer que el vector de estados está disponible completamente para la realimentación.

P11.17. Un sistema tiene una función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(s + a)}{s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4}.$$

Determinar un valor real de a de manera que el sistema sea o bien no controlable o bien no observable.

P11.18. Un sistema tiene una planta

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{(s + 1)^2}.$$

(a) Encontrar la ecuación diferencial matricial que representa a este sistema. Identificar las variables de estado en el modelo del diagrama de bloques. (b) Seleccionar una estructura de realimentación en variables de estado utilizando $u(t)$, y seleccionar las ganancias de realimentación de manera que la respuesta $y(t)$ de un sistema no forzado sea críticamente amortiguado cuando la condición inicial es $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 0$, donde $x_1 = y(t)$. Las raíces repetidas están en $s = -\sqrt{2}$.

P11.19. El diagrama de bloques de un sistema se muestra en la Figura P11.19. Determinar si el sistema es controlable y observable.

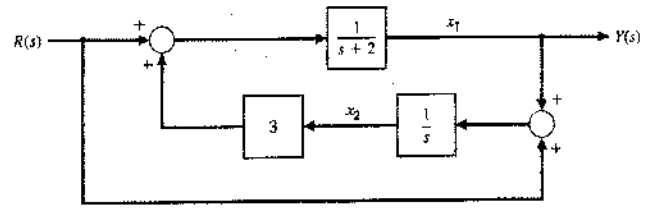


FIGURA P11.19 Sistema de control multilazo realimentado.

P11.20. Considerar el sistema automático de dirección de un barco tratado en los Problemas 8.11 y 9.15. La ecuación diferencial del sistema en variables de estado es

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -0.05 & -6 & 0 & 0 \\ -10^{-3} & -0.15 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.03 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\delta(t),$$

donde $\mathbf{x}^T(t) = [\dot{v} \quad \omega_r \quad y \quad \theta]$. Las variables de estado son $x_1 = \dot{v}$ = la velocidad transversal; $x_2 = \omega_r$ = velocidad angular de las coordenadas relativas del barco respecto a la respuesta relativa; $x_3 = y$ = distancia de desviación al eje perpendicular al seguimiento; $x_4 = \theta$ = ángulo de desviación. (a) Determinar si el sistema es estable. (b) Se puede añadir la realimentación de manera que

$$\delta(t) = -k_1x_1 - k_3x_3.$$

Determinar si el sistema es estable para valores adecuados de k_1 y k_2.

P11.21. En la Figura P11.21 se muestra un circuito *RL*. (a) Seleccionar las dos variables de estado y obtener la ecuación diferencial vectorial donde la salida es $v_0(t)$. (b) Determinar si las variables de estado son observables cuando $R_1/L_1 = R_2/L_2$. (c) Determinar las condiciones para que el sistema posea dos raíces iguales.

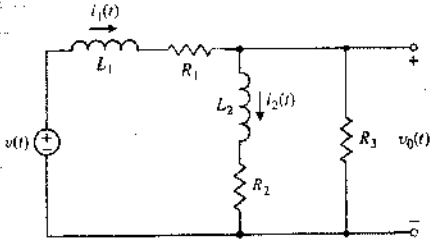


FIGURA P11.21. Circuito *RL*.

P11.22. Un sistema de control manipulador tiene una función de transferencia de la planta

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 0.4)}$$

y una realimentación unidad negativa [17]. Representar este sistema mediante un grafo de flujo de señal en variables de estado o un diagrama de bloques y una ecuación diferencial vectorial. (b) Utilizar la realimentación en variables de estado de manera que la sobreelongación sea del 5% y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) sea de 1.35 segundos. (c) Dibujar la respuesta del sistema realimentado en variables de estado para una entrada escalón.

P11.23. Considerar de nuevo el sistema del Ejemplo 11.7 para el que se desea que el error en estado estacionario para una entrada escalón sea nulo y las raíces de la ecuación característica deseadas sean $s = -2 \pm j1$ y $s = -10$.

P11.24. Considerar de nuevo el sistema del Ejemplo 11.7 para el que se desea que el error en estado estacionario para una entrada escalón sea nulo y las raíces de la ecuación característica deseadas sean $s = -2 \pm j2$ y $s = -20$.

P11.25. Considerar el sistema representado en variables de estado de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad -4] \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = [0].$$

Verificar si el sistema es observable. Si lo es, diseñar un observador de estados completo situando los polos en $s_{1,2} = -1$. Dibujar la respuesta del error de estimación $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, con un error inicial de estimación de $\mathbf{e}(0) = [1 \quad 1]^T$.

P11.26. Considerar el sistema de tercer orden

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}u$$

$$y = [2 \quad -4 \quad 0]\mathbf{x} + [0]u.$$

Verificar si el sistema es observable. Si lo es, determinar la matriz de ganancia del observador que se requiere para situar los polos en $s_{1,2} = -1 \pm 2j$ y $s_3 = -10$.

P11.27. Considerar el sistema de segundo orden

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad 0]\mathbf{x} + [0]u.$$

Determinar la matriz de ganancia del observador que se requiere para situar los polos del observador en $s_{1,2} = -1 \pm j$.

PROBLEMAS AVANZADOS

PA11.1. Un sistema de control de un motor de cc tiene la forma que se muestra en la Figura PA11.1 [6]. Las tres variables de estado son medibles; la posición de salida es $x_1(t)$. Seleccionar las ganancias de realimentación de manera que el sistema tenga un error nulo en estado estacionario para una entrada escalón y una respuesta con un porcentaje de sobreelongación menor del 3%.

PA11.2. Un sistema tiene un modelo

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & -1.75 & -1.25 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u.$$

Añadir la variable de realimentación de manera que los polos en lazo cerrado se sitúen en $s = -4$, -4 y -5.

PA11.3. Un sistema tiene una ecuación diferencial matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}u.$$

¿Cuáles son los valores de b_1 y b_2 requeridos para que el sistema sea controlable?

PA11.4. La ecuación diferencial vectorial descrita para el Ejemplo 3.3 del péndulo invertido es

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9.8 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u.$$

Supóngase que todas las variables de estado son medibles y que se utiliza la realimentación en variables de estado. Situar las raíces de la ecuación característica en $s = (-2 \pm j)$, -5 y -5.

PA11.5. Un sistema de suspensión de un automóvil tiene tres variables de estado físicas, como se muestra en la Figura PA11.5 [15]. La estructura de la realimentación en variables de estado se muestra en la figura, con $K_1 = 1$. Seleccionar K_2 y K_3 de manera que las raíces de la ecuación característica sean tres raíces situadas entre $s = -3$ y $s = -6$. Seleccionar, además, K_p de manera que el error estacionario frente a una entrada escalón sea nulo.

PA11.6. Un sistema está representado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} + u,$$

donde y = salida y u = entrada.

(a) Desarrollar una representación en variables de fase y mostrar que el sistema es controlable. (b) Definir las variables de estado como $x_1 = y$ y $x_2 = dy/dt - u$, y determinar si el sistema es controlable. Observar que la controlabilidad del sistema depende de la definición de las variables de estado.

PA11.7. El nuevo Radisson Diamond utiliza diques flotantes y estabilizadores para amortiguar el efecto de las olas que golpean al barco, como se muestra en la Figura PA11.7(a). En la Figura PA11.7(b) se muestra el sistema de control del balanceo del barco. Determinar las ganancias de realimentación K_2 y K_3 de manera que las raíces de la ecuación característica sean $s = -15$ y $s = -2 \pm j2$. Dibujar el balanceo de salida $\phi(t)$ para una perturbación escalón unidad.

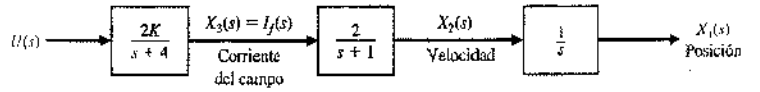


FIGURA PA11.1
Motor de cc controlado por campo.

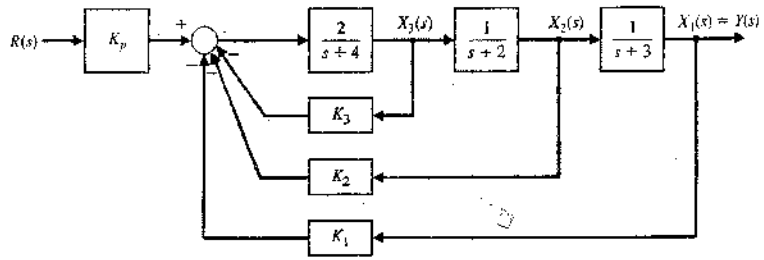
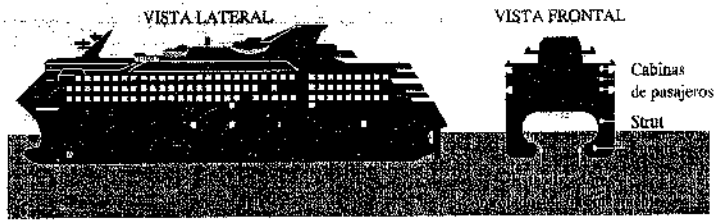
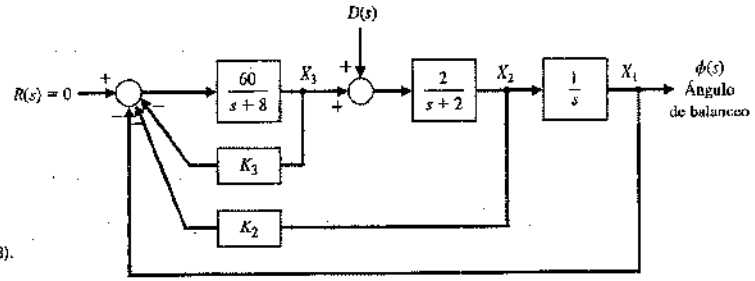


FIGURA PA11.5
Sistema de suspensión de un automóvil.



(a)



(b)

FIGURA PA11.7
(a) Radisson Diamond. (Cortesía de *Conde-Nast Traveler*, 23 de julio 1993). (b) Sistema de control para reducir el efecto de la perturbación.

PA11.8. Considerar de nuevo el sistema de control de nivel de líquido que se describe en el Problema 3.36.

(a) Diseñar un controlador en variables de estado utilizando $h(t)$ como variable realimentada, de manera que la respuesta frente a un escalón presente una sobreelongación menor que el 10% y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor o igual que 5 segundos. (b) Diseñar un controlador realimentado en variables de estado utilizando dos variables de estado, el nivel $h(t)$ y la posición del eje $\theta(t)$, para que se satisfagan las especificaciones del apartado (a). (c) Comparar los resultados de los apartados (a) y (b).

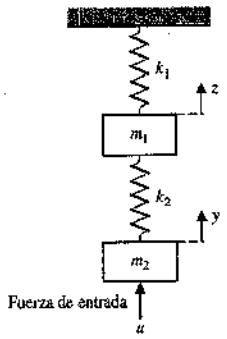


FIGURA PA11.9. Modelo de un vehículo de hospital.

PA11.9. El control del movimiento de un vehículo de transporte de peso ligero de un hospital se puede representar mediante un sistema de dos masas como el que se muestra en la Figura PA11.9, donde $m_1 = m_2 = 1$ y $k_1 = k_2 = 1$ [24]. (a) Determinar la ecuación diferencial vectorial de estados. (b) Determinar las raíces de la ecuación característica. (c) Se desea estabilizar el sistema haciendo $u = -kx_i$, donde u es la fuerza en la masa inferior y x_i es una de las variables de estado. Seleccionar una variable de estado x_i apropiada. (d) Elegir un valor de la ganancia k y dibujar el lugar de las raíces cuando k varía.

PA11.10. Considerar un péndulo invertido montado en un motor, como el que se muestra en la Figura PA11.10. Se supone que el motor y la carga no tienen fricción de amortiguamiento. El péndulo que se va a equilibrar está unido al eje

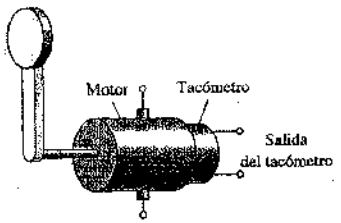


FIGURA PA11.10. Motor y péndulo invertido.

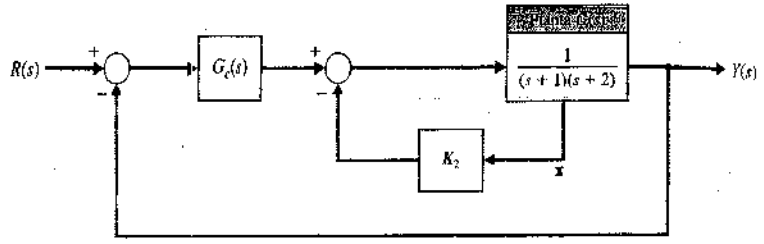


FIGURA PA11.11
Modelo de control interno.

horizontal de un servomotor. El motor dispone de un tacogenerador, de manera que está disponible la señal de velocidad, pero no lo está la de posición. Cuando se apaga el motor, el péndulo colgará verticalmente hacia abajo y si es perturbado ligeramente, comenzará a oscilar. Si se desplaza a lo alto de su arco, el péndulo está en una posición inestable. Idear un compensador realimentado, $G_c(s)$, utilizando únicamente la señal de velocidad del tacómetro.

PA11.11. Determinar el modelo interno de un controlador $G_c(s)$ para el sistema que se muestra en la Figura PA11.11. Se desea un error nulo en estado estacionario para una entrada escalón. Además se requiere que el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) sea menor que 5 segundos.

PA11.12. Repetir el Problema Avanzado 11.11 cuando se desea que el error en estado estacionario para una entrada en rampa sea nulo y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de la respuesta a la rampa sea menor que 6 segundos.

PA11.13. Considerar el sistema representado en variables de estados de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [6 \quad -4] \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = [0].$$

Verificar si el sistema es observable y controlable. Si lo es, diseñar una ley de realimentación de estados completa y un observador que sitúe los polos del sistema en lazo cerrado en $s_{1,2} = -1 \pm j$ y los polos del observador en $s_{1,2} = -10$.

PA11.14. Considerar el sistema de tercer orden

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}u$$

$$y = [2 \quad -9 \quad 2]\mathbf{x} + [0]u.$$

Verificar si el sistema es observable y controlable. Si lo es, diseñar una ley de realimentación de estados completa y un observador que sitúe los polos del sistema en lazo cerrado en $s_{1,2} = -1 \pm j$, $s_3 = -2$ y los polos del observador en $s_{1,2} = -1 \pm 2j$, $s_3 = -20$.

PA11.15. Considerar el sistema de la Figura PA11.15. Diseñar un observador de estados completo para el sistema. Determinar la matriz de ganancia, $\mathbf{H}$, que sitúa los polos del observador en $s_{1,2} = -10 \pm 10j$.

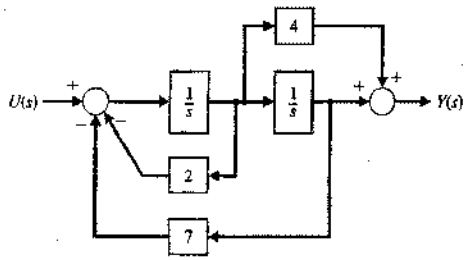


FIGURA PA11.15. Un diagrama de bloques de un sistema de segundo orden.

PROBLEMAS DE DISEÑO

PDC11.1. Se desea obtener un sistema realimentado en variables de estado para el sistema eje motor-deslizadera. Utilizar el modelo en variables de estado desarrollado en PDC3.1 y determinar el sistema realimentado. La respuesta frente a un escalón debería tener una sobreelongación menor del 2% y un tiempo de asentamiento menor que 250 ms.

PD11.1. Considerar el dispositivo de levitación magnética de las Figuras PD11.1(a) y (b). Obtener un diseño que proporciones una respuesta estable para el que la bola permanezca dentro del 10% de su posición deseada. Suponer que y y dy/dt son medibles.

PD11.2. El control de la relación combustible-aire en el carburador de un automóvil fue de gran importancia en los 80 cuando los fabricantes de coches trabajaban para reducir las emisiones de polución. Los diseñadores de motores de coche apostaron por el control realimentado de la relación combustible-aire. Se situó un sensor en el tubo de escape y se utilizó como entrada a un controlador. El controlador realmente ajusta el orificio que controla el flujo de carburante en el motor [3].

Seleccionar los dispositivos y desarrollar un modelo lineal para el sistema completo. Suponer que el sensor mide la relación real combustible-aire con un retardo despreciable. Con este modelo determinar el controlador óptimo cuando se desea un sistema con un error nulo en estado estacionario frente a una entrada escalón y una sobreelongación para esta misma entrada menor del 10%.

PD11.3. La eficiencia del motor diesel es muy sensible a la velocidad de rotación. Por lo tanto, se desea controlar la velocidad de un motor diesel que impulsa motores eléctricos de locomotoras diesel eléctricas para grandes trenes de ferrocarriles. La locomotora es accionada por motores cc localizados en cada uno de los ejes. Considerar el modelo de impulsión eléctrico que se muestra en la Figura PD11.3 donde la posición de la válvula de estrangulación se fija moviendo el potenciómetro de entrada.

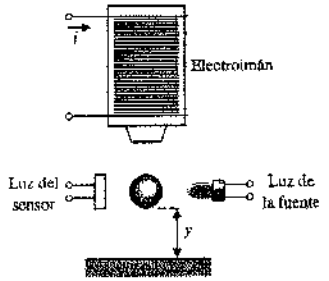


FIGURA PD11.1. (a) Levitación de una bola utilizando un electroimán. (b) El modelo del electroimán y la bola.

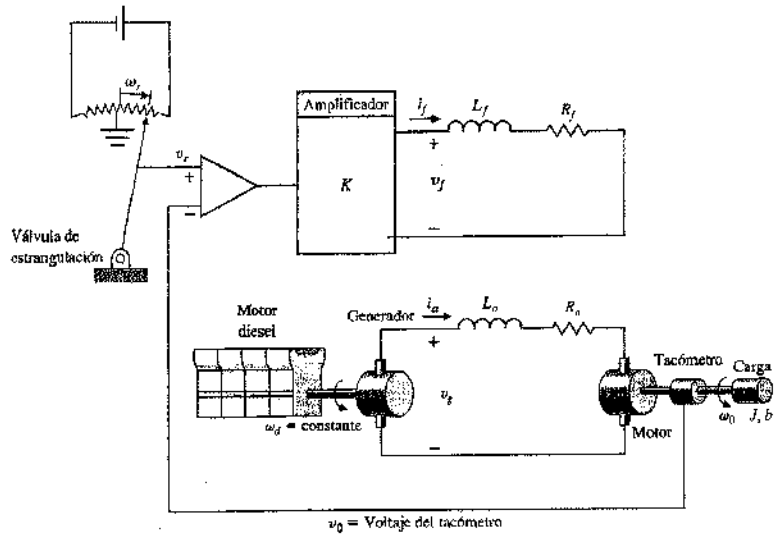


FIGURA PD11.3
Locomotora diesel-eléctrica.

La velocidad controlada ω_0 se mide mediante un tacómetro que proporciona un voltaje de realimentación v_0. El tacómetro puede ser impulsado por una correa desde el eje del motor. Un amplificador electrónico amplifica el error $(v_r - v_0)$ entre las señales de referencia y el voltaje de realimentación y proporciona un voltaje v_f que se suministra al bobinado de la excitación del generador cc.

El generador funciona a una velocidad constante ω_g debido al motor diesel y genera un voltaje v_g que se proporciona a la inducción del motor cc. El motor el controlado por inducido con una corriente fija i proporcionada a su campo. Como resultado, el motor produce un par T y mueve la carga conectada a su eje de manera que la velocidad controlada ω_0 tiende a igualarse con la velocidad de referencia ω_r.

Se sabe que la constante del generador K_g es 100 y que la constante del motor es $K_m = 10$. La constante de la fuerza contraelectromotriz es $K_b = 31/50$. Las constantes para el motor son $J = 1$, $b = 1$, $L_a = 0.2$ y $R_a = 1$. El generador tiene una resistencia de campo $R_f = 1$ y una inductancia de campo de $L_f = 0.1$. Además, el tacómetro tiene una ganancia $K_t = 1$, y el generador tiene $L_g = 0.1$ y $R_g = 1$. Las tres constantes están en unidades apropiadas del SI.

(a) Desarrollar un modelo lineal para el sistema y analizar el comportamiento del sistema cuando K se ajusta. ¿Cuál es el error en estado estacionario para una posición de la válvula de estrangulación fija de manera que $v_r = A$? (b) Incluir el efecto de un par de carga perturbador, T_d, en el modelo del sistema y determinar el efecto de un par de carga perturbador en la velocidad, $\omega(s)$. Para el diseño del apartado (a), ¿cuál es el error en estado estacionario introducido por la perturbación? (c) Seleccionar las tres variables de estado que son medibles directamente y obtener la ecuación diferencial vectorial de estados. A continuación diseñar un sistema realimentado en variables de estado que logre un comportamiento adecuado.

PD11.4. Un helicóptero de altas prestaciones tiene el modelo que se muestra en la Figura PD11.4. El objetivo consiste en controlar el ángulo de elevación θ del helicóptero ajustando el ángulo del rotor, δ.

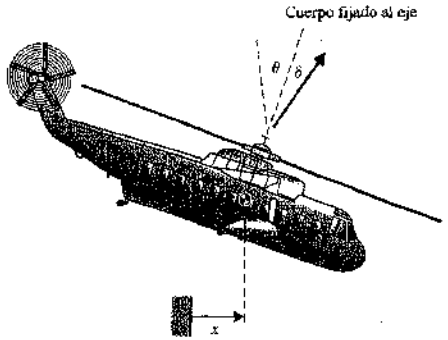


FIGURA PD11.4. Control del ángulo de elevación, θ, de un helicóptero.

Las ecuaciones de movimiento del helicóptero son

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\sigma_1 \frac{d\theta}{dt} - \alpha_1 \frac{dx}{dt} + n\delta$$

$$\frac{d^2dx}{dt^2} - g\theta = -\alpha_2 \frac{d\theta}{dt} - \sigma_2 \frac{dx}{dt} + g\delta,$$

donde x es la traslación en la dirección horizontal. Para un helicóptero militar de altas prestaciones, se determina que

$$\sigma_1 = 0.415 \qquad \alpha_2 = 1.43$$
$$\sigma_2 = 0.0198 \qquad n = 6.27$$
$$\alpha_1 = 0.0111 \qquad g = 9.8$$

con todas las unidades apropiadas en el SI.

Determinar (a) la representación en variables de estado de este sistema y (b) la representación de la función de transferencia para $\theta(s)/\delta(s)$. (c) Utilizar la realimentación en variables de estado para lograr comportamientos adecuados para el sistema controlado.

Las especificaciones deseadas son (1) un estado estacionario frente a una entrada escalón para $\theta_d(s)$, el ángulo de elevación deseado, menor que el 20% de la magnitud de la entrada; (2) una sobreelongación para una entrada escalón menor que el 20%; y (3) un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) para una entrada escalón menor de 1.5 segundos.

PD11.5. El proceso caja de presión se utiliza en las fábricas de papel para transformar el flujo de la lechada en un chorro de 2 cm y después extenderlo en una cinta de malla [25]. Para lograr una calidad de papel deseable, la lechada se debe distribuir tan uniformemente como sea posible en la cinta, y se debe mantener la relación entre la velocidad del chorro y la de la cinta, denominada **relación chorro/cinta**. Una de las variables de control principal es la presión en la caja de presión, que en definitiva controla la velocidad de la lechada en el chorro. La presión total en la caja de presión es la suma de la presión líquido-nivel y la presión del aire que se bombea en la caja de presión. Como la caja de presión está presurizada y es un sistema fuertemente dinámico y acoplado, el control manual sería difícil de mantener y podría ser que degradase las propiedades del papel.

El modelo en el espacio de estados de una caja de presión típica, linealizada alrededor de un punto estacionario particular, está dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0.8 & +0.02 \\ -0.02 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.001 \end{bmatrix}u$$

e $y = [1 \quad 0]\mathbf{x}$.

Las variables de estado son x_1 = nivel del líquido y x_2 = presión. La variable de control es u_1 = bomba actual. (a) Diseñar un sistema realimentado en variables de estado que tenga una ecuación característica con las raíces reales con una magnitud mayor que cinco. (b) Diseñar un observador con los polos del observador situados al menos diez veces más lejos en el semiplano izquierdo que las variables de estado del sistema realimentado. (c) Conectar el observador y el sistema de realimentación de estados completo y dibujar el diagrama de bloques del sistema integrado.

PD11.6. En la Figura PD11.6 se muestra un aparato motor-acoplado. Los motores acoplados consisten en dos poleas conectadas mediante un cinturón elástico, que se tensa utilizando una tercera polea montada en muelles que proporciona un modo dinámico subamortiguado. Una de las poleas principales, la polea A, es dirigida por un motor de cc eléctrico. Ambas poleas, A y B, se ajustan con tacómetros que generan voltajes medibles proporcionales a la rotación de la polea. Cuando se aplica un voltaje al motor de cc, la polea A acelerará a una velocidad gobernada por la inercia total experimentada por el sistema. La polea B, en el otro extremo del cinturón elástico, también acelerará debido al voltaje o par aplicado, pero con un efecto de retardo causado por la elasticidad del cinturón. La integración de las señales de velocidad medidas en cada polea proporcionará una estimación de la posición angular para la polea [26].

El modelo de segundo orden del motor-acoplado es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -36 & -12 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

e $y = x_1$.

(a) Diseñar un controlador realimentado en variables de estado que consiga una respuesta plana frente a una entrada escalón (Sección 10.11) y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 0.5 segundos. (b) Diseñar un observador para el sistema que sitúe los polos del observador en posiciones adecuadas en el semiplano izquierdo. (c) Dibujar el diagrama de bloques del sistema que incluya el compensador con el observador y la realimentación de estados. (d) Simular la respuesta a un estado inicial en $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 0]^T$ y $\hat{\mathbf{x}}(0) = (0 \quad 0)^T$.

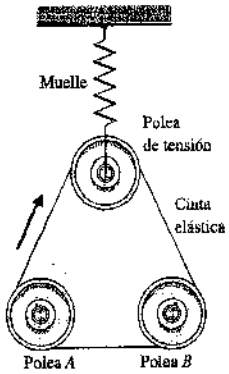


FIGURA PD11.6

PROBLEMAS CON MATLAB

PM11.1. Considerar el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ -6 & 8 & 10 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u,$$

$$y = [1 \quad 2 \quad 1]\mathbf{x}.$$

Utilizando las funciones ctrb y obsv, mostrar que el sistema es controlable y observable.

PM11.2. Considerar el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4.5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u,$$

$$y = [1 \quad 0]\mathbf{x}.$$

Determinar si el sistema es controlable y observable. Calcular la función de transferencia de u a y.

PM11.3. Determinar la matriz de ganancia $\mathbf{K}$ de manera que los polos en lazo cerrado del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u,$$

$$y = [1 \quad -1]\mathbf{x}$$

sean $s_1 = -1$ y $s_2 = -2$. Utilizar la realimentación de estados $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$.

PM11.4. El siguiente modelo se ha propuesto para describir el movimiento de un misil guiado de velocidad constante:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u,$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\mathbf{x}.$$

(a) Verificar que el sistema no es controlable analizando la matriz de controlabilidad mediante la función ctrb.

(b) Desarrollar un modelo en variables de estado controlable calculando en primer lugar la función de transferencia de u a y; a continuación cancelar cualquier factor común en los polinomios numerador y denominador de la función de transferencia. Con la función de transferencia modificada que se acaba de obtener, utilizar la función ss para determinar un modelo para el sistema en variables de estado modificado.

(c) Verificar que el modelo en variables de estado modificado en el apartado (b) es controlable.
(d) ¿Es la velocidad constante del misil guiado estable?
(e) Comentar la relación entre la controlabilidad y la complejidad del modelo en variables de estado (donde la complejidad se mide por el número de variables de estado).

PM11.5. Un modelo linealizado de despegue y aterrizaje de un avión (VTOL) es [27]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 u_1 + \mathbf{B}_2 u_2,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.7070 & 1.4200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.4422 \\ 3.5446 \\ -5.5200 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.1761 \\ -7.5922 \\ 4.4900 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Las componentes del vector de estado son: (i) x_1 es la velocidad horizontal (nudos), (ii) x_2 es la velocidad vertical (nudos), (iii) x_3 es la tasa de elevación (grados/segundo); y (iv) x_4 es el ángulo de elevación (grados). La entrada u_1 se utiliza principalmente para controlar el movimiento vertical, y u_2 para el movimiento horizontal.

(a) Calcular los autovalores de la matriz **A** del sistema. ¿Es el sistema estable? (b) Determinar el polinomio característico asociado con **A** utilizando la función poly. Calcular las raíces de la ecuación característica, y compararlas con los autovalores calculados en el apartado (a). (c) ¿Es el sistema controlable sólo desde u_1? ¿Y sólo desde u_2? Comentar los resultados.

PM11.6. En un esfuerzo por acceder a la cara oculta de la luna para explorarla, los estudios se han dirigido a determinar la posibilidad de operar en comunicación vía satélite alrededor de un punto de equilibrio translunar en el sistema tierra-sol-luna. La órbita deseada para el satélite, conocida como órbita halo, se muestra en la Figura PM11.6. El objetivo del controlador consiste en mantener el satélite en la trayectoria de la órbita halo de forma que se pueda ver desde la tierra y de esta manera que las líneas de comunicación estén accesibles en cualquier momento. El vínculo de comunicación es desde la tierra al satélite y después hacia la cara oculta de la luna.

Las ecuaciones linealizadas (y normalizadas) del movimiento del satélite alrededor de los puntos de equilibrio translunares son [28]

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7.3809 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2.1904 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.1904 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_3.$$

El vector de estado, **x**, es la posición del satélite y la velocidad, y las entradas $u_i = 1, 2, 3$ son las aceleraciones del empuje del motor en las direcciones ξ, η y ζ, respectivamente.

(a) ¿Es una posición estable el punto de equilibrio translunar? (b) ¿Es el sistema controlable únicamente desde u_1? (c) Repetir el apartado (b) para u_2. (d) Repetir el apartado (b) para u_3. (e) Suponer que se puede observar la posición en la dirección η. Determinar la función de transferencia de u_2 a η. (*Sugerencia:* Se considera $y = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x}$). (f) Calcular una representación en el espacio de estados de la función de transferencia del apartado (e) utilizando la función ss. Verificar que el sistema es controlable. (g) Utilizando la realimentación de estados

$$u_2 = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

diseñar un controlador (es decir, determinar **K**) para el sistema del apartado (f) de manera que los polos del sistema en lazo cerrado estén en $s_{1,2} = -1 \pm j$ y $s_{3,4} = -10$.

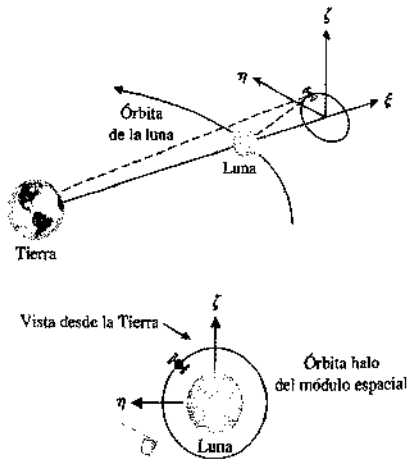


FIGURA PM11.6. El satélite translunar en la órbita halo.

PM11.7. Considerar el sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x}(t). \tag{1}$$

Suponer que se dan tres observaciones, $y(t_i)$, $i = 1, 2, 3$, como las que siguen

$$y(t_1) = 1 \quad \text{a} \quad t_1 = 0$$
$$y(t_2) = -0.0256 \quad \text{a} \quad t_2 = 2$$
$$y(t_3) = -0.2522 \quad \text{a} \quad t_3 = 4.$$

(a) Desarrollar un método para el sistema de la Ecuación (1) para determinar el valor inicial del vector de estados, $\mathbf{x}(t_0)$, utilizando las tres observaciones, de forma que cuando se simule utilizando la función lsim se reproduzcan estas tres observaciones. (b) Con las observaciones dadas, calcular $\mathbf{x}(t_0)$ y discutir las condición bajo la que este problema se puede resolver de manera general. (c) Verificar el resultado simulando la respuesta del sistema para las condiciones iniciales calculadas. (*Nota:* Recuérdese que $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)$ para el sistema de la Ecuación 1.)

PM11.8. Un sistema está descrito mediante una ecuación de estados de una entrada con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando el método de la Sección 11.9 (Ecuación 11.40) y realimentación unitaria negativa, determinar el sistema óptimo cuando $\mathbf{x}^T(0) = [1 \quad 0]$.

PM11.9. Un sistema de primer orden está dado por

$$\dot{x} = -x + u$$

con la condición inicial $x(0) = x_0$. Se desea diseñar un controlador realimentado

$$u = -kx$$

de manera que el índice de comportamiento

$$J = \int_0^\infty x^2(t) + \lambda u^2(t)\, dt$$

se minimice.

(a) Sea $\lambda = 1$. Desarrollar una expresión para J en función de k, válida para cualquier x_0 y utilizar MATLAB para dibujar J/x_0^2 frente a k. A partir de la gráfica, determinar el valor aproximado de $k = k_{\min}$ que minimiza J/x_0^2. (b) Verificar el resultado del apartado (a) analíticamente. (c) Utilizando el procedimiento desarrollado en el apartado (a), obtener la gráfica de $k_{\min}$ frente a λ, donde $k_{\min}$ es la ganancia que minimiza el índice de comportamiento.

PM11.10. Considerar el sistema representado en variables de estado de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -17.01 & -10.34 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 13.9 \\ 24.6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0] \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = [0].$$

Utilizando la función acker, determinar una matriz de ganancia de realimentación de estados completos y una matriz de ganancia del observador para situar los polos del sistema en lazo cerrado en $s_{1,2} = -1$ y los polos del observador en $s_{1,2} = -10 \pm 4j$.

PM11.11. Considerar el sistema de tercer orden

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4.3 & -1.7 & -6.7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.35 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 0]\mathbf{x} + [0]u.$$

(a) Utilizando la función acker, determinar una matriz de ganancia de realimentación de estados completos y una matriz de ganancia del observador para situar los polos del sistema en lazo cerrado en $s_{1,2} = -1.4 \pm 1.4j$, $s_3 = -2$ y los polos del observador en $s_{1,2} = -18 \pm 5j$, $s_3 = -20$. (b) Construir el compensador en variables de estado utilizando la Figura 11.1 como guía. (c) Simular el sistema en lazo cerrado con las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = (1 \quad 0 \quad 0)^T$ y la estimación del estado inicial $\hat{\mathbf{x}}(0) = (0.5 \quad 0.1 \quad 0.1)^T$.

PM11.12. Implementar en Simulink el sistema que se muestra en la Figura PM11.12. Obtener la respuesta del sistema para un escalón y presentar la salida en una pantalla.

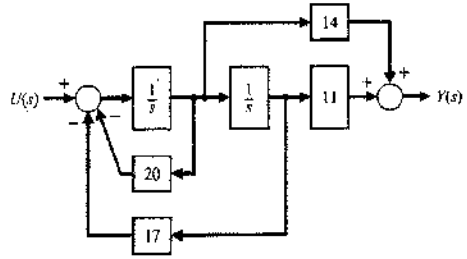


FIGURA PM11.12. Sistema de control para la implementación en Simulink.

PM11.13. Considerar el sistema en variables de estado de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -1 & -13 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x} + [0]u.$$

Diseñar una matriz de realimentación de ganancias de estados completos y una matriz de ganancia del observador para situar los polos del sistema en lazo cerrado en $s_{1,2} = -1.4 \pm 1.4j$, $s_{3,4} = -2 \pm j$ y los polos del observador en $s_{1,2} = -18 \pm 5j$, $s_{3,4} = -20$. Construir un compensador en variables de estado utilizando la Figura 11.1 como guía y simular el sistema en lazo cerrado utilizando Simulink. Seleccionar distintos valores de los estados iniciales y estimar el estado inicial en el observador y presentar los resultados de seguimiento en una gráfica xy.

TÉRMINOS Y CONCEPTOS

Asignación de polos. Metodología de diseño en la que el objetivo es situar los autovalores del sistema en lazo cerrado en las regiones deseadas del plano complejo.

Controlador estabilizante. Controlador que estabiliza el sistema en lazo cerrado.

Descomposición de Kalman en el espacio de estados. Partición del espacio de estados que distingue los estados que son controlables y los no observables, no controlables y no observables, controlables y observables, y no controlables y observables.

Detectable. Sistema en el que los estados que no son observables son naturalmente estables.

Diseño de modelo interno. Método de seguimiento de entradas de referencia que garantiza errores de seguimiento en estado estacionario.

Error de estimación. Diferencia entre el estado real y el estado estimado $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$.

Estabilizable. Sistema en el que los estados que no son controlables son naturalmente estables.

Ley de control de realimentación de estados completos. Una ley de control de la forma $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ donde $\mathbf{x}$ es el estado del sistema que se supone conocido en todos los instantes de tiempo.

Matriz de controlabilidad. Un sistema lineal es (completamente) controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad $\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ldots \mathbf{A}^n\mathbf{B}]$ tiene rango completo, donde $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$. Para sistema lineales con una única entrada y una única salida, el sistema es controlable si y sólo si el determinante de la matriz de controlabilidad $\mathbf{P}_c$ es distinto de cero.

Matriz de observabilidad. Un sistema lineal es (completamente) observable si y sólo si la matriz de observabilidad $\mathbf{P}_o = [\mathbf{C}^T \quad (\mathbf{CA})^T \quad (\mathbf{CA}^2)^T \ldots (\mathbf{CA}^n)^T]^T$ tiene rango completo, donde $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$. Para sistema lineales con una única entrada y una única salida, el sistema es observable si y sólo si el determinante de la matriz de observabilidad $\mathbf{P}_o$ es distinto de cero.

Observador. Sistema dinámico utilizado para estimar el estado de otro sistema dinámico dado un conocimiento sobre las entradas al sistema y las salidas medidas del sistema.

Orden de seguimiento. Aspecto importante del diseño de sistema de control en el que se sigue una entrada de referencia no nula.

Principio de separación. Principio que establece que la ley de realimentación de estados completos y el observador se pueden diseñar de manera independiente y cuando se conectan funcionan como un sistema de control integrado de la forma deseada (es decir, estable).

Realimentación de variables de estado. Ocurre cuando la señal de control, u, para el proceso es una función directa de todas las variables de estado.

Regulador cuadrático lineal. Controlador óptimo diseñado para minimizar el índice de comportamiento cuadrático $J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})\,dt$, donde $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ son los parámetros de diseño.

Sistema controlable. Un sistema es controlable en el intervalo $[t_0, t_f]$ si existe una entrada continua $u(t)$ de forma que cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ se puede llevar a cualquier estado arbitrario $\mathbf{x}(t_f)$ en un intervalo de tiempo finito, $t_f - t_0 > 0$.

Sistema de control óptimo. Sistema cuyos parámetros se ajustan de forma que el índice de comportamiento alcanza un valor extremo.

Sistema observable. Un sistema es observable en el intervalo $[t_0, t_f]$ si cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ está unívocamente determinado observando la salida $y(t)$ en el intervalo $[t_0, t_f]$.

Sistemas de control robusto

CAPÍTULO 12

12.1. Introducción 724
12.2. Sistemas de control robusto y sensibilidad del sistema 725
12.3. Análisis de robustez 728
12.4. Sistemas con parámetros inciertos 731
12.5. El diseño de sistemas de control robustos 733
12.6. Controladores PID 738
12.7. Diseño de sistemas de control PID robustos 740
12.8. Ejemplo de diseño: Autopiloto de un avión 745
12.9. Diseño del sistema de control de un telescopio espacial 746
12.10. Diseño de una bobinadora robusta 748
12.11. Sistema de control robusto con modelo interno 751
12.12. Diseño de una máquina de torneado de diamante de ultraprecisión 753
12.13. Sistema de realimentación pseudocuantitativa 757
12.14. Sistemas de control robusto utilizando MATLAB 759
12.15. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 762
12.16. Resumen 764

SINOPSIS

En los capítulos anteriores se han descrito los beneficios de utilizar un compensador para conseguir el comportamiento deseado de un sistema con realimentación. Ahora se va a prestar la atención al tema de la robustez. El diseño de sistemas de control de gran precisión en presencia de incertidumbres significativas requiere que el diseñador busque un sistema robusto. En este capítulo, se utilizan cinco métodos para diseño robusto, entre los que se incluyen lugar de las raíces, respuesta en frecuencia y métodos ITAE para un sistema PID robusto. Muchas metodologías recientes de diseño de control se centran en la robustez —estabilidad robusta y comportamiento robusto— en presencia de incertidumbres. Las metodologías de diseño recientes consideran el hecho de que nuestros sistemas físicos y el entorno externo en el cual operan no se pueden modelar de manera precisa, pueden cambiar de manera no predecible, y pueden estar sujetos a perturbaciones significativas. Sin embargo, se debería tener en cuenta que las técnicas de diseño clásico pueden producir también sistemas de control robusto. Los ingenieros de control que conocen estos temas pueden diseñar controladores PID robustos, controladores de adelanto-retardo robustos y otros más. En este capítulo, así mismo se analiza el uso de los métodos de modelo interno y de realimentación pseudocuantitativa para lograr control robusto. El capítulo concluye con un diseño de controlador PID para el Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco.

12.1. INTRODUCCIÓN

Un sistema de control diseñado utilizando los métodos y conceptos de los capítulos precedentes asume el conocimiento del modelo de la planta y del controlador y los parámetros constantes. El modelo de la planta siempre será una representación imprecisa del sistema físico real a causa de

- cambios de parámetros
- dinámicas no modeladas
- retardos de tiempos no modelados
- cambios en el punto de equilibrio (punto de operación)
- ruido en el sensor
- entradas de perturbaciones no predecibles

El objetivo del diseño de sistemas robustos es asegurar el comportamiento del sistema a pesar de las imprecisiones y cambios del modelo. Un sistema es **robusto** cuando tiene cambios aceptables en el comportamiento debido a cambios o imprecisiones del modelo.

[redacted]

En la Figura 12.1 se muestra la estructura del sistema que incorpora las incertidumbres potenciales del sistema. Esta modelo incluye el ruido del sensor $N(s)$, la entrada de perturbación no predicha $D(s)$ y una planta $G(s)$ con posibles dinámicas no modeladas o cambios en los parámetros. Las dinámicas no modeladas y los cambios en los parámetros pueden ser significativos o muy grandes, y para estos sistemas, el reto es crear un diseño que retenga el comportamiento deseado.

12.2. SISTEMAS DE CONTROL ROBUSTO Y SENSIBILIDAD DEL SISTEMA

El diseño de sistemas de gran precisión en presencia de incertidumbres significativas en la planta es un problema de diseño de realimentación clásico. Las bases teóricas para la solución de este problema se remontan a los trabajos de H. S. Black y H. W. Bode a

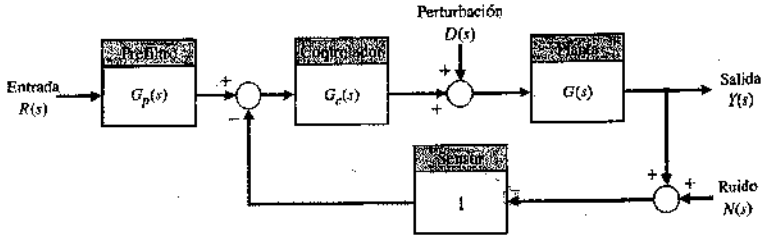


FIGURA 12.1
Diagrama estructural de un sistema en lazo cerrado.

comienzo de la década de 1930 cuando este problema se conocía como el problema de diseño de sensibilidades. Desde entonces se han publicado muchos trabajos que consideran el diseño de sistemas sujetos a una gran incertidumbre en la planta. El diseñador trata de obtener un sistema que funcione adecuadamente sobre un amplio rango de parámetros inciertos. Un sistema se dice que es robusto cuando es duradero, resistente y elástico.

Un sistema de control es robusto cuando (1) tiene sensibilidades pequeñas, (2) es estable sobre el rango de variaciones de parámetros y (3) el comportamiento continúa cumpliendo las especificaciones en presencia de un conjunto de cambios en los parámetros del sistema [3, 4]. La robustez es la sensibilidad a efectos que no se consideran en la fase de análisis y de diseño —por ejemplo, perturbaciones, ruido de medida y dinámicas no modeladas—. El sistema debería ser capaz de resistir estos efectos despreciados cuando realiza las tareas para las cuales fue diseñado.

Para perturbaciones de pequeño parámetro, se puede utilizar como una medida de robustez las sensibilidades diferenciales analizadas en las Secciones 4.2 (sensibilidad del sistema) y 7.6 (sensibilidad de la raíz) [6].

La **sensibilidad del sistema** se define como

$$S_\alpha^T = \frac{\partial T/T}{\partial \alpha/\alpha}, \tag{12.1}$$

donde α es el parámetro y T la función de transferencia del sistema.

La **sensibilidad de la raíz** se define como

$$S_\alpha^{r_i} = \frac{\partial r_i}{\partial \alpha/\alpha}. \tag{12.2}$$

Cuando los ceros de $T(s)$ son independientes del parámetro α, se demuestra que

$$S_\alpha^T = -\sum_{i=1}^{n} S_\alpha^{r_i} \cdot \frac{1}{(s + r_i)}, \tag{12.3}$$

para un sistema de orden n. Por ejemplo, si se tiene un sistema en lazo cerrado tal como se muestra en la Figura 12.2 donde el parámetro variable es α, entonces $T(s) = 1/[s + (\alpha + 1)]$, y

$$S_\alpha^T = \frac{-\alpha}{s + \alpha + 1}. \tag{12.4}$$

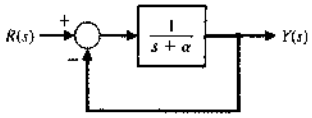


FIGURA 12.2
Sistema de primer orden.

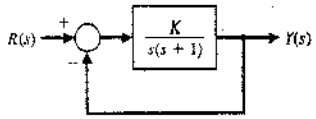


FIGURA 12.3
Sistema de segundo orden.

Más aún, la raíz es $r_1 = +(\alpha + 1)$, y

$$-S_\alpha^{r_1} = -\alpha. \tag{12.5}$$

Por tanto,

$$S_\alpha^T = -S_\alpha^{r_1} \frac{1}{(s + \alpha + 1)}. \tag{12.6}$$

Examinemos la sensibilidad del sistema de segundo orden que se muestra en la Figura 12.3. La función de transferencia del sistema en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + s + K}. \tag{12.7}$$

Como se vio en la Ecuación (4.12), la sensibilidad del sistema para K es

$$S_K^T = \frac{1}{1 + GH(s)} = \frac{s(s + 1)}{s^2 + s + K}. \tag{12.8}$$

En la Figura (12.4) se muestra un diagrama de Bode de las asíntotas de $20\log|T(j\omega)|$ y $20\log|S(j\omega)|$ para $K = 1/4$ (amortiguamiento crítico). Obsérvese que la sensibilidad es pequeña para frecuencias bajas, mientras que la función de transferencia pasa a frecuencias bajas. También, para este caso se ve que $T(s) = 1 - S(s)$.

Por supuesto, la sensibilidad S sólo representa robustez para pequeños cambios en ganancia. Si K cambia de 1/4 dentro del rango $K = 1/16$ a $K = 1$, en la Figura 12.5 se muestra el rango resultante de respuestas en escalón. Este sistema, con un amplio rango esperado de K, no puede ser considerado adecuadamente robusto. Un sistema robusto debería tener esencialmente la misma respuesta para una entrada seleccionada (dentro de una variación que se acuerde).

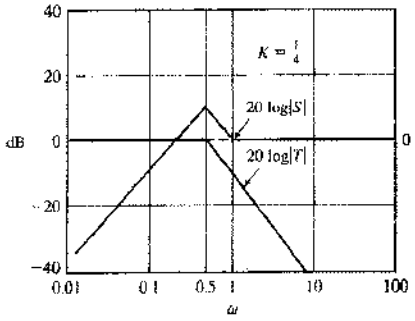


FIGURA 12.4. Sensibilidad y $20\log|T(j\omega)|$ para el sistema de segundo orden de la Figura 12.3. Las aproximaciones asintóticas se muestran para $K = 1/4$.

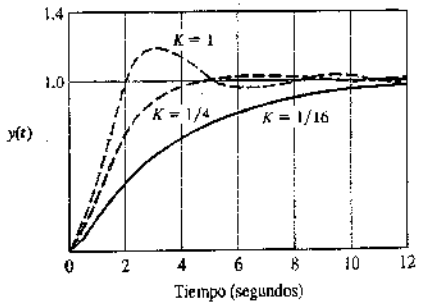


FIGURA 12.5. Respuesta en escalón para la ganancia seleccionada K.

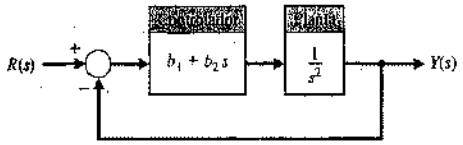


FIGURA 12.6
Sistema con un controlador PD.

EJEMPLO 12.1. Sensibilidad de un sistema controlado

Sea el sistema que se muestra en la Figura 12.6, donde $G(s) = 1/s^2$ y un controlador PD $G_c(s) = b_1 + b_2 s$. Entonces la sensibilidad con respecto a cambios en $G(s)$ es

$$S_G^T = \frac{1}{1 + GG_c(s)} = \frac{s^2}{s^2 + b_2 s + b_1} \tag{12.9}$$

y

$$T(s) = \frac{b_2 s + b_1}{s^2 + b_2 s + b_1}. \tag{12.10}$$

Sea la condición normal $\zeta = 1$ y $\omega_n = \sqrt{b_1}$. Entonces $b_2 = 2\omega_n$ para conseguir $\zeta = 1$. Por tanto, se pueden representar $20\log|S|$ y $20\log|T|$ en un diagrama de Bode tal como se muestra en la Figura 12.7. Obsérvese que la frecuencia ω_n es un indicador de la frontera entre la región de frecuencia en la que la sensibilidad es el criterio de diseño importante y la región en la que el margen de estabilidad es importante. Así, si se especifica ω_n adecuadamente para tomar en consideración la magnitud del error de modelado y la frecuencia de la perturbación externa, se puede esperar que el sistema tenga una cantidad aceptable de robustez. Obsérvese que $G_c(s)$ es un controlador proporcional-derivativo (PD). ■

EJEMPLO 12.2. Sistema con un cero en el semiplano derecho

Sea el sistema que se muestra en la Figura 12.8, donde la planta tiene un cero en el semiplano derecho. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{K(s - 1)}{s^2 + (2 + K)s + (1 - K)}. \tag{12.11}$$

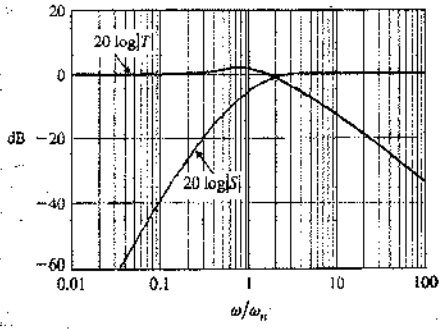


FIGURA 12.7. Sensibilidad y $T(s)$ para el sistema de segundo orden de la Figura 12.6.

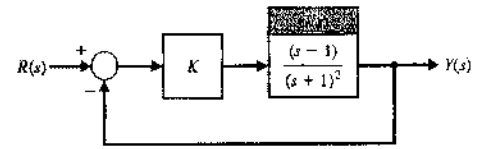


FIGURA 12.8
Sistema de segundo orden.

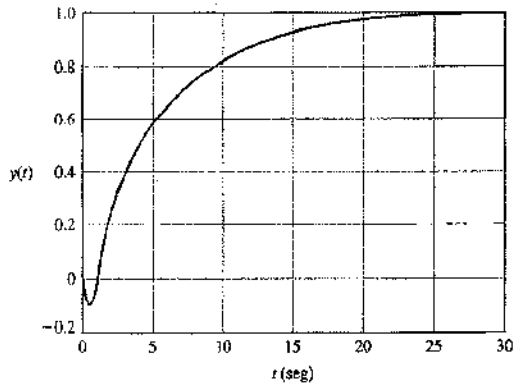


FIGURA 12.9
Respuesta en escalón del sistema de la Figura 12.8 con $K = 1/2$.

K	0.25	0.45	0.50	0.55	0.75
$\lvert e_{ss}\rvert$	0.67	0.18	0	0.22	1.0
Sobrelongación	5%	9%	10%	11%	15%
Tiempo de asentamiento (segundos)	15	24	27	30	45

El sistema es estable para una ganancia $-2 < K < 1$. El error en estado estacionario es

$$e_{ss} = \frac{1 - 2K}{1 - K}, \tag{12.12}$$

y $e_{ss} = 0$ cuando $K = 1/2$. En la Figura 12.9 se muestra la respuesta a una entrada en escalón unitario negativo $R(s) = -1/s$. Obsérvese el descenso inicial en $t = 1$ segundo. Este sistema es sensible a cambios en K tal como se muestra en la Tabla 12.1. El comportamiento de este sistema podría considerarse difícilmente aceptable para un cambio de ganancia de sólo $\pm 10\%$. Así pues, este sistema no se podría considerar robusto. El error en estado estacionario de este sistema cambia mucho cuando lo hace K. ■

12.3. ANÁLISIS DE ROBUSTEZ

Sea el sistema en lazo cerrado que se muestra en la Figura 12.1. Los objetivos del sistema incluyen mantener un pequeño error de seguimiento $[e(t) = r(t) - y(t)]$ y la salida $y(t)$ pequeña para una perturbación $d(t)$. El ruido del sensor $n(t)$ también debe ser pequeño con respecto a $r(t)$, así que $|r| \gg |n|$.

La **función de sensibilidad** es

$$\boxed{S(s) = [1 + G_c(s)G(s)]^{-1},}$$

y la función de transferencia en lazo cerrado, también conocida como la **función de sensibilidad complementaria**, es

$$\boxed{T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}}$$

cuando $G_p(s) = 1$. Se tiene entonces

$$\boxed{S(s) + T(s) = 1.} \tag{12.13}$$

Así pues, es importante hacer $S(s)$ pequeña. Para sistemas físicamente realizables la ganancia de lazo $L(s) = G_cG(s)$ debe ser pequeña para frecuencias altas. Esto significa que $S(j\omega)$ se aproxima a 1 en esa zona de frecuencias.

Una **perturbación aditiva** caracteriza al conjunto de plantas posibles como sigue (se supone que $G_c(s) = 1$):

$$G_a(s) = G(s) + A(s),$$

donde $G(s)$ es la planta nominal y $A(s)$ es la perturbación que está acotada en magnitud. Se supone que $G_a(s)$ y $G(s)$ tienen el mismo número de polos en el semiplano derecho del plano s (si los hay) [36]. En ese caso la estabilidad del sistema no cambiará si

$$|A(j\omega)| < |1 + G(j\omega)| \quad \text{para todo } \omega. \tag{12.14}$$

Esto asegura la estabilidad pero no el comportamiento dinámico.

Una **perturbación multiplicativa** da la planta

$$G_m(s) = G(s)[1 + M(s)].$$

La perturbación está acotada en magnitud y se supone otra vez que $G_m(s)$ y $G(s)$ tienen el mismo número de polos en el semiplano derecho del plano s. Entonces la estabilidad del sistema no cambiará si

$$\boxed{|M(j\omega)| < \left|1 + \frac{1}{G(j\omega)}\right|} \quad \text{para todo } \omega. \tag{12.15}$$

La Ecuación (12.15) se llama el **criterio de estabilidad robusta**. Éste es un test de robustez con respecto a una perturbación multiplicativa. Esta forma de perturbación se usa con frecuencia porque satisface las propiedades intuitivas de (1) ser pequeña a frecuencias bajas, donde el modelo de la planta se suele conocer bien, y (2) ser grande a frecuencias altas, donde el modelo nominal es siempre inexacto.

EJEMPLO 12.3. Sistema con perturbación multiplicativa

Sea el sistema de la Figura 12.1 con $G_p(s) = 1$, $G_c = K$ y

$$G(s) = \frac{170\,000(s + 0.1)}{s(s + 3)(s^2 + 10s + 10\,000)}.$$

El sistema es inestable con $K = 1$, pero una reducción en la ganancia a $K = 0.5$ lo estabilizará. Se considera ahora el efecto de un polo no modelado en 50 rad/s. En este caso, la perturbación multiplicativa se determina de

$$[1 + M(s)] = \frac{50}{s + 50},$$

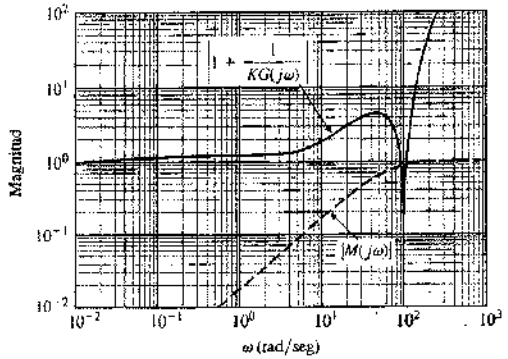
o $M(s) = -s/(s + 50)$. La acotación en magnitud es entonces

$$|M(j\omega)| = \left|\frac{-j\omega}{j\omega + 50}\right|.$$

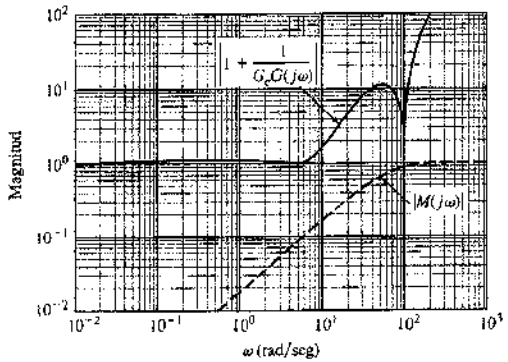
En la Figura 12.10(a) se representa $|M(j\omega)|$ y $|1 + 1/KG(j\omega)|$, donde se observa que no se satisface el criterio de la Ecuación (12.15). Por tanto, el sistema no puede ser estable.

Si se utiliza un compensador de retardo

$$G_c(s) = \frac{0.15(s + 25)}{(s + 2.5)},$$



(a)



(b)

FIGURA 12.10
El criterio de estabilidad robusta para el Ejemplo 12.3.

la función de transferencia del lazo es $1 + G_c(s)G(s)$ y se cambia la forma de la función $G_c(s)G(j\omega)$ en el rango de frecuencias $2 < \omega < 25$. Se tiene entonces la magnitud alterada

$$\left|1 + \frac{1}{G_cG(j\omega)}\right|,$$

tal como se representa en la Figura 12.10(b). En este caso la inigualdad de robustez se satisface y el sistema permanece estable. ■

El objetivo del control es seleccionar un prefiltro $G_p(s)$ y un compensador $G_c(s)$ en una configuración de realimentación con dos grados de libertad (Figura 12.1) de forma tal que las especificaciones del transitorio, estado estacionario y del dominio de la frecuencia se alcancen y el coste de la realimentación medido por el ancho de banda del compensador $G_c(j\omega)$ sea suficientemente pequeño. Esta restricción del ancho de banda se necesita principalmente porque en la medida de la salida del sistema el ruido es inevitable. Una gran amplificación en el ruido puede saturar las últimas etapas de $G_c(s)$ o las primeras etapas de la planta.

12.4. SISTEMAS CON PARÁMETROS INCIERTOS

Muchos sistemas tienen algunos parámetros que son constantes aunque inciertos dentro de un cierto intervalo. Por ejemplo, sea un sistema con una ecuación característica

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_0 = 0 \qquad (12.16)$$

con coeficientes que se sabe que están dentro de ciertas cotas

$$\alpha_i \leq a_i \leq \beta_i \quad \text{e} \quad i = 0, \ldots, n,$$

donde $a_n = 1$.

Para asegurar la estabilidad del sistema, hay que investigar todas las combinaciones posibles de los parámetros. Afortunadamente, es posible investigar un número limitado de polinomios que corresponden a los casos más desfavorables [22]. El análisis de solo cuatro polinomios es suficiente y se definen rápidamente para un sistema de tercer orden con una ecuación característica

$$s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0. \qquad (12.17)$$

Los cuatro polinomios son

$$q_1(s) = s^3 + \alpha_2s^2 + \beta_1s + \beta_0,$$
$$q_2(s) = s^3 + \beta_2s^2 + \alpha_1s + \alpha_0,$$
$$q_3(s) = s^3 + \beta_2s^2 + \beta_1s + \alpha_0,$$
$$q_4(s) = s^3 + \alpha_2s^2 + \alpha_1s + \beta_0.$$

Uno de los cuatro polinomios representa el **caso más desfavorable** y puede indicar o bien un comportamiento inestable o al menos el peor comportamiento para el sistema en ese caso.

EJEMPLO 12.4. Sistema de tercer orden con coeficientes inciertos

Sea un sistema de tercer orden on coeficientes inciertos tal que

$$8 \leq a_0 \leq 60 \Rightarrow \alpha_0 = 8, \quad \beta_0 = 60;$$
$$12 \leq a_1 \leq 100 \Rightarrow \alpha_1 = 12, \quad \beta_1 = 100;$$
$$7 \leq a_2 \leq 25 \Rightarrow \alpha_2 = 7, \quad \beta_2 = 25.$$

Los cuatro polinomios son

$$q_1(s) = s^3 + 7s^2 + 100s + 60,$$
$$q_2(s) = s^3 + 25s^2 + 12s + 8,$$
$$q_3(s) = s^3 + 25s^2 + 100s + 8,$$
$$q_4(s) = s^3 + 7s^2 + 12s + 60.$$

Se procede entonces a comprobar estos cuatro polinomios mediante el criterio de Routh-Hurwitz y, por tanto, se determina que el sistema es estable para todo el rango de parámetros inciertos. ■

EJEMPLO 12.5. Estabilidad de un sistema incierto

Sea un sistema con realimentación unitaria con una función de transferencia de la planta (en condiciones nominales)

$$G(s) = \frac{4.5}{s(s+1)(s+2)}.$$

La ecuación característica nominal es entonces

$$q(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 4.5 = 0.$$

Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz, se comprueba que este sistema es nominalmente estable. Sin embargo, si el sistema tiene coeficientes inciertos tales que

$$4 \leq a_0 \leq 5 \Rightarrow \alpha_0 = 4, \quad \beta_0 = 5;$$
$$1 \leq a_1 \leq 3 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 3; \text{ y}$$
$$2 \leq a_2 \leq 4 \Rightarrow \alpha_2 = 2, \quad \beta_2 = 4,$$

entonces se deben examinar los cuatro polinomios:

$$q_1(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 5,$$
$$q_2(s) = s^3 + 4s^2 + 1s + 4,$$
$$q_3(s) = s^3 + 4s^2 + 3s + 4,$$
$$q_4(s) = s^3 + 2s^2 + 1s + 5.$$

Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz, $q_1(s)$ y $q_3(s)$ son estables y $q_2(s)$ es marginalmente estable. Para $q_4(s)$ se tiene

s^3	1	1
s^2	2	5
s^1	$-3/2$	
s^0	5	

Por tanto, el sistema es inestable para el caso más desfavorable, donde α_2 = mínimo, α_1 = mínimo y β_0 = máximo. Esto ocurre cuando la planta ha cambiado a

$$G(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+1)}.$$

Obsérvese que el tercer polo se ha movido hacia el eje $j\omega$ a su límite en $s = -1$ y que la ganancia ha aumentado también hacia su límite en $K = 5$. Con frecuencia es posible examinar la función de transferencia $G(s)$ y predecir las condiciones del caso más desfavorable. ■

12.5. EL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL ROBUSTOS

El diseño de sistemas de control robusto se basa en dos tareas: determinar la estructura del controlador y ajustar sus parámetros para dar un comportamiento «óptimo» del sistema. Este proceso de diseño se hace normalmente con un «asumido conocimiento completo» de la planta. Más aún, la planta se suele describir por un modelo continuo lineal e invariante en el tiempo. La estructura del controlador se escoge de forma que la respuesta del sistema puede cumplir ciertos criterios de comportamiento.

Un posible objetivo en el diseño de un sistema de control es que la salida del sistema controlado debería exactamente y de forma instantánea reproducir su entrada. Esto es, la función de transferencia del sistema debería ser la unidad:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = 1. \tag{12.18}$$

En otras palabras, el sistema debería poder representarse en un diagrama de Bode como una ganancia de 0 dB de ancho de banda infinito y un desfase de cero grados. En la práctica, esto no es posible, ya que cualquier sistema contendrá componentes de tipo inductivo y capacitivo que son capaces de almacenar energía. Estos elementos y su interconexión con componentes disipativos de energía producen las características de respuesta dinámica del sistema. Tales sistemas reproducen algunas entradas casi exactamente, mientras que otras entradas no se reproducen en absoluto, lo que significa que el ancho de banda del sistema es menor que infinito.

Una vez que se ha reconocido que no se puede pasar por alto la dinámica del sistema, se necesita un nuevo objetivo de diseño. Un objetivo de diseño posible es mantener la curva de respuesta en magnitud tan plana y próxima a la unidad con un ancho de banda tan grande como sea posible para una combinación de planta dada y controlador [22].

Otro objetivo importante del diseño de un sistema de control es que se minimice el efecto debido a las perturbaciones sobre la salida del sistema. Así pues, se desea minimizar $Y(s)/D(s)$ sobre un rango de frecuencias.

Sea el sistema de control que se muestra en la Figura 12.11, donde $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ es la planta y $D(s)$ es la perturbación. Se tiene entonces

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_1 G_2(s)}{1 + G_c G_1 G_2(s)}, \tag{12.19}$$

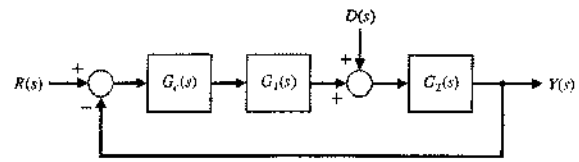


FIGURA 12.11
Un sistema con una perturbación.

y

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_cG_1G_2(s)}. \tag{12.20}$$

Obsérvese que ambas funciones de transferencias, la de la referencia y la de la perturbación, tienen el mismo denominador; en otras palabras, tienen la misma ecuación característica, es decir,

$$1 + G_c(s)G_1(s)G_2(s) = 1 + L(s) = 0. \tag{12.21}$$

Recuérdese que la sensibilidad de $T(s)$ con respecto a $G(s)$ es

$$S_G^T = \frac{1}{1 + G_cG_1G_2(s)}, \tag{12.22}$$

y la ecuación característica es el factor que influye sobre la sensibilidad. La Ecuación (12.22) muestra que para tener una baja sensibilidad S, se precisa un valor elevado de la ganancia de lazo $L(j\omega)$, pero se sabe que una alta ganancia podría causar inestabilidad o una pobre respuesta de $T(s)$. Es decir, se busca lo siguiente:

1. $T(s)$ con un gran ancho de banda y una reproducción fidedigna de $R(s)$.
2. Gran ganancia de lazo $L(s)$ con el fin de minimizar la sensibilidad S.
3. Gran ganancia de lazo $L(s)$ conseguida fundamentalmente mediante $G_c(s)G_1(s)$, ya que $Y(s)/D(s) \simeq 1/G_c(s)G_1(s)$.

Para preparar el diseño de sistemas robustos en términos del dominio de la frecuencia, se debe encontrar un compensador adecuado $G_c(s)$ tal que la sensibilidad en lazo cerrado es menor que algún valor de tolerancia. Pero la minimización de la sensibilidad requiere encontrar un compensador adecuado tal que la sensibilidad en lazo cerrado iguala o está todo lo próxima que se quiera a la sensibilidad mínima alcanzable. Análogamente, el problema del margen de ganancia es encontrar un compensador adecuado para conseguir el margen de ganancia máximo alcanzable. Para las especificaciones en el dominio de la frecuencia, se requieren las siguientes condiciones para el diagrama de Bode de $G_cG(j\omega)$, mostradas en la Figura 12.12.

1. Para estabilidad relativa, $G_cG(j\omega)$ debe tener, para un rango adecuado de ω, una pendiente de no más de -20 dB/década en o cerca de la frecuencia de cruce ω_c.
2. Precisión en estado estacionario lograda por la ganancia a frecuencias bajas.

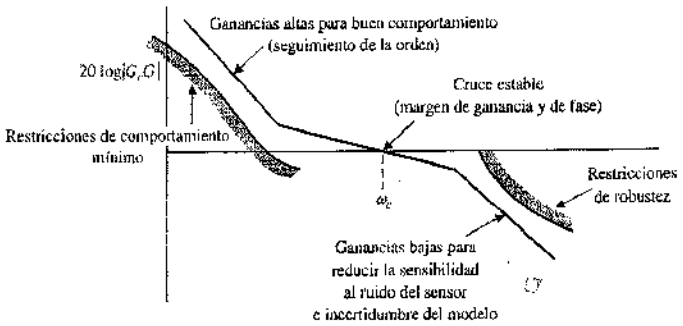

Ganancias altas para buen comportamiento
(seguimiento de la orden)
20 log|G_cG|
Cruce estable
(margen de ganancia y de fase)
Restricciones de comportamiento mínimo
Restricciones de robustez
ω_c
Ganancias bajas para reducir la sensibilidad al ruido del sensor e incertidumbre del modelo
ω

FIGURA 12.12
Diagrama de Bode para $20\log|G_cG(j\omega)|$.

3. Precisión en un ancho de banda ω_B al no permitir que $|G_cG(j\omega)|$ caiga por debajo de un nivel prefijado.
4. Rechazo de perturbación mediante una ganancia elevada de $G_c(j\omega)$ en todo el ancho de banda del sistema.

Utilizando el concepto de sensibilidad de la raíz, se puede decir que S_a^r se debe minimizar mientras se consigue $T(s)$ con raíces dominantes que proporcionará la respuesta apropiada y minimizará el efecto de $D(s)$. Otra vez, se ve que el objetivo es lograr la ganancia del lazo fundamentalmente por medio de $G_c(s)$. Como ejemplo, sea $G_c(s) = K$, $G_1(s) = 1$ y $G_2(s) = 1/s(s + 1)$ para el sistema en la Figura 12.11. Este sistema tiene dos raíces y se selecciona una ganancia K tal que se minimizan $Y(s)/D(s)$ y S_K^r, y $T(s)$ tiene raíces dominantes deseables. La sensibilidad es

$$S_K^r = \frac{dt}{dK}\cdot\frac{K}{r} = \left.\frac{ds}{dK}\right|_{s=r}\cdot\frac{K}{r}, \tag{12.23}$$

y la ecuación característica es

$$s(s + 1) + K = 0. \tag{12.24}$$

Por tanto, $dK/ds = -(2s + 1)$, ya que $K = -s(s + 1)$. Se obtiene entonces

$$S_K^r = \frac{-1}{(2s + 1)}\cdot\left.\frac{[-s(s + 1)]}{s}\right|_{s=r}. \tag{12.25}$$

Cuando $\zeta < 1$, las raíces son complejas y $r = -0.5 + j\omega$. Entonces,

$$|S_K^r| = \left(\frac{0.25 + \omega^2}{4\omega^2}\right)^{1/2}. \tag{12.26}$$

En la Figura 12.13 se representa la magnitud de la sensibilidad para $K = 0.2$ hasta $K = 5$. También se muestra el tanto por ciento de sobreelongación a un escalón. Es mejor reducir la sensibilidad mientras se limita K a 1.5 o menos. Se logra así la mayoría de la reducción que es posible alcanzar en la sensibilidad y al mismo tiempo manteniendo buen comportamiento para la respuesta en escalón. En general, se puede utilizar el procedimiento de diseño como sigue:

1. Representar el lugar de las raíces del sistema compensado con $G_c(s)$ escogido para conseguir la localización deseada de las raíces dominantes.

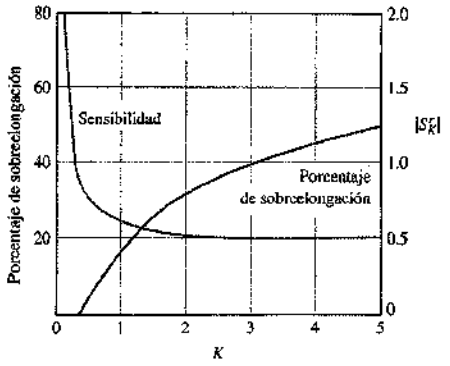


FIGURA 12.13
Sensibilidad y tanto por ciento de sobreelongación para un sistema de segundo orden.

2. Maximizar la ganancia de $G_c(s)$ para reducir el efecto de la perturbación.
3. Determinar S_a^T y conseguir el valor mínimo de la sensibilidad que sea consistente con la respuesta transitoria requerida, tal como se describió en el Paso 1.

EJEMPLO 12.6. Sensibilidad y compensación

Se considera otra vez el sistema del Ejemplo 10.1 cuando $G(s) = 1/s^2$, $H(s) = 1$ y se desea seleccionar $G_c(s)$ por los métodos de respuesta en frecuencia. Por tanto, el compensador se escoge para conseguir una ganancia y un margen de fase apropiado mientras se minimiza la sensibilidad y el efecto de la perturbación. Así pues, se elige

$$G_c(s) = \frac{K(s/z + 1)}{(s/p + 1)}. \tag{12.27}$$

Como en el Ejemplo 10.1, se selecciona $K = 10$ para reducir el efecto de la perturbación. Para lograr un margen de fase de 45°, se selecciona $z = 2.0$ y $p = 12.0$. Se tiene entonces el diagrama compensado que se muestra en la Figura 12.14. Recuérdese que el ancho de banda en lazo cerrado es $\omega_B = 1.6\omega_c$. Es decir, al utilizar el compensador se aumentará el ancho de banda y se mejorará la fidelidad de reproducción de las señales de entrada.

La sensibilidad en ω_c se puede expresar como

$$|S_G^T(\omega_c)| = \left| \frac{1}{1 + G_c G(j\omega)} \right|_{\omega_c}. \tag{12.28}$$

Para estimar $|S_G^T|$ se tiene en cuenta que la carta de Nichols permite obtener

$$|T(\omega)| = \left| \frac{G_c G(\omega)}{1 + G_c G(\omega)} \right|. \tag{12.29}$$

Así, se pueden representar unos pocos puntos de $G_c G(j\omega)$ en la carta de Nichols y entonces leer $T(\omega)$ de la propia carta. Por tanto,

$$|S_G^T(\omega_1)| = \frac{|T(\omega_1)|}{|G_c G(\omega_1)|}, \tag{12.30}$$

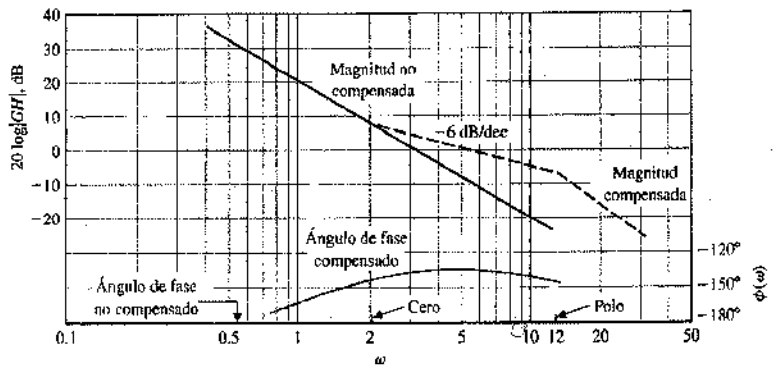


FIGURA 12.14
Diagrama de Bode para el Ejemplo 12.6.

donde ω_1 se escoge arbitrariamente como $\omega_c/2.5$. En general, se selecciona una frecuencia por debajo de ω_c para determinar el valor de $|S(\omega_1)|$. Por supuesto, se desea un valor bajo de la sensibilidad. En la Figura 12.15 se muestra la carta de Nichols para el sistema compensado. Para $\omega_1 = \omega_c/2.5$, se tiene $20 \log T = 2.5$ dB y $20 \log G_c G = 9$ dB. Por tanto,

$$|S(\omega_1)| = \frac{|T|}{|G_c G|} = \frac{1.33}{2.8} = 0.47. \quad \blacksquare$$

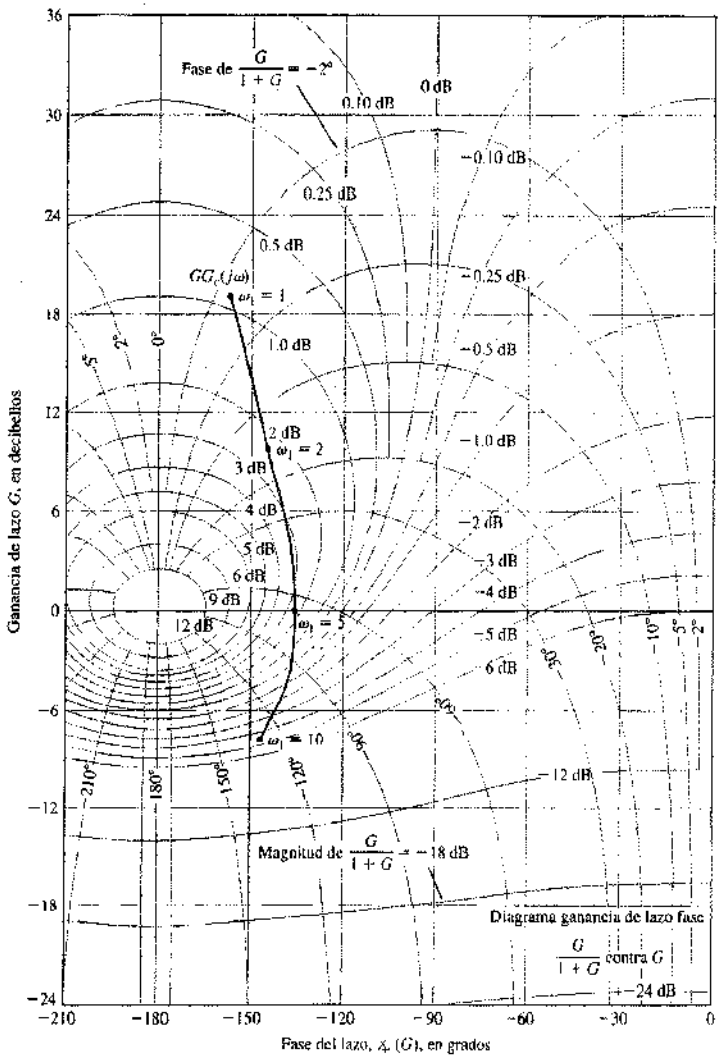


FIGURA 12.15
Carta de Nichols para el Ejemplo 12.7.

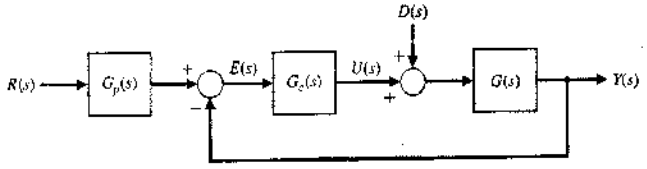


FIGURA 12.16
Sistema de control con realimentación con una entrada deseada $R(s)$ y una entrada no deseada $D(s)$.

EJEMPLO 12.7. Sensibilidad con un compensador de adelanto

Otra vez se considera el sistema del Ejemplo 12.6, utilizando el diseño del lugar de las raíces obtenido en el Ejemplo 10.3. El compensador se escogió como

$$G_c(s) = \frac{8.1(s+1)}{(s+3.6)}, \tag{12.31}$$

para el sistema de la Figura 12.16. Las raíces dominantes son así $s = -1 \pm j2$. Como la ganancia es 8.1, el efecto de la perturbación se reduce y la respuesta temporal cumple las especificaciones. La sensibilidad en una raíz r se puede obtener suponiendo que el sistema, con raíces dominantes, se puede aproximar por el sistema de segundo orden

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + K} = \frac{K}{s^2 + 2s + K},$$

dado que $\zeta\omega_n = 1$. La ecuación característica es así

$$s^2 + 2s + K = 0.$$

Entonces $dK/ds = -(2s+2)$, como $K = -(s^2 + 2s)$. Por tanto,

$$S_K^r = \frac{-1}{(2s+2)} \cdot \frac{-(s^2+2s)}{s}\bigg|_{s=r} = \frac{(s+2)}{(2s+2)}\bigg|_{s=r}, \tag{12.32}$$

donde $r = -1 + j2$. Sustituyendo $s = r$, se obtiene

$$|S_K^r| = 0.56.$$

Si se aumenta la ganancia a $K = 10$, se espera $r \simeq -1.1 + j2.2$. La sensibilidad es entonces

$$|S_K^r| = 0.53.$$

Es decir, cuando K aumenta, la sensibilidad disminuye, pero el comportamiento transitorio se deteriora. ■

12.6. CONTROLADORES PID

El controlador PID tiene la función de transferencia

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s.$$

La popularidad de los controladores PID se puede atribuir parcialmente a su comportamiento robusto en un rango amplio de condiciones de operación y parcialmente también a su simplicidad funcional que permite a los ingenieros operarlos de una forma simple y directa. Para implementar un controlador de este tipo, se deben determinar tres parámetros para el proceso dado: ganancia proporcional, ganancia integral y ganancia derivativa [35].

Sea el controlador PID

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s = \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s}$$

$$= \frac{K_3(s^2 + as + b)}{s} = \frac{K_3(s+z_1)(s+z_2)}{s}, \tag{12.33}$$

donde $a = K_1/K_3$ y $b = K_2/K_3$. Por tanto, un controlador PID introduce una función de transferencia con un polo en el origen y dos ceros que se pueden localizar en cualquier parte en el semiplano izquierdo s.

Recuérdese que un lugar de las raíces comienza en los polos y finaliza en los ceros. Si se tiene un sistema tal como se muestra en la Figura 12.16 con

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+5)},$$

y se usa un controlador PID con ceros complejos, se puede representar el lugar de las raíces tal como se muestra en la Figura 12.17. Cuando se aumenta la ganancia K_3 del controlador, las raíces complejas tienden a los ceros. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{G(s)G_c(s)G_p(s)}{1 + G(s)G_c(s)}$$

$$= \frac{K_3(s+z_1)(s+\hat{z}_1)}{(s+r_2)(s+r_1)(s+\hat{r}_1)} G_p(s)$$

$$\simeq \frac{K_3 G_p(s)}{(s+r_2)}, \tag{12.34}$$

ya que los ceros y las raíces complejas son aproximadamente iguales ($r_1 \simeq z_1$). Fijando $G_p(s) = 1$ se tiene

$$T(s) = \frac{K_3}{s+r_2} \simeq \frac{K_3}{s+K_3} \tag{12.35}$$

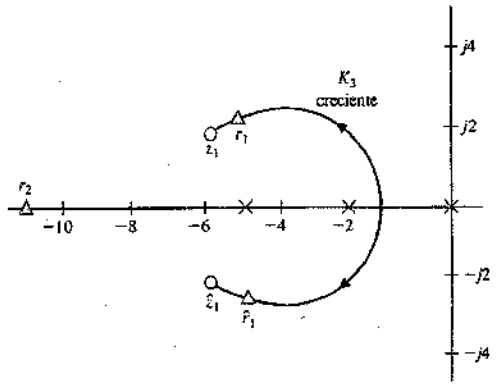


FIGURA 12.17
Lugar de las raíces con $z_1 = -6 + j2$.

cuando $K_3 \gg 1$. El único factor limitante es la magnitud permitida de $U(s)$ (Figura 12.16) cuando K_3 es grande. Si K_3 es 100, el sistema tiene una respuesta rápida y un error nulo en estado estacionario. Más aún, el efecto de la perturbación se reduce significativamente.

En general, se debe observar que los controladores PID son particularmente útiles para reducir el error en estado estacionario y mejorar la respuesta transitoria cuando $G(s)$ tiene uno o dos polos (o puede aproximarse por una planta de segundo orden).

12.7. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL PID ROBUSTOS

La selección de los tres coeficientes de los controladores PID es básicamente un problema de búsqueda en un espacio tridimensional. Puntos en el espacio de búsqueda corresponden a diferentes selecciones de los tres parámetros del controlador PID. Seleccionando puntos diferentes del espacio de parámetros se pueden obtener, por ejemplo, diferentes respuestas para una entrada de tipo escalón. Un controlador PID se puede determinar moviéndose en este espacio de búsqueda sobre una base de prueba y error.

El problema principal en la selección de los tres coeficientes es que éstos no se traducen rápidamente en el comportamiento deseado y en las características de robustez que el diseñador del sistema de control tiene en mente. Se han propuesto algunas reglas y métodos para resolver este problema. En esta sección, se consideran algunos métodos de diseño utilizando el lugar de las raíces e índices de comportamiento.

El primer método de diseño utiliza el índice de comportamiento ITAE de la Sección 5.9 y los coeficientes óptimos de la Tabla 5.6 para una entrada en escalón o la Tabla 5.7 para una entrada en rampa. De aquí, se seleccionan los tres coeficientes PID para minimizar el índice de comportamiento ITAE que produce una excelente respuesta transitoria a un escalón [Figura 5.30(c)] o a una rampa. El procedimiento de diseño consiste en tres pasos:

1. Seleccionar la ω_n del sistema en lazo cerrado especificando el tiempo de asentamiento.
2. Determinar los tres coeficientes utilizando la ecuación óptima apropiada (Tabla 5.6) y la ω_n del Paso 1 para obtener $G_c(s)$.
3. Determinar un prefiltro $G_p(s)$ de forma que la función de transferencia del sistema en lazo cerrado, $T(s)$, no tenga ningún cero, tal como requiere la Ecuación (5.47).

EJEMPLO 12.8. Control robusto de temperatura

Sea un controlador de temperatura con un sistema de control tal como se muestra en la Figura 12.16 y una planta

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}. \tag{12.36}$$

Si $G_c(s) = 1$, el error en estado estacionario es 50%, y el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) es de 3.2 segundos para una entrada en escalón. Se desea obtener un comportamiento ITAE óptimo para una entrada en escalón y un tiempo de asentamiento de menos de 0.5 segundos. Utilizando un controlador PID se tiene

$$G_c(s) = \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s}. \tag{12.37}$$

Por tanto, la función de transferencia en lazo cerrado sin prefiltro [$G_p(s) = 1$] es

$$T_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G(s)}{1 + G_c G(s)} = \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s^3 + (2 + K_3)s^2 + (1 + K_1)s + K_2}. \tag{12.38}$$

Los coeficientes óptimos de la ecuación característica para ITAE se obtienen de la Tabla 5.6 como

$$(s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3). \tag{12.39}$$

Se necesita seleccionar ω_n para cumplir la especificación del tiempo de asentamiento. Como $T_s = 4/\zeta\omega_n$ y ζ es desconocida pero próxima a 0.8, se fija $\omega_n = 10$. Igualando el denominador de la Ecuación (12.38) con la Ecuación (12.39), se obtienen los tres coeficientes como $K_1 = 214$, $K_3 = 15.5$ y $K_2 = 1000$.

Entonces la Ecuación (12.38) resulta

$$T_1(s) = \frac{15.5s^2 + 214s + 1000}{s^3 + 17.5s^2 + 215s + 1000} = \frac{15.5(s + 6.9 + j4.1)(s + 6.9 - j4.1)}{s^3 + 17.5s^2 + 215s + 1000}. \tag{12.40}$$

La respuesta de este sistema a una entrada en escalón tiene una sobreelongación del 32%, tal como se registra en la Tabla 12.2.

Se selecciona un prefiltro $G_p(s)$ de forma que se consiga la respuesta ITAE deseada con

$$T(s) = \frac{G_c G G_p(s)}{1 + G_c G(s)} = \frac{1000}{s^3 + 17.5s^2 + 215s + 1000}. \tag{12.41}$$

Por tanto, se requiere que

$$G_p(s) = \frac{64.5}{(s^2 + 13.8s + 64.5)} \tag{12.42}$$

con el fin de eliminar los ceros en la Ecuación (12.40) y traer el numerador global a 1000. En la Tabla 12.2 se indica la respuesta del sistema $T(s)$ a una entrada en escalón. El sistema tiene una pequeña sobreelongación, un tiempo de asentamiento de menos de 1/2 segundo y un error nulo en estado estacionario. Además, para una perturbación $D(s) = 1/s$, el valor máximo de $y(t)$ debido a la perturbación es 0.4% de la magnitud de la perturbación. Esto es un diseño muy favorable. ■

Tabla 12.2 Resultados del ejemplo 12.8

Controlador	$G_c(s) = 1$	PID y $G_p(s) = 1$	PID con prefiltro $G_p(s)$
Porcentaje de sobreelongación	0	31.7%	1.9%
Tiempo de asentamiento (segundos)	3.2	0.20	0.45
Error de estado estacionario	50.1%	0.0%	0.0%
$\lvert y(t)/d(t)\rvert_{\text{máximo}}$	52%	0.4%	0.4%

EJEMPLO 12.9. Diseño de sistema robusto

Se considera otra vez el sistema del Ejemplo 12.6 cuando la planta varía significativamente, de forma que

$$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2}, \tag{12.43}$$

cuando $0.5 \leqslant \tau \leqslant 1$ y $1 \leqslant K \leqslant 2$. Se desea conseguir comportamiento robusto usando un sistema óptimo ITAE con un prefiltro que tenga una sobreelongación de menos del 4% y un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) de menos de 2 segundos mientras $G(s)$ puede tener cualquier valor en el rango indicado. Se selecciona $\omega_n = 8$ con el fin de lograr el tiempo de asentamiento y determinar los coeficientes ITAE para $K = 1$ y $\tau = 1$. Realizando los cálculos se obtiene el sistema sin un prefiltro $[G_p(s) = 1]$ como

$$T_1(s) = \frac{12(s^2 + 11.38s + 42.67)}{s^3 + 14s^2 + 137.6s + 512} \tag{12.44}$$

y

$$G_c(s) = \frac{12(s^2 + 11.38s + 42.67)}{s}. \tag{12.45}$$

Se selecciona un prefiltro

$$G_p(s) = \frac{42.67}{(s^2 + 11.38s + 42.67)} \tag{12.46}$$

para obtener la función de transferencia ITAE óptima

$$T(s) = \frac{512}{s^3 + 14s^2 + 137.6s + 512}. \tag{12.47}$$

Se obtienen entonces las respuestas a un escalón para las cuatro condiciones: $\tau = 1$, $K = 1$; $\tau = 0.5$, $K = 1$; $\tau = 1$, $K = 2$, y $\tau = 0.5$, $K = 2$. En la Tabla 12.3 se resumen los resultados. Éste es un sistema muy robusto. ■

El valor de ω_n que se puede escoger estará limitado si se considera el máximo valor permitido de $u(t)$, donde $u(t)$ es la salida del controlador tal como se muestra en la Figura 12.16. Si el valor máximo de $e(t)$ es 1, entonces $u(t)$ normalmente estaría limitado a 100 o menos. Como ejemplo, considérese el sistema de la Figura 12.16 con un controlador PID, $G(s) = 1/s(s + 1)$ y el prefiltro necesario $G_p(s)$ para conseguir comportamiento ITAE. Si se selecciona $\omega_n = 10$, 20 y 40, en la Tabla 2.4 se muestra el máximo valor de $u(t)$. Si se desea limitar $u(t)$ a un máximo igual a 100 se necesita limitar ω_n a 16. Así pues, se está limitado en el tiempo de asentamiento que se puede conseguir.

Tabla 12.3. Resultados del Ejemplo 12.9 con $\omega_n = 8$

Condiciones de planta	$\tau = 1$, $K = 1$	$\tau = 0.5$, $K = 1$	$\tau = 1$, $K = 2$	$\tau = 0.5$, $K = 2$
Porcentaje de sobreelongación	2%	0%	0%	1%
Tiempo de asentamiento (segundos)	1.25	0.8	0.8	0.9

Tabla 12.4. Valor máximo de entrada a la planta

ω_n	10	20	40
$u(t)$ máximo para $R(s) = 1/s$	35	135	550
Tiempo de asentamiento (segundos)	0.9	0.5	0.3

Se considera el diseño de un compensador PID utilizando técnicas de respuesta en frecuencia para un sistema con retardo de forma que

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{(\tau s + 1)}. \tag{12.48}$$

Este tipo de planta representa a muchos procesos industriales que incorporan un retardo de tiempo. Se utiliza el compensador PID para introducir dos ceros iguales, es decir,

$$G_c(s) = \frac{K_2(\tau_1 s + 1)^2}{s}. \tag{12.49}$$

El método de diseño es como sigue:

1. Representar el diagrama de Bode no compensado de $K_2G(s)/s$ con una ganancia K_2 que satisfaga los requisitos de error en estado estacionario.
2. Colocar los dos ceros iguales en o cerca de la frecuencia de cruce ω_c.
3. Comprobar los resultados y ajustar K_2 o la localización de los ceros si es necesario.

EJEMPLO 12.10. Control PID de un sistema con retardo

Sea el sistema de la Figura 12.16 cuando

$$G(s) = \frac{Ke^{-0.1s}}{(0.1s + 1)}, \tag{12.50}$$

donde se selecciona $K = 20$ para conseguir un error en estado estacionario pequeño para una entrada en escalón y donde $G_p(s) = 1$. Se desea una sobreelongación a una entrada en escalón de menos del 5%.

Representando el diagrama de Bode de $G(j\omega)$, se observa que el sistema no compensado tiene un margen de fase negativo y que el sistema es inestable.

Se utilizará un controlador PID de la forma de la Ecuación (12.49) para lograr el margen de fase que se desea de 70°. La función de transferencia es entonces

$$GG_c(s) = \frac{20e^{-0.1s}(\tau_1 s + 1)^2}{s(0.1s + 1)}, \tag{12.51}$$

donde $K_2K = 20$. Se representa el diagrama de Bode sin los dos ceros, tal como se muestra en la Figura 12.18. El margen de fase es de $-32°$ y el sistema es inestable antes de la introducción de los dos ceros.

Como se ha introducido un polo en el origen debido al término interno en el compensador PID, se puede reducir la ganancia K_2K ya que e_{ss} es ahora cero. Se colocan los

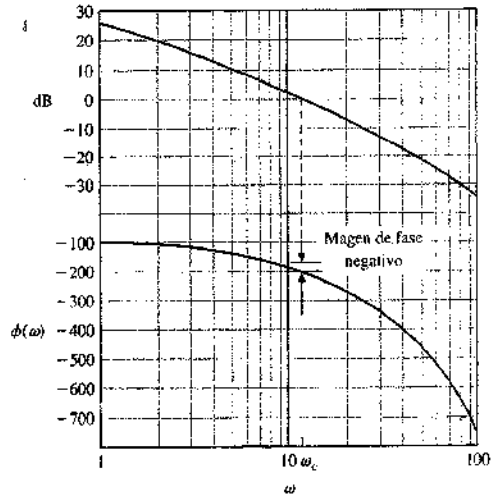


FIGURA 12.18
Diagrama de Bode de $G(s)/s$ para el Ejemplo 12.10.

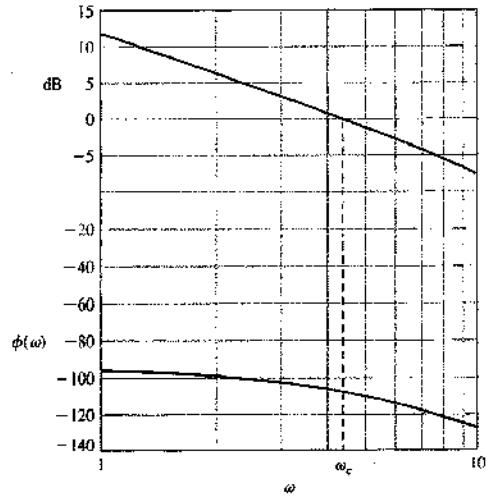


FIGURA 12.19
Diagrama de Bode de $G_cG(s)$ para el Ejemplo 12.10.

dos ceros en o cerca de la frecuencia de cruce $\omega_c = 11$. Se escoge fijar $\tau_1 = 0.06$ tal que los dos ceros se fijan en $\omega = 16.7$. También se reduce la ganancia a $K_2K = 4.5$. Se obtiene entonces la respuesta en frecuencia que se muestra en la Figura 12.19, donde

$$G_cG(s) = \frac{4.5(0.06s + 1)^2 e^{-0.1s}}{s(0.1s + 1)}. \tag{12.52}$$

La nueva frecuencia de cruce es $\omega_c = 4.5$ y el margen de fase es de 70°. La respuesta a un escalón de este sistema no tiene sobreelongación y tiene un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) de 0.80 segundos. Esta respuesta satisface los requisitos. Sin embargo, si se desea ajustar aún más el sistema se puede aumentar K_2K a 10 y conseguir una respuesta algo más rápida con una sobreelongación de menos del 5%. ■

Como consideración final del diseño de sistemas de control robusto utilizando un controlador PID, se considera el método del lugar de las raíces en el plano s. Este método de diseño se puede expresar simplemente como sigue:

1. Colocar los polos y ceros de $G(s)/s$ en el plano s.
2. Seleccionar una localización de los ceros de $G_c(s)$ que resulten en un lugar de las raíces aceptables y raíces dominantes adecuadas.
3. Comprobar la respuesta transitoria del sistema compensado e iterar el Paso 2 si es necesario.

El método del lugar de las raíces se ilustra en el siguiente ejemplo de diseño para el autopiloto de un avión.

12.8. EJEMPLO DE DISEÑO: AUTOPILOTO DE UN AVIÓN

Un sistema de control típico del autopiloto de un avión consiste en dispositivos eléctricos, mecánicos e hidráulicos que mueven los alerones, elevadores, controladores de caudal de combustible y otros componentes que hacen que el avión varíe su vuelo. Los sensores proporcionan información sobre la velocidad, dirección, velocidad de rotación y otros datos de vuelo. Esta información se combina con las características de vuelo deseadas (órdenes) que están electrónicamente disponibles para el autopiloto. El autopiloto debería ser capaz de volar el avión en una dirección y en las condiciones fijadas por el piloto. La orden con frecuencia consta de una dirección predeterminada. El diseño a menudo se centra en un avión que se mueve hacia delante y que se desplaza algo hacia arriba o hacia abajo sin ir hacia la derecha o izquierda y sin girar (rotar los extremos de las alas). Tal estudio se denomina diseño del eje de cabeceo. El avión se representa por una planta [26]

$$G(s) = \frac{K}{(s + 1/\tau)(s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s - \omega_1^2)}, \tag{12.53}$$

donde τ es la constante de tiempo del actuador. Sea $\tau = 1/4$, $\omega_1 = 2$ y $\zeta = 1/2$. En este caso la representación en el plano s tiene dos polos complejos, un polo en el origen y un polo en $s = -4$, tal como se muestra en la Figura 12.20. Los polos complejos, que representan la dinámica del avión, pueden variar dentro del rectángulo de líneas a trazos que se muestra en la figura. Tal como se muestra, se escogen entonces los ceros del controlador como $s = -1.3 \pm j2$. Se selecciona la ganancia K de forma que las raíces r_2 y $\bar{r}_2$ sean complejas con un ζ de $1/\sqrt{2}$. Las otras raíces, r_1 y $\bar{r}_1$, están muy cerca de los ceros. Por tanto, la función de transferencia en lazo cerrado es aproximadamente

$$T(s) \simeq \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{5}{s^2 + 3.16s + 5}. \tag{12.54}$$

dado que $\omega_n = \sqrt{5}$ y $\zeta = 1/\sqrt{2}$. La respuesta resultante a una entrada en escalón tiene una sobreelongación de 4.5% y un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) de 2.5 segundos, como se esperaba.

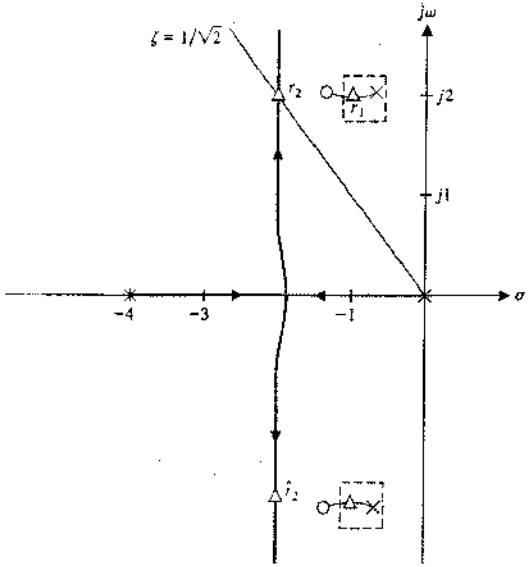


FIGURA 12.20
Lugar de las raíces para el autopiloto de un avión. Los polos complejos pueden variar dentro del recuadro de líneas a trazos.

12.9. DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL DE UN TELESCOPIO ESPACIAL

Los científicos han propuesto la operación de un vehículo espacial como un laboratorio de investigación basado en el espacio y banco de pruebas para equipos que se van a utilizar en una estación espacial tripulada. La instalación espacial industrial (ISF) permanecería en el espacio y los astronautas podrían usarla sólo cuando la nave está conectada [16, 21]. La ISF será la primera instalación espacial permanente comercial operada por humanos diseñada con fines de I+D, comprobación y eventualmente procesamiento en el entorno espacial.

Se considerará un experimento operado en el espacio pero controlado desde la Tierra. El objetivo es manipular y posicionar un pequeño telescopio para apuntar de manera precisa a un planeta. Se necesita tener error nulo en estado estacionario y al mismo tiempo mantener una respuesta rápida a un escalón con una sobreelongación de menos del 5%. El actuador escogido es un actuador de baja potencia y el modelo del actuador y telescopio combinado se muestra en la Figura 12.21. Las señales de órdenes se reciben desde una estación en la Tierra con un retardo de $\pi/16$ segundos. Un sensor medirá la dirección de apuntamiento del telescopio de forma precisa. Sin embargo, esta medida se vuelve a transmitir a Tierra con un retardo de $\pi/16$ segundos. Así pues, la función

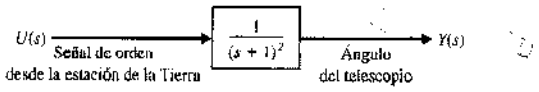


FIGURA 12.21
Modelo de un telescopio y de un actuador de baja potencia.

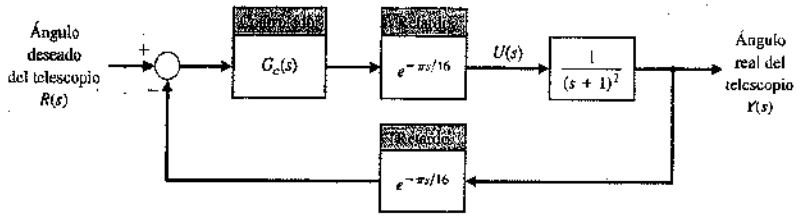


FIGURA 12.22
Sistema de control con realimentación para el experimento del telescopio.

de transferencia total del telescopio, actuador, sensor y retardo en el recorrido (Figura 12.22) es

$$G(s) = \frac{e^{-s\pi/8}}{(s+1)^2}. \tag{12.55}$$

Se propone un controlador que es el controlador de tres términos descrito en la Sección 12.6, donde

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s = \frac{K_1 s + K_2 + K_3 s^2}{s}. \tag{12.56}$$

La utilización sólo del término proporcional no será aceptable ya que se requiere un error en estado estacionario de cero para una entrada en escalón. Así pues, se debe usar un valor finito de K_2, y por tanto se puede elegir emplear un control proporcional-integral (PI) o un control proporcional-integral-derivativo (PID).

En primer lugar se intenta un control PI, de forma que

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K_1 s + K_2}{s}. \tag{12.57}$$

Como se tiene un retardo puro, e^{-sT}, se emplean los métodos de respuesta en frecuencia para el proceso de diseño. Es decir, se traducirá la especificación de sobreelongación al dominio de la frecuencia. Si se tienen dos raíces características dominantes, la sobreelongación a un escalón es del 5% cuando $\zeta = 0.7$ o el requisito de margen de fase es de 70°.

Si se escoge $K_1 = 0.022$ y $K_2 = 0.22$, se tiene

$$G_c(s)G(s) = \frac{0.22(0.1s+1)e^{-s\pi/8}}{s(s+1)^2}, \tag{12.58}$$

y en la Figura 12.23 se muestra el diagrama de Bode. La localización del cero en $s = 10$ se escoge para añadir un adelanto de fase con el fin de conseguir el margen de fase deseado. Un procedimiento iterativo da lugar a una serie de valores para K_1 y K_2 hasta que se logra el margen de fase deseado. Obsérvese que se ha conseguido un margen de fase de 63°. Se representa la respuesta a un escalón y se determina que la sobreelongación es de 4.75 con un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) de 16 segundos, tal como se muestra en la Tabla 12.5.

El controlador proporcional-integral-derivativo es

$$G_c(s) = \frac{K_1 s + K_2 + K_3 s^2}{s}. \tag{12.59}$$

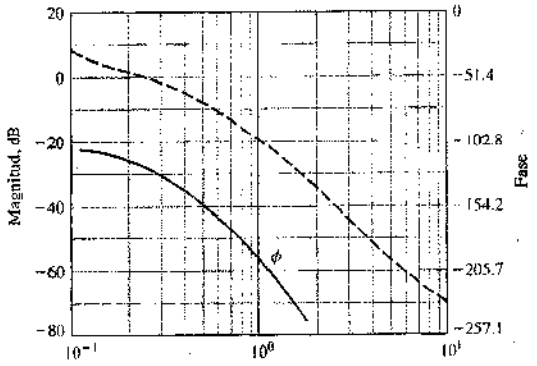


FIGURA 12.23 Diagrama de Bode para el sistema con el controlador PI.

Tabla 12.5 Respuesta en escalón del telescopio espacial para dos controladores

	Error en estado estacionario	Porcentaje de sobreelongación	Tiempo de asentamiento (segundos)
Controlador PI	0	4.7	16.0
Controlador PID	0	3.7	5.8

Se tienen ahora tres parámetros para variar con el objetivo de lograr el margen de fase deseado. Si se seleccionan después de alguna iteración $K_1 = 0.8$, $K_2 = 0.5$ y $K_3 = 10^{-3}$, se obtiene un margen de fase de 64°. El porcentaje de sobreelongación es de 3.7% y el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) es de 5.8 segundos. Quizás la manera más fácil de seleccionar las constantes de las ganancias es permitir que K_3 sea inicialmente un número pequeño pero no cero y $K_1 = K_2 = 0$ y a continuación se representa la respuesta en frecuencia. En este caso, se selecciona $K_3 = 10^{-3}$ y se obtiene un diagrama de Bode. Entonces se utiliza $K_1 \simeq K_2$ y se itera el proceso para obtener los valores apropiados de estas ganancias no especificadas.

En la Tabla 12.5 se registra el comportamiento del sistema compensado PI y PID. El controlador PID es el más deseable porque proporciona un tiempo de asentamiento más corto.

12.10. DISEÑO DE UNA BOBINADORA ROBUSTA

Nylon monofilamento se produce mediante un proceso de extrusión que saca filamentos a una velocidad constante. El producto se enrolla en una bobina que gira a una velocidad máxima de 2000 rpm. La tensión en el filamento debe mantenerse entre 0.2 y 0.6 libras para asegurar que no se rompe. El diámetro de la bobina varía entre 2 y 4 pulgadas.

El filamento se deposita en la bobina mediante un brazo actuado por un tornillo sin fin que oscila de un lado a otro a velocidad constante, tal como se muestra en la Figura 12.24(a). El brazo debe cambiar de dirección rápidamente al final del movimiento. La velocidad requerida en el tornillo sin fin es de 60 rpm. El requisito fundamental de la bobinadora es proporcionar una tensión controlada. Como el diámetro del arrollamiento varía de 2 a 1, la tensión caerá en un 50% desde el principio hasta el fin.

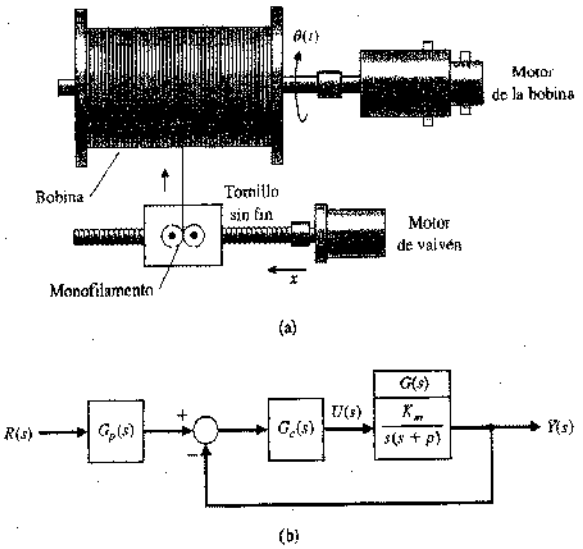


FIGURA 12.24 Un bobinador monofilamento.

El sistema de control tendrá una estructura del sistema tal como se muestra en la Figura 12.24(b), por lo que se selecciona un controlador PID. Las variaciones de los parámetros son $1.5 \leqslant K_m \leqslant 2.5$ y $3 \leqslant p \leqslant 5$ con las condiciones nominales $K_m = 2$ y $p = 4$. Además, un tercer polo en $s = -50$ ha sido omitido del modelo. Los requerimientos son una sobreelongación menor que 2.5% y un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) menor que 0.4 segundos. La magnitud de $u(t)$ debe ser menor que 100.

Utilizando un controlador PID, el diseño ITAE y los parámetros nominales, se determina ω_n a partir del requisito del tiempo de asentamiento. Como se espera que $\zeta \simeq 0.8$, se utiliza

$$T_s = \frac{4}{0.8\omega_n} < 0.4.$$

Se selecciona $\omega_n = 23$ como el máximo permisible para $|u| < 100$. Entonces, para

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s,$$

se obtiene $K_1 = 568.68$, $K_2 = 6083.5$ y $K_3 = 18.13$. Utilizando el prefiltro apropiado se obtiene la respuesta que se registra en la Tabla 12.6. El sistema no ofrece comportamiento robusto ya que el requisito de sobreelongación no se satisface cuando se consideran los parámetros del caso más desfavorable.

También se examina el comportamiento del sistema con los parámetros nominales pero con el polo no modelado añadido de forma que la planta real es

$$G(s) = \frac{2(50)}{s(s+4)(s+50)}. \tag{12.60}$$

TABLA 12.5 Respuesta de la bobinadora a una entrada en escalón unitario, diseño óptimo

	Parámetros	Porcentaje de sobreelongación	Tiempo de asentamiento (segundos)	$\left\|\frac{u(t)}{r(t)}\right\|_{\text{máxima}}$
Parámetros nominales	$K_m = 2$, $p = 4$	1.96%	0.318	98
Parámetros del caso más desfavorable	$K_m = 1.5$, $p = 3$	7.48%	0.375	95
Parámetros nominales y tercer polo añadido en $s = -50$		9.82%	0.732	90

[Obsérvese que la ganancia, $\lim_{s\to 0} sG(s)$, permanece en 0.5.] En la Tabla 12.6 se muestra la respuesta del controlador PID con el polo añadido. Otra vez, el sistema falla el requisito de comportamiento robusto.

Se necesita ajustar el sistema de forma que el comportamiento con los parámetros del caso más desfavorable es aceptable. Se examina el lugar de las raíces para los parámetros nominales mostrados en la Figura 12.25. Se inserta una ganancia en cascada K por delante de $G_c(s)$ de manera que se tiene $KG_cG(s)$. Entonces en el lugar se muestran las raíces para $K = 1$ y $K = 3$. Como la respuesta del caso más desfavorable ocurre cuando la constante del motor K_m cae a 1.5, se utiliza la ganancia en cascada $K = 3$ para mover las raíces a la izquierda del plano s. Así, cuando la ganancia K_m cae a 1.5, las

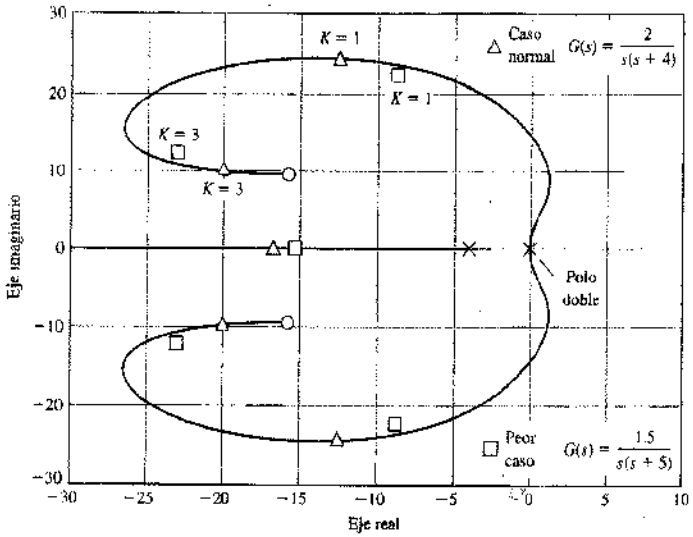


FIGURA 12.25
Lugar de las raíces para el caso normal y el caso más desfavorable con $K = 1$ y $K = 3$.

TABLA 12.6 Respuesta de la bobinadora a una entrada en escalón unitario, diseño óptimo con tercer polo añadido en $s = -50$

	Porcentaje de sobreelongación	Tiempo de asentamiento (segundos)
Nominal parámetros	0.12%	0.218
Parámetros del caso más desfavorable	0.47%	0.214
Parámetros nominales y tercer polo añadido	0.50%	0.242

raíces están todavía en la región deseada. En la Tabla 12.7 se registra la respuesta del sistema con $K = 3$ para las condiciones nominal y del caso más desfavorable así como con el polo añadido. Este sistema cumple todas las especificaciones. Este método usa una ganancia en cascada que, cuando se ajusta correctamente, llevará a las raíces dominantes cerca de los ceros complejos del controlador PID. Así, cuando ocurre el cambio en el peor parámetro el sistema todavía mantendrá el comportamiento requerido.

12.11. SISTEMA DE CONTROL ROBUSTO CON MODELO INTERNO

En la Figura 12.26 se muestra el sistema de control con modelo interno que fue considerado previamente en la Sección 11.8. Se considera ahora el uso del diseño del modelo interno con atención especial al comportamiento robusto del sistema. El **principio del modelo interno** dice que si $G_c(s)G(s)$ contiene $R(s)$ entonces $y(t)$ seguirá a $r(t)$ asintóticamente (en el estado estacionario) y el seguimiento es robusto.

Examinando el sistema de la Figura 12.26 se observa que, para plantas de orden bajo, no se requerirá realimentación de las variables de estado y se puede obtener una adecuada $G_c(s)$. Sin embargo, con sistemas de orden elevado, se pueden necesitar la realimentación de todas las variables de estado.

Sea un sistema simple con $G(s) = 1/s$ para la cual se busca una respuesta en rampa con un error nulo en estado estacionario. Un controlador PI es suficiente y se fija $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ (no hay realimentación de las variables de estado). Entonces se tiene

$$G_cG(s) = \left(K_1 + \frac{K_2}{s}\right)\frac{1}{s} = \frac{(K_1 s + K_2)}{s^2} \tag{12.61}$$

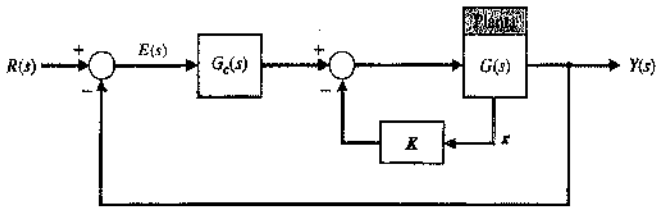


FIGURA 12.26
El sistema de control con modelo interno.

Obsérvese que para una rampa, $R(s) = 1/s^2$, que se contiene como un factor de la Ecuación (12.61), y la función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{(K_1 s + K_2)}{s^2 + K_1 s + K_2}. \tag{12.62}$$

Utilizando las especificaciones ITAE para una respuesta en rampa (Tabla 5.7), se requiere que

$$T(s) = \frac{3.2\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 3.2\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{12.63}$$

Se selecciona ω_n para satisfacer una especificación para el tiempo de asentamiento. Para un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) de 1 segundo, se escoge $\omega_n = 5$. Entonces se requiere que $K_1 = 16$ y $K_2 = 25$. La respuesta de este sistema se asienta en 1 segundo y desde entonces sigue a la rampa con un error nulo en estado estacionario. Si este sistema (diseñado para una entrada en rampa) recibe una entrada en escalón la respuesta tiene una sobreelongación del 5% y un tiempo de asentamiento de 1.5 segundos. Este sistema es muy robusto a cambios en la planta. Por ejemplo, si $G(s) = K/s$ cambia la ganancia en +50% de su valor nominal en $K = 1$, el cambio en la respuesta de la rampa es insignificante.

EJEMPLO 12.11. Diseño de un sistema de control con modelo interno

Sea el sistema de la Figura 12.27 con realimentación de variables de estado y un compensador $G_c(s)$. Se desea seguir a una entrada en escalón con error nulo en estado estacionario. Así pues, se selecciona un controlador PID como $G_c(s)$. Se tiene entonces

$$G_c(s) = \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s},$$

y $G(s)G_c(s)$ contendrá $R(s) = 1/s$, que es la orden de entrada. Obsérvese que se realimentan ambas variables de estado y se añaden estas señales adicionales después de $G_c(s)$ con el fin de retener el integrador en $G_c(s)$.

El objetivo es conseguir un tiempo de asentamiento (dentro del 2% del valor final) en menos de 1 segundo y una respuesta plana (*véase* la Sección 10.11) teniendo al mismo tiempo una respuesta robusta. Se supondrá que los dos polos de $G(s)$ pueden cambiar por ±50%. La condición más desfavorable es entonces

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{(s + 0.5)(s + 1)}.$$

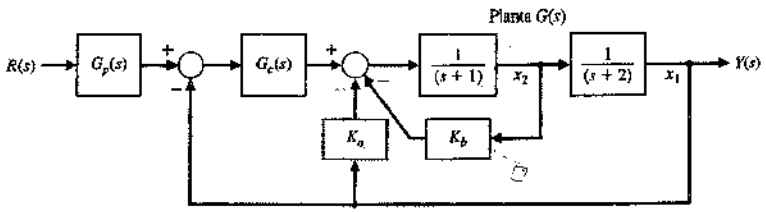


FIGURA 12.27
Un control con modelo interno con realimentación de variable de estado y $G_c(s)$.

Un método es diseñar el control para esta condición de caso más desfavorable. Otro enfoque que se utilizará aquí es diseñar para la función de transferencia nominal $G(s)$ con una especificación de la mitad del tiempo de asentamiento deseado. De esta manera se espera cumplir el requisito del tiempo de asentamiento y lograr un sistema muy rápido de gran robustez. Obsérvese que el prefiltro $G_p(s)$ se emplea par conseguir la forma deseada de $T(s)$.

La respuesta deseada es plana (*véase* la Tabla 10.2), así que se usa una función de transferencia de tercer orden como

$$T(s) = \frac{\omega_n^3}{s^3 + 1.9\omega_n s^2 + 2.20\omega_n^2 s + \omega_n^3}, \tag{12.64}$$

y el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) es $T_s = 4.04/\omega_n$. Para un tiempo de asentamiento de 1/2 segundo, se usa $\omega_n = 8.08$.

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema de la Figura 12.27 con la adecuada $G_p(s)$ es

$$T(s) = \frac{K_2}{s^3 + (3 + K_3 + K_b)s^2 + (2 + K_1 + K_a + 2K_b)s + K_2}. \tag{12.65}$$

Se fija $K_a = 10$, $K_b = 2$, $K_1 = 127.6$, $K_2 = 527.5$ y $K_3 = 10.35$. Obsérvese que $T(s)$ podría conseguirse con otras ganancias, incluyendo $K_b = 0$.

La respuesta escalón de este sistema tiene una respuesta plana con una sobreelongación de 1.65% y un tiempo de asentamiento de 0.5 segundos. Cuando los polos de la planta de $G(s)$ cambian en ± 50%, la sobreelongación se modifica en 1.86% y el tiempo de asentamiento pasa a ser de 0.95 segundos. Éste es un diseño excelente de un sistema con respuesta plana muy robusto. ■

12.12. DISEÑO DE UNA MÁQUINA DE TORNEADO DE DIAMANTE DE ULTRAPRECISIÓN

El diseño de una máquina de torneado de diamante de ultraprecisión ha sido estudiado en el Lawrence Livermore National Laboratory. Esta máquina da forma a dispositivos ópticos tales como espejos de ultraprecisión utilizando una herramienta de diamante como elemento de corte. En este análisis se considerará sólo el control del eje z. Empleando identificación de la respuesta en frecuencia con entrada sinusoidal al actuador se determinó que

$$G(s) = \frac{4500}{(s + 60)}. \tag{12.66}$$

El sistema puede acomodar elevadas ganancias, como 4500, ya que la orden de entrada $r(t)$ es una serie de órdenes en escalón de muy pequeña magnitud (una fracción de una micra). El sistema tiene un lazo externo para realimentación de la posición utilizando un interferómetro de tipo láser con una precisión de 0.1 micra (10^{-7} m). Un lazo de realimentación interno se utiliza también para realimentación de la velocidad, tal como se muestra en la Figura 12.28.

Se desea seleccionar los controladores, $G_1(s)$ y $G_2(s)$, para obtener un sistema sobreamortiguado de gran ancho de banda, muy robusto. El sistema robusto debe acomodar cambios en $G(s)$ debido a cargas, materiales y requisitos de corte variables.

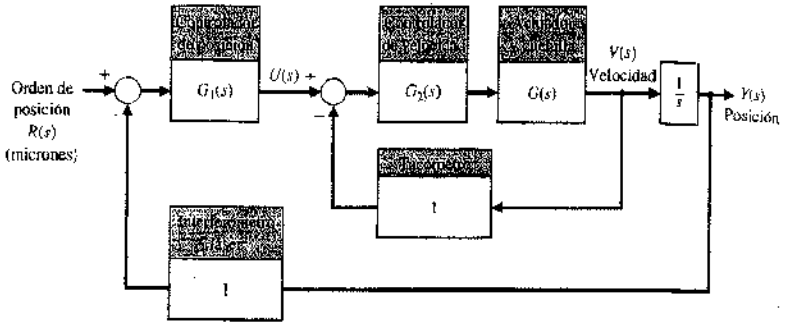


FIGURA 12.28
Sistema de control de una máquina de torneado.

Así pues, se busca un gran margen de fase y margen de ganancia para los lazos interno y externo y baja sensibilidad de la raíz. En la Tabla 12.8 se resumen las especificaciones.

Como se desea error nulo en estado estacionario para el lazo de velocidad, se emplea un controlador de velocidad $G_2(s) = G_3(s)G_4(s)$, donde $G_3(s)$ es un controlador PI y $G_4(s)$ es un controlador de adelanto. Se utiliza

$$G_2(s) = G_3(s)G_4(s) = \frac{(1 + K_3 s)}{K_3 s} \cdot \frac{(1 + K_4 s)}{\alpha\left(1 + \dfrac{K_4}{\alpha} s\right)} \cdot K_2$$

y se escoge $K_3 = 0.00532$, $K_4 = 0.00272$ y $\alpha = 2.95$. Ahora se tiene

$$G_2(s) = K_2 \frac{(s + 188)}{s} \cdot \frac{(s + 368)}{(s + 1085)}$$

Tabla 12.8 Especificaciones del sistema de control de la máquina de torneado

	Función de transferencia	
Especificación	**Velocidad, $V(s)/U(s)$**	**Posición $Y(s)/R(s)$**
Ancho de banda mínimo	950 rad/s	95 rad/s
Error en estado estacionario a un escalón	0	0
Razón de amortiguamiento mínimo, ζ	0.8	0.9
Sensibilidad de raíz máxima, $\lvert S_K^r \rvert$	1.0	1.5
Margen de fase mínimo	90°	75°
Margen de ganancia mínimo	40 dB	60 dB

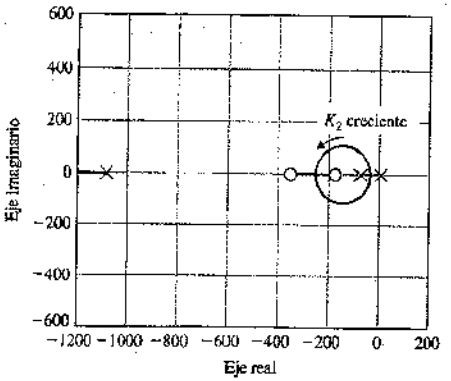


FIGURA 12.29
Lugar de las raíces para el lazo de velocidad cuando K_2 varía.

En la Figura 12.29 se muestra el lugar de las raíces de $G_2(s)G(s)$. Cuando $K_2 = 2$, se tiene para la función de transferencia en lazo cerrado de la velocidad

$$T_2(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{9000(s + 188)(s + 368)}{(s + 205)(s + 305)(s + 10^4)} \simeq \frac{10^4}{(s + 10^4)}, \tag{12.67}$$

que es un sistema con un gran ancho de banda. En la Tabla 12.9 se resume el ancho de banda real y la sensibilidad de la raíz. Obsérvese que se han excedido las especificaciones para la función de transferencia de la velocidad.

Se empleará una red de adelanto para el lazo de posición tal como

$$G_1(s) = K_1 \frac{(1 + K_5 s)}{\alpha\left(1 + \dfrac{K_5}{\alpha} s\right)},$$

Tabla 12.9 Resultados del diseño del sistema de control de la máquina de torneado

Resultado alcanzado	**Función de transferencia de velocidad**	**Función de transferencia de posición $Y(s)/R(s)$**
Ancho de banda en lazo cerrado	4000 rad/s	1000 rad/s
Error de estado estacionario	0	0
Razón de amortiguamiento, ζ	1.0	1.0
Sensibilidad de raíz, $\lvert S_K^r \rvert$	0.92	1.2
Margen de fase	93°	85°
Margen de ganancia	Infinito	76 dB

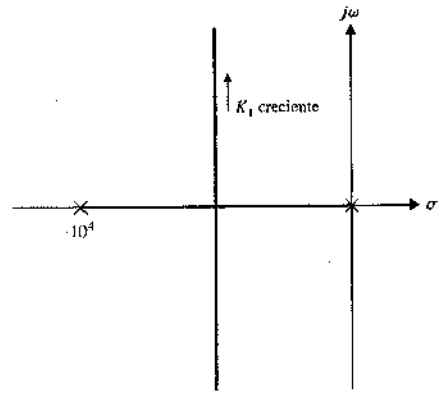
y se seleccionan $\alpha = 2.0$ y $K_5 = 0.0185$ de forma que

$$G_1(s) = \frac{K_1(s + 54)}{(s + 108)}.$$

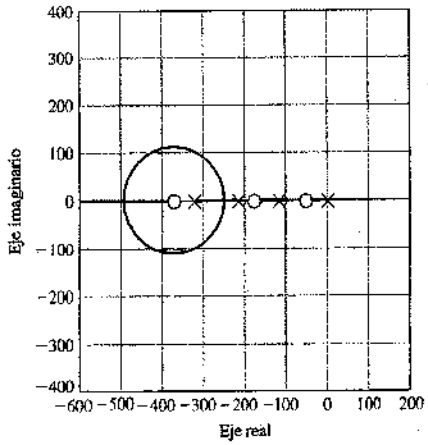
Se representa entonces el lugar de las raíces para

$$G_1(s) \cdot T_2(s) \cdot \frac{1}{s}.$$

Si se utiliza la función de transferencia $T_2(s)$ aproximada de la Ecuación (12.73) se tiene el lugar de las raíces de la Figura 12.30(a). Empleando la función de transferencia $T_2(s)$



(a)



(b)

FIGURA 12.30
Lugar de las raíces para $K_1 > 0$ (a) vista panorámica (b) próximo al origen del plano s.

real se obtiene el lugar de las raíces que se muestra en la Figura 12.30(b). Se selecciona $K_2 = 1000$ y se logran los resultados reales para la función de transferencia del sistema total como se muestra en la Tabla 12.9. El sistema total tiene un margen de fase alto, una sensibilidad baja y es sobreamortiguado, con un gran ancho de banda. Este sistema es muy robusto.

12.13. SISTEMA DE REALIMENTACIÓN PSEUDOCUANTITATIVA

La teoría de realimentación cuantitativa (QFT) usa un controlador, tal como se muestra en la Figura 12.31, para lograr comportamiento robusto. El objetivo es conseguir un gran ancho de banda para la función de transferencia en lazo cerrado con una ganancia de lazo K elevada. Métodos de diseño QFT típicos usan procedimientos gráficos y numéricos conjuntamente con las cartas de Nichols. Generalmente el diseño QFT busca una ganancia de lazo elevada y un gran margen de fase de forma que se consiga así comportamiento robusto [27-29, 32].

En esta sección se persigue un método simple de lograr los objetivos de QFT con un enfoque del lugar de las raíces en el plano s para la selección de la ganancia K y el compensador $G_c(s)$. Este método, bautizado pseudo-QFT, sigue estos pasos:

1. Colocar los n polos y m ceros de $G(s)$ en el plano s para la función de transferencia $G(s)$ de orden n. También, añadir cualquier polo de $G_c(s)$.
2. Comenzando cerca del origen, colocar los ceros de $G_c(s)$ inmediatamente a la izquierda de cada uno de los $(n - 1)$ polos en el lado izquierdo del plano s. Esto deja un polo lejos a la izquierda en el semiplano izquierdo del plano s.
3. Aumentar la ganancia K de forma que las raíces de la ecuación característica (polos de la función de transferencia en lazo cerrado) están próximos a los ceros de $G_cG(s)$.

Este método introduce ceros de manera que todas salvo una de las ramas del lugar de las raíces finalizan en ceros finitos. Si la ganancia K es suficientemente grande, entonces los polos de $T(s)$ son casi iguales a los ceros de $G_cG(s)$. Esto deja un polo de $T(s)$ con un significativo residuo de la fracción simple y el sistema con un margen de fase de aproximadamente 90° (en realidad, alrededor de 85°).

EJEMPLO 12.12. Diseño utilizando el método pseudo-QFT

Sea el sistema de la Figura 12.31 con

$$G(s) = \frac{1}{(s + p_1)(s + p_2)},$$

donde el caso nominal es $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$, con $\pm 50\%$ de variación. El caso más desfavorable es con $p_1 = 0.5$ y $p_2 = 1$. Se desea diseñar el sistema con error nulo en estado estacionario para una entrada en escalón, así que se utiliza el controlador PID

$$G_c(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s}.$$

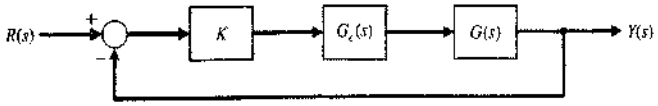


FIGURA 12.31
Sistema con realimentación.

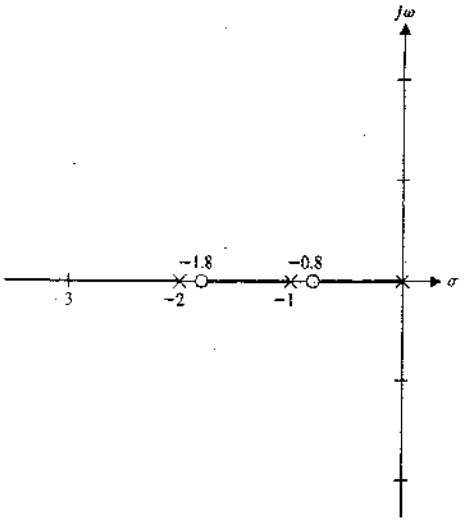


FIGURA 12.32
Lugar de las raíces para $KG_cG(s)$.

Se invoca entonces el principio de modelo interno, con $R(s) = 1/s$ incorporado dentro de $G_cG(s)$. Utilizando el Paso 1, se colocan los polos de $G_cG(s)$ en el plano s, tal como se muestra en la Figura 12.32. Hay, como se muestra, tres polos (en $s = 0$, -1 y -2). El Paso 2 busca colocar, tal como se indica en la Figura 12.32, un cero a la izquierda del polo en el origen y en el polo en $s = -1$.

El compensador es, así,

$$G_c(s) = \frac{(s + 0.8)(s + 1.8)}{s}. \tag{12.68}$$

Se selecciona $K = 100$, así que las raíces de la ecuación característica están próximas a los ceros. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{100(s + 0.80)(s + 1.80)}{(s + 0.798)(s + 1.797)(s + 100.4)} \simeq \frac{100}{(s + 100)}. \tag{12.69}$$

Este sistema en lazo cerrado proporciona una respuesta rápida y posee un margen de fase de aproximadamente 85°. En la Tabla 12.10 se resume el comportamiento.

TABLA 12.10 Comportamiento del diseño pseudo-QFT

	Porcentaje de sobreelongación	Tiempo de asentamiento
$G(s)$ nominal	0.01%	40 ms
$G(s)$ del caso más desfavorable	0.97%	40 ms

Cuando se comprueban las condiciones del caso más desfavorable ($p_1 = 0.5$ y $p_2 = 1$), el comportamiento permanece esencialmente inalterado, tal como se indica en la Tabla 12.10. El diseño pseudo-QFT produce un sistema muy robusto. ■

12.14. SISTEMAS DE CONTROL ROBUSTO UTILIZANDO MATLAB

En esta sección se investigarán los sistemas de control robusto utilizando MATLAB. En particular, se considerará el controlador PID utilizado comúnmente en el sistema de control con realimentación que se muestra en la Figura 12.1. Obsérvese que el sistema tiene un **prefiltro** $G_p(s)$. la contribución del prefiltro al comportamiento óptimo se analiza en la Sección 10.10.

El controlador PID tiene la forma

$$G_c(s) = \frac{K_3s^2 + K_1s + K_2}{s}.$$

Obsérvese que el controlador PID no es una función racional propia (es decir, el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador). El objetivo es escoger los parámetros K_1, K_2 y K_3 para cumplir las especificaciones de comportamiento y tener propiedades de robustez deseables. Desgraciadamente, no resulta de inmediato claro cómo seleccionar los parámetros en el controlador PID para obtener ciertas características de robustez. Un ejemplo ilustrativo demostrará que es posible escoger los parámetros iterativamente y verificar la robustez mediante simulación. La utilización de MATLAB ayuda en este proceso, ya que el diseño completo y la simulación se pueden mecanizar escribiendo programas que pueden ejecutarse fácilmente de forma repetida.

EJEMPLO 12.13. Control robusto de temperatura

Sea el sistema de control con realimentación de la Figura 12.1, donde

$$G(s) = \frac{1}{(s + c_0)^2},$$

y el valor nominal es $c_0 = 1$ y $G_p(s) = 1$. Se diseñará un compensador basado en $c_0 = 1$ y se comprobará la robustez por simulación. Las especificaciones del diseño incluyen:

1. Un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) $T_s \leq 0.5$ segundos.
2. Un comportamiento ITAE óptimo para una entrada en escalón.

Para este diseño, no se utilizará un prefiltro para cumplir la especificación (2), pero en su lugar se demostrará que se puede conseguir comportamiento aceptable (baja sobreelongación) por aumentar una ganancia en cascada.

La función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{K_3s^2 + K_1s + K_2}{s^3 + (2 + K_3)s^2 + (1 + K_1)s + K_2}. \tag{12.70}$$

La ecuación del lugar de las raíces asociado es

$$1 + \hat{K}\left(\frac{s^2 + as + b}{s^3}\right) = 0,$$

donde

$$\hat{K} = K_3 + 2, \quad a = \frac{1 + K_1}{2 + K_3} \quad \text{y} \quad b = \frac{K_2}{2 + K_3}.$$

El requisito de tiempo de asentamiento $T_s < 0.5$ segundos lleva a seleccionar las raíces de $(s^2 + as + b)$ a la izquierda de la línea $s = -\zeta\omega_n = -8$ en el plano s, tal como se muestra en la Figura 12.33, para asegurar que el lugar viaja hacia la región del plano s requerida. Se ha seleccionado $a = 16$ y $b = 70$ para asegurar que el lugar va más allá de la línea $s = -8$. Se selecciona un punto en el lugar de las raíces en la región de comportamiento y utilizando la función rlocfind se encuentra la ganancia asociada K y el valor asociado de ω_n. Para el punto escogido se observa que

$$\hat{K} = 118.$$

Entonces con $\hat{K}$, a y b se puede resolver para los coeficientes del PID como sigue:

$$K_3 = \hat{K} - 2 = 116,$$
$$K_1 = a(2 + K_3) - 1 = 1187,$$
$$K_2 = b(2 + K_3) = 8260.$$

Para cumplir el requisito de comportamiento de sobreelongación para una entrada en escalón se utilizará una ganancia en cascada K que se escogerá por métodos iterativos empleando la función step tal como se ilustra en la Figura 12.34. La respuesta en escalón

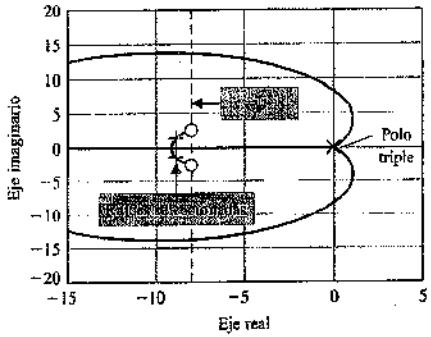
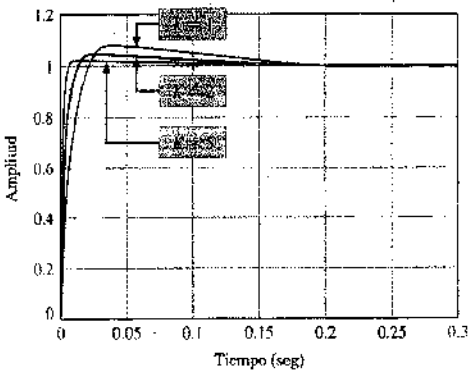


FIGURA 12.33
Lugar de las raíces para el controlador PID de temperatura cuando K varía.

```
>>a=16; b=70; num=[1 a b]; den=[1 0 0 0]; sys=tf(num,den);
>>rlocus(sys)
>>rlocfind(sys)
```

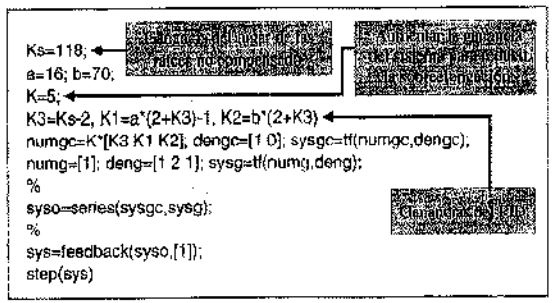


FIGURA 12.34
Respuesta en escalón del controlador PID de temperatura.

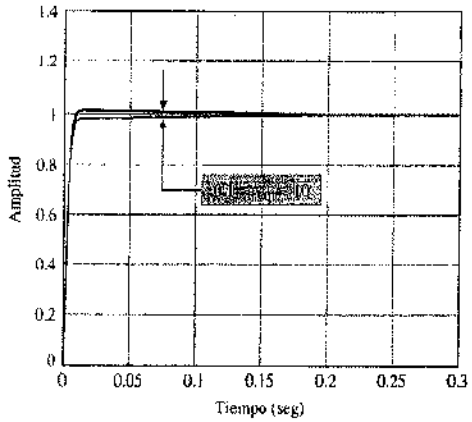
correspondiente a $K = 5$ tiene una sobreelongación aceptable del 2%. Con la adición de la ganancia $K = 5$, el controlador PID final es

$$G_c(s) = K\frac{(K_3s^2 + K_1s + K_2)}{s} = 5\frac{(116s^2 + 1187s + 8260)}{s}. \qquad (12.71)$$

No se emplea el prefiltro, como en el Ejemplo 12.8. En su lugar se aumentará la ganancia en cascada K para obtener respuesta transitoria satisfactoria. Ahora se puede considerar la cuestión de la robustez a cambios en el parámetro de la planta c_0.

La investigación de la robustez del diseño consiste en un análisis de la respuesta en escalón utilizando el controlador PID dado en la Ecuación (12.71) para un rango de variación del parámetro de la planta de $0.1 \leqslant c_0 \leqslant 10$. En la Figura 12.35 se visualizan los resultados. El programa se escribe para calcular la respuesta a un escalón para un c_0 dado. Podría ser una buena idea colocar la entrada de c_0 en el nivel de la línea de órdenes de MATLAB para hacer el programa más interactivo.

Los resultados de simulación indican que el diseño PID es robusto con respecto a cambios en c_0. Las diferencias en las respuestas a un escalón para $0.1 \leqslant c_0 \leqslant 10$ son difícilmente discernibles en la gráfica. Si los resultados mostrasen otra cosa sería posible iterar en el diseño hasta que se consiguiera un comportamiento aceptable. La capacidad interactiva de MATLAB permite comprobar por simulación la robustez. ■




```
c0=10
numg=[1]; deng=[1 2*c0 c0^2];
numgc=5*[116 1187 8260]; dengc=[1 0];
sysg=tf(numg,deng);
sysgc=tf(numgc,dengc);
%
syso=series(sysgc,sysg);
%
sys=feedback(syso,[1]);
%
step(sys)
```

FIGURA 12.35 Análisis del controlador PID robusto con variaciones en c_0.

12.15. EJEMPLO DE DISEÑO SECUENCIAL: SISTEMA DE LECTURA DE UNA UNIDAD DE DISCO

En este capítulo, se diseñará un controlador PID para conseguir la respuesta deseada del sistema. Muchos sistemas de control de lectura de una unidad de disco emplean un controlador PID y usa una señal de orden $r(t)$ que utiliza un perfil de velocidad ideal en la velocidad máxima permisible hasta que la cabeza llega cerca de la pista deseada que es cuando $r(t)$ se conmuta a una entrada tipo escalón. Así pues, se desea error nulo en estado estacionario para una señal en rampa (velocidad) y una señal en escalón. Examinando el sistema que se muestra en la Figura 12.36, se observa que el camino directo posee dos integradores puros y es de esperar error nulo en estado estacionario para una entrada de velocidad $r(t) = At$, $t > 0$.

El controlador PID es

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s = \frac{K_3(s + z_1)(s + \hat{z}_1)}{s}.$$

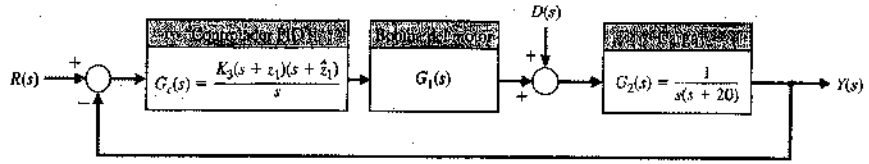


FIGURA 12.36. Sistema con realimentación de una unidad de disco con un controlador PID.

La función de transferencia del motor es

$$G_1(s) = \frac{5000}{(s + 1000)} \simeq 5.$$

El modelo de segundo orden usa $G_1(s) = 5$ y el diseño se determina para este modelo.

Se utilizará el modelo de segundo orden y el controlador PID para la técnica de diseño en el plano s ilustrada en la Sección 12.6. En la Figura 12.37 se muestra en el plano s los polos y ceros del sistema para el modelo de segundo orden y $G_1(s) = 5$. Entonces se tiene

$$G_c G_1 G_2(s) = \frac{5K_3(s + z_1)(s + \hat{z}_1)}{s^2(s + 20)}.$$

Se selecciona $z_1 = -120 + j40$ y se determina K_3 de forma que las raíces están a la izquierda de la línea $s = -100$. Si se consigue ese requisito, entonces

$$T_s < \frac{4}{100},$$

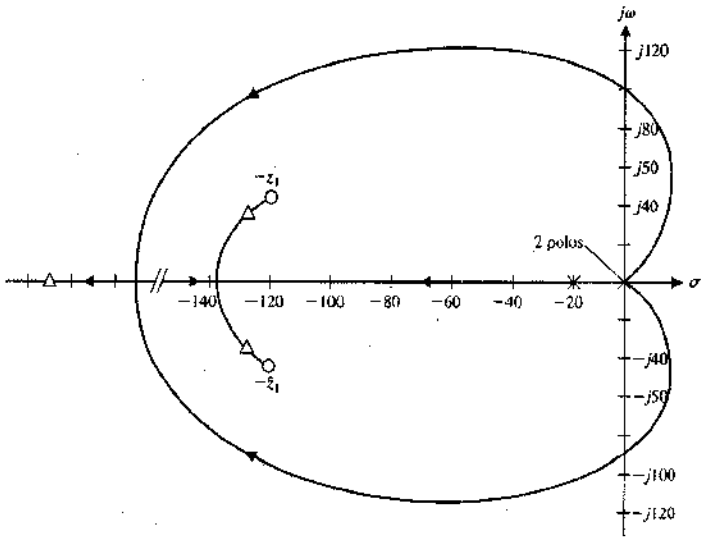


FIGURA 12.37 Lugar de las raíces cuando K_3 aumenta para la localización de las raíces estimadas con una respuesta deseable del sistema.

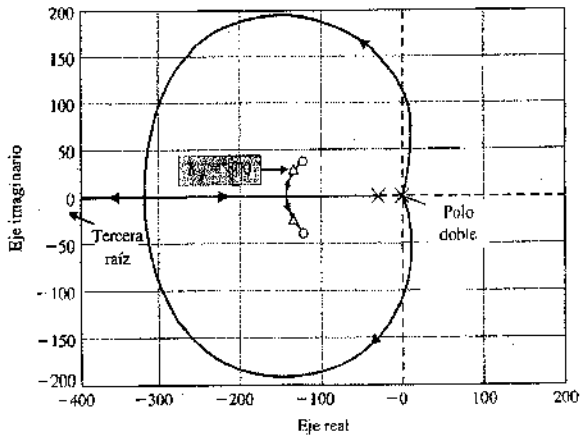


FIGURA 12.38 Lugar de las raíces real para el modelo de segundo orden.

Tabla 12.11 Especificaciones del sistema de control de la unidad de disco y comportamiento real

Medida de comportamiento	Valor deseado	Respuesta para modelo de segundo orden
Porcentaje de sobreelongación	<5%	4.5%
Tiempo de asentamiento para entrada en escalón	<50 ms	6 ms
Respuesta máxima para una perturbación en escalón unitario	$<5 \times 10^{-3}$	7.7×10^{-7}

y la sobreelongación a una entrada en escalón es (idealmente) menor que el 2% ya que el ζ de las raíces complejas es aproximadamente 0.8. Por supuesto, este esquema es sólo un primer paso. Como segundo paso se utilizará MATLAB iterativamente para determinar K_3. Se obtiene entonces el lugar de las raíces real tal como se muestra en la Figura 12.38 con $K_3 = 800$. En la Tabla 12.11 se registra la respuesta del sistema. El sistema cumple todas las especificaciones.

12.16. RESUMEN

El diseño de sistemas de control altamente precisos en presencia de incertidumbre de planta significativa requiere que el diseñador busque un sistema de control robusto. Un sistema de control robusto muestra baja sensibilidad frente a cambios en los parámetros y es estable en un amplio rango de variaciones de parámetros.

El controlador PID o controlador de tres modos se consideró como un compensador para ayudar en el diseño de sistemas de control robusto. El tema de diseño para un controlador PID es la selección de la ganancia y de dos ceros de la función de transferencia del controlador. Se han utilizado tres métodos de diseño para la selección del controla-

$$G_c(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = \frac{R_4R_2(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{R_3R_1(R_2C_2s)}$$

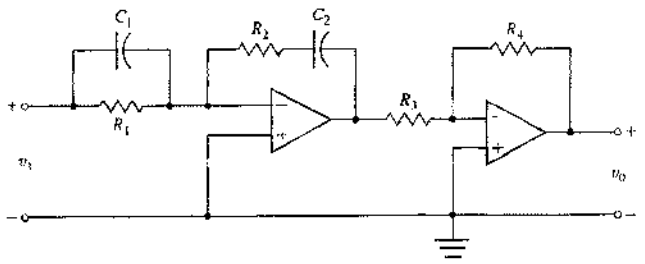


FIGURA 12.39 Circuito con amplificador operacional utilizado para controlador PID.

dor: el método del lugar de las raíces, el método de la respuesta en frecuencia y el método del índice de comportamiento ITAE. En la Figura 12.39 se muestra un circuito con amplificadores operacionales utilizado como controlador PID. En general el uso de un controlador PID permitirá al diseñador conseguir un sistema de control robusto.

El sistema de control con modelo interno con realimentación de las variables de estado y un controlador $G_c(s)$ se utilizó para obtener un sistema de control robusto. Finalmente, se demostró la naturaleza robusta de un sistema de control pseudo-QFT.

[redacted]

Para sistemas con parámetros inciertos, la necesidad de sistemas de control robusto requerirá la incorporación de inteligencia de máquina avanzada, tal como se muestra en la Figura 12.40.

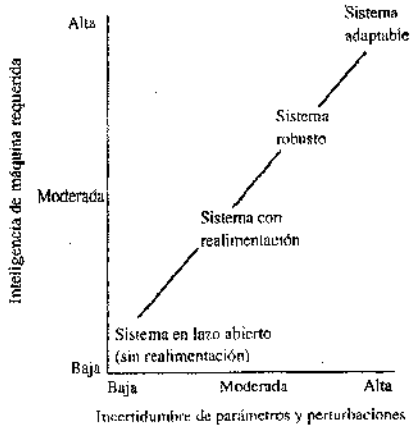


FIGURA 12.40 Inteligencia requerida en función de la incertidumbre de los sistemas de control modernos.

EJERCICIOS

E12.1. Sea un sistema de la forma que se muestra en la Figura 12.16, donde

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)}.$$

Utilizando el método de comportamiento ITAE para una entrada en escalón, determinar la $G_c(s)$ requerida. Suponer $\omega_n = 20$ en la Tabla 5.6. Determinar la respuesta en escalón con y sin prefiltro $G_p(s)$.

E12.2. Para el diseño ITAE obtenido en el Ejercicio 12.1, determinar la respuesta debida a una perturbación $D(s) = 1/s$.

E12.3. Un sistema con realimentación unitaria en lazo cerrado tiene

$$G(s) = \frac{9}{s(s+p)},$$

donde p es normalmente igual a 3. Determinar S_p^T y representar $|T(j\omega)|$ y $|S(j\omega)|$ en un diagrama de Bode.

E12.4. Se utiliza un controlador PID en el sistema de la Figura 12.16, donde

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+8)}.$$

La ganancia K_3 del controlador (Ecuación 12.33) está limitada a 180. Seleccionar un conjunto de ceros del compensador de forma que el par de raíces en lazo cerrado sea aproximadamente igual a los ceros. Hallar la respuesta escalón para la aproximación de la Ecuación (12.35) y la respuesta real y compararlas.

E12.5. Un sistema tiene una planta

$$G(s) = \frac{1000}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

y realimentación unitaria negativa con un compensador PD

$$G_c(s) = K_1 + K_2 s.$$

El objetivo es diseñar $G_c(s)$ de forma que la sobreelongación a un escalón sea menor que el 5% y el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) sea menor que 50 ms. Determinar una $G_c(s)$ apropiada.

E12.6. Sea el sistema de control que se muestra en la Figura E12.6 cuando $G(s) = 1/(s+4)$. Seleccione un controlador PI de forma que el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) sea menor que 1 segundo para una respuesta en escalón ITAE. Representar $y(t)$ para una entrada en escalón $r(t)$ con y sin prefiltro. Determinar y representar $y(t)$ para una perturbación en escalón. Razonar la efectividad del sistema.

Respuesta: Un posible controlador es

$$G_c(s) = \frac{32 + 4s}{s}.$$

E12.7. Para el sistema de control de la Figura E12.6 con $G(s) = 1/(s+4)^2$, seleccionar un controlador PID para conseguir un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) de menos de 1 segundo para una respuesta en escalón ITAE. Representar $y(t)$ para una entrada en escalón $r(t)$ con y sin prefiltro. Determinar y representar $y(t)$ para una perturbación en escalón. Razonar la efectividad del sistema.

E12.8. Repetir el Ejercicio 12.6 esforzándose en conseguir un tiempo de asentamiento mínimo mientras se añade la restricción de que $|u(t)| \leqslant 80$ para $t > 0$ con una entrada en escalón unitario, $r(t) = 1$, $t \geqslant 0$.

Respuesta: $G_c(s) = \dfrac{3600 + 80s}{s}$.

E12.9. Un sistema tiene la forma que se muestra en la Figura E12.6 con

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)},$$

donde $K = 1$. Diseñar un controlador PD para colocar los polos en lazo cerrado dominantes en $s = -1.5 \pm j2$. Determinar la respuesta a un escalón del sistema. Predecir el efecto de un cambio en K de $\pm 50\%$. Estimar la respuesta a un escalón del caso más desfavorable.

E12.10. Un sistema tiene la forma que se muestra en la Figura E12.6 con

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)},$$

donde $K = 1$. Diseñar un controlador PI de forma que las raíces dominantes están en $s = -0.365 \pm j0.514$. Determinar la respuesta a un escalón del sistema. Predecir el efecto de un cambio en K de $\pm 50\%$. Estimar la respuesta a un escalón del caso más desfavorable.

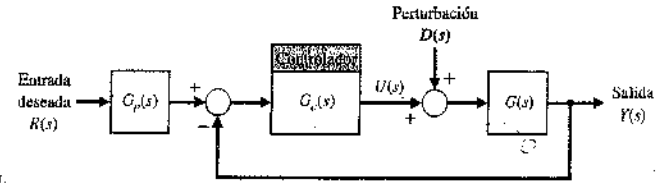


FIGURA E12.6
Sistema con controlador.

E12.11. Sea el sistema en lazo cerrado representado en forma de variables de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}r$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}r,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -k \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [3 \quad 0] \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = [0].$$

El valor nominal de $k = 2$. Sin embargo, el valor de k puede variar en el rango $0.1 \leqslant k \leqslant 6$. Representar el tanto por ciento de sobreelongación a una entrada en escalón unitario cuando k varía de 0.1 a 6.

E12.12. Sea el sistema de segundo orden

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0]\mathbf{x} + [0]u.$$

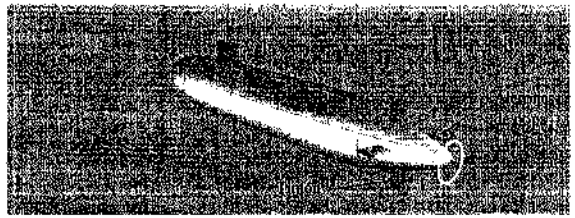
Los parámetros a, b, c_1 y c_2 son desconocidos *a priori*. ¿En qué condiciones es el sistema completamente controlable?

PROBLEMAS

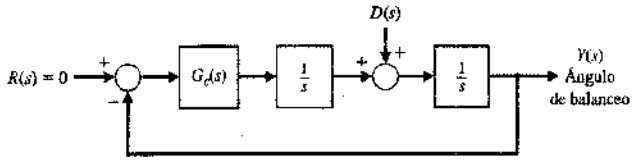
P12.1. El interés por los vehículos subacuáticos no tripulados (UUVs) ha crecido recientemente al tomarse en consideración un gran número de posibles aplicaciones. Éstas incluyen detección de minas y misiones de vigilancia. Sin tomar en consideración el tipo de aplicación, existe una fuerte necesidad para el control robusto y fiable del vehículo. En la Figura P12.1(a) [13] se muestra el vehículo propuesto.

Se desea controlar el vehículo a través de un rango de condiciones operativas. El vehículo tiene 30 pies de largo con una vela vertical cerca de la parte frontal. Las entradas de control son los alerones de popa, el timón y las órdenes de velocidad del eje. En este caso se desea controlar el balanceo del vehículo utilizando los alerones de popa. En la Figura P12.1(b) se muestra el sistema de control, donde $R(s) = 0$, el ángulo de balanceo deseado, y $D(s) = 1/s$. Se selecciona $G_c(s) = K(s+2)$, donde $K = 4$.

(a) Representar $20\log|T|$ y $20\log|S_K^T|$ en un diagrama de Bode. (b) Evaluar $|S_K^T|$ en ω_B, $\omega_{B/2}$ y $\omega_{B/4}$ ($T(s) = Y/(s)/R(s)$).



(a)



(b)

FIGURA P12.1. Control de un vehículo subacuático.

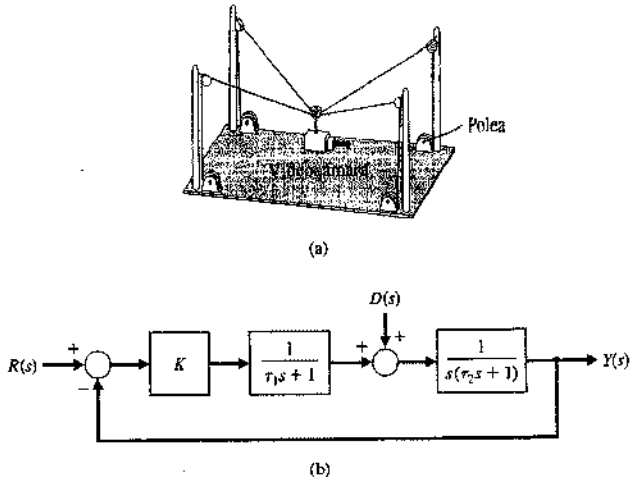


FIGURA P12.2
Cámara de TV controlada de forma remota.

P12.2. en la Figura P12.2(a) [24] se muestra un nuevo sistema de videocámara móvil, suspendida y controlada de forma remota que tiene como finalidad llevar la movilidad a la liga de fútbol profesional NFL. La cámara se puede mover sobre el campo así como hacia arriba y hacia abajo. El control del motor en cada polea se representa por el sistema de la Figura P12.2(b), donde $\tau_1 = 20$ ms y $\tau_2 = 2$ ms.

(a) Seleccionar K de forma que $M_{p\omega} = 1.84$. (b) Representar $\log|T|$ y $20\log|S_K^T|$ en un diagrama de Bode. (c) Evaluar $|S_K^T|$ en ω_n, ω_{bj2} y ω_{bj4}. (d) Fijar $R(s) = 0$ y determinar el efecto de $D(s) = 1/s$ para la ganancia K de la parte (a) representando $y(t)$.

P12.3. Los trenes de levitación magnética (maglev) pueden reemplazar a los aviones en trayectos inferiores a 200 millas. El tren maglev desarrollado por una compañía alemana utiliza atracción electromagnética para impulsar y levitar vehículos pesados que llevan hasta 400 pasajeros a velocidades de 300 mph. Sin embargo, el espacio de 1/2 de pulgada entre el coche y el carril es difícil de mantener [7, 12, 17].

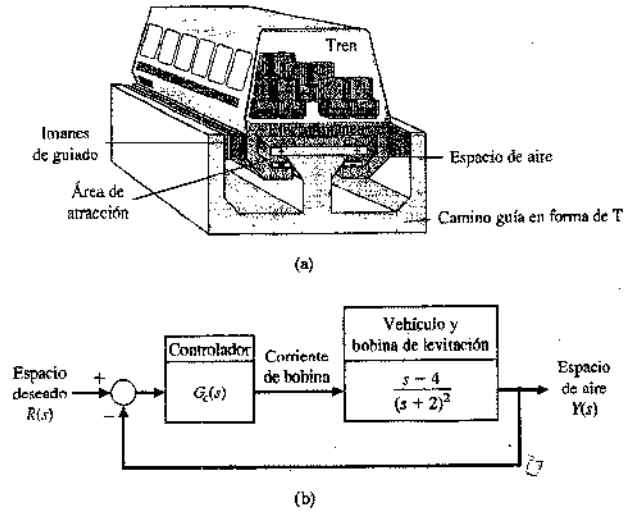


FIGURA P12.3
Control de un tren con levitación magnética.

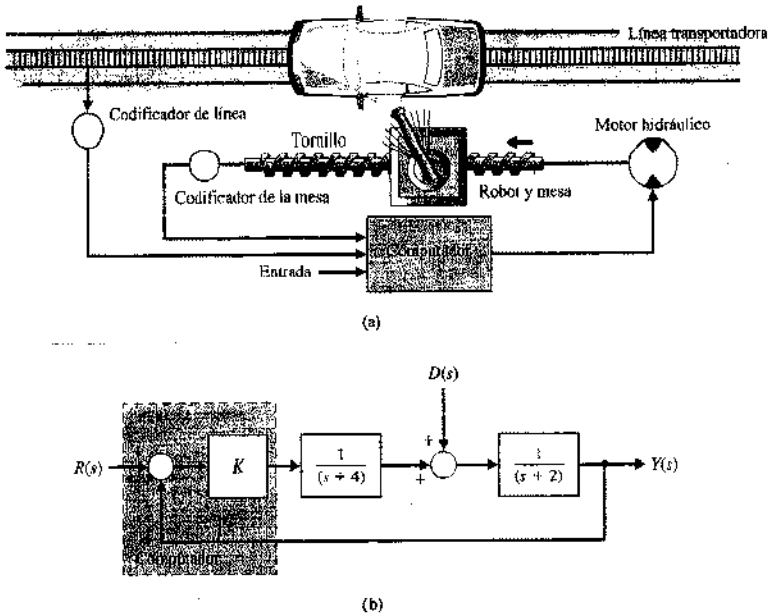


FIGURA P12.4
Robot de pintura con spray.

En la Figura P12.3(a) se muestra el sistema de control del espacio de aire y en la Figura P12.3(b) su diagrama de bloques. El compensador es

$$G_c(s) = \frac{K(s+5)}{(s+10)}$$

(a) Hallar el rango de K para un sistema estable. (b) Seleccionar una ganancia de forma que el error en estado estacionario del sistema es cero para una orden de entrada de tipo escalón. (c) Determinar $y(t)$ para la ganancia de la parte (b). (d) Determinar $y(t)$ cuando K varía $\pm 15\%$ del valor de la ganancia de la parte (b).

P12.4. El control por computador de un robot para pintura con spray de un automóvil se lleva a cabo mediante el sistema que se muestra en la Figura P12.4(a) [1]. Se desea investigar el sistema cuando $K = 1$, 10 y 20. (a) Para los tres valores de K, determinar ζ, ω_n, tanto por ciento de sobreelongación, tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%), y el error en estado estacionario para una entrada en escalón. Registrar los resultados en una tabla. (b) Determinar la sensibilidad $|S_K^T|$ para los tres valores de K. (c) Seleccionar el mejor de los tres valores de K. (d) Para el valor seleccionado en la parte (c), determinar $y(t)$ para una perturbación $D(s) = 1/s$ cuando $R(s) = 0$.

P12.5. En la Figura P12.5(a) se muestra un vehículo guiado automáticamente y su sistema de control en la Figura P12.5(b). El objetivo es seguir el cable guía de forma precisa, ser insensible a cambios en la ganancia K_1 y reducir el efecto de la perturbación [15, 25]. La ganancia K_1 es normalmente igual a 1 y $\tau_1 = 1/25$ segundos.

(a) Seleccionar un compensador, $G_c(s)$, de forma que el porcentaje de sobreelongación a una entrada en escalón es menor o igual al 10%, el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) es menor que 100 ms y la constante de velocidad, K_v, para una entrada en rampa es 100.
(b) Para el compensador seleccionado en la parte (a), determinar la sensibilidad del sistema a pequeños cambios en K_1 calculando $S_{K_1}^T$ o S_K^T.
(c) Si K_1 cambia a 2 mientras la $G_c(s)$ de la parte (a) permanece inalterada, hallar la respuesta a un escalón del sistema y comparar los valores de comportamiento seleccionados con aquellos que se obtuvieron en la parte (a).
(d) Determinar el efecto de $D(s) = 1/s$ representando $y(t)$ cuando $R(s) = 0$.

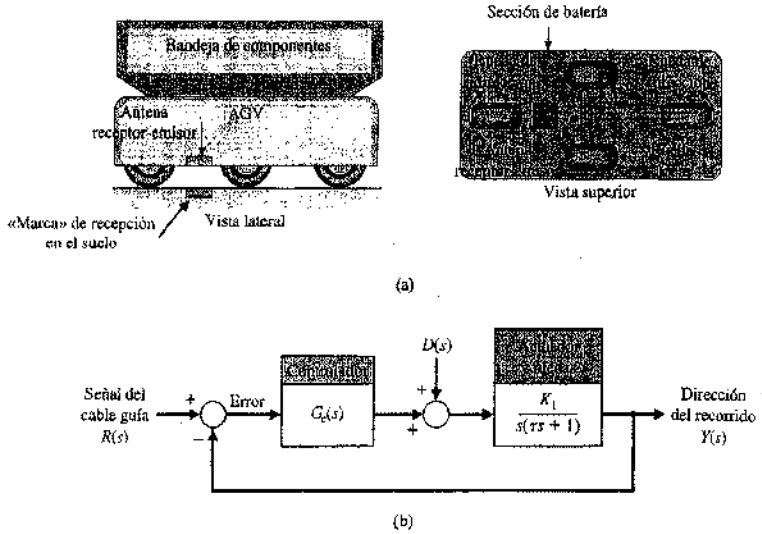


FIGURA P12.5
Vehículo guiado de forma automática.

P12.6. Una máquina de arrollamiento (RWM) recibe devanados de cintas y grandes bobinas de papel producidas en una papelera [9, 16]. El RWM consta de algunas grandes estaciones: estación de posicionamiento, estación de espera, estación de arrollamiento, etc. El interés se centra en la estación de posicionamiento que se muestra en la Figura P12.6(a). La estación de posicionamiento es la primera estación que ve una bobina de papel. Esta estación es la encargada de recibir y pesar la bobina, medir su diámetro y anchura, determinar el devanado deseado para la bobina, posicionándola para su procesamiento en estaciones posteriores y finalmente expulsarla de la estación.

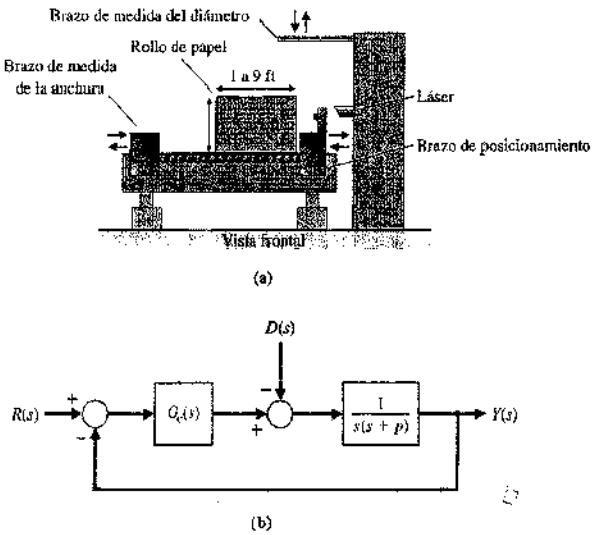


FIGURA P12.6
Control de una máquina de arrollamiento.

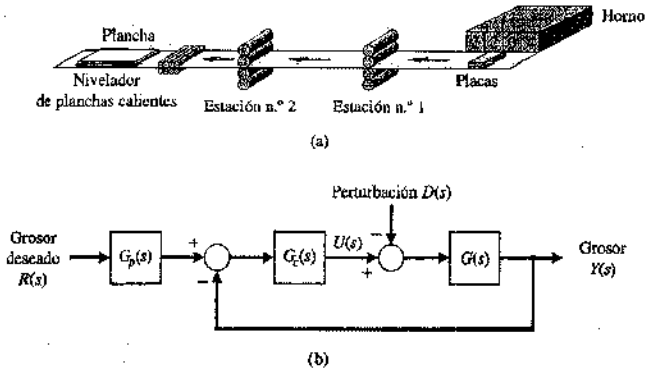


FIGURA P12.7
Control de un tren de laminación de acero.

Funcionalmente, el RWM se puede catalogar como una operación compleja porque cada paso funcional (por ejemplo, medir la anchura) supone un gran número de acciones sobre el dispositivo y necesita un número de sensores asociados.

En la Figura P12.6(b) se muestra el sistema de control para posicionar de forma precisa el brazo de medir la anchura. El polo del brazo de posicionamiento, p, es normalmente igual a 2, pero está sujeto a cambios debido a la carga y al desalineamiento de la máquina. (a) Para $p = 2$, diseñar un compensador de forma que las raíces complejas son $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$. (b) Representar $y(t)$ para una entrada en escalón $R(s) = 1/s$. (c) Representar $y(t)$ para una perturbación $D(s) = 1/s$ con $R(s) = 0$. (d) Repetir las partes (a) y (b) cuando p cambia a 1 y $G_c(s)$ permanece tal como se diseñó en la parte (a). Comparar los resultados para los dos valores del polo p.

P12.7. La función de un tren de laminación de acero es laminar planchas recalentadas en láminas de grosor y dimensión planificada [5, 10]. Los productos finales son de forma plana rectangular, con una anchura de hasta 3300 mm y un espesor de 180 mm.

En la Figura P12.7(a) se muestra un esquema del horno. El horno tiene dos grandes plataformas de laminación, denotadas n.° 1 y n.° 2. Éstas están equipadas con grandes rodillos (hasta 508 mm de diámetro), que están accionados por motores eléctricos de gran potencia (hasta 4470 kW). El espacio entre los rodillos y las fuerzas se mantiene mediante grandes cilindros hidráulicos.

La operación típica del tren de laminación se puede describir como sigue. Las planchas que vienen del horno de recalentamiento inicialmente van a la plataforma número 1, cuya función es reducir las planchas al ancho requerido. Las planchas continúan a la plataforma número 2, donde se efectúa la fase de acabado para producir el espesor de plancha deseado. Finalmente van a través del nivelador de la placa calentadora que da a cada plancha un acabado suave.

Uno de los sistemas claves controla el espesor de las planchas ajustando los rodillos. En la Figura P12.7(b) se muestra el diagrama de bloques de este sistema de control. La planta se representa por

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

El controlador es un PID con dos ceros reales iguales. (a) Seleccionar los ceros del PID y las ganancias de forma que el sistema en lazo cerrado tenga dos pares de raíces iguales. (b) Para el diseño de la parte (a), obtener la respuesta a un escalón sin un prefiltro [$G_p(s) = 1$]. (c) repetir la parte (b) para un prefiltro apropiado. (d) Para el sistema, determinar el efecto de una perturbación en escalón unitario evaluando $y(t)$ con $r(t) = 0$.

P12.8. Un motor y carga con rozamiento despreciable y un amplificador voltaje a corriente K_a se usa en el sistema de control con realimentación que se muestra en la Figura P12.8. Un diseñador selecciona un controlador PID

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s,$$

donde $K_1 = 5$, $K_2 = 500$ y $K_3 = 0.0475$.

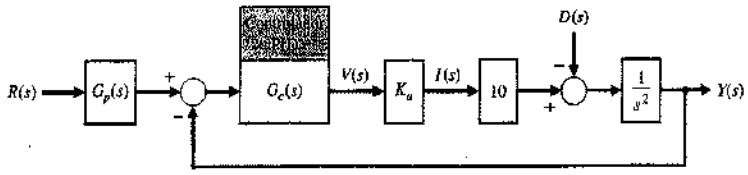


FIGURA P12.8

(a) Determinar el valor apropiado de K_u de forma que el margen de fase del sistema es 42°. (b) Para la ganancia K_u representar el lugar de las raíces del sistema y determinar las raíces del sistema para el valor de K_u de la parte (a). (c) Determinar el valor máximo de $y(t)$ cuando $D(s) = 1/s$ y $R(s) = 0$ para el valor de K_u de la parte (a). (d) Determinar la respuesta a una entrada en escalón $r(t)$ con y sin un prefiltro.

P12.9. Un sistema con realimentación unitaria tiene una ecuación característica nominal

$$q(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 6 = 0.$$

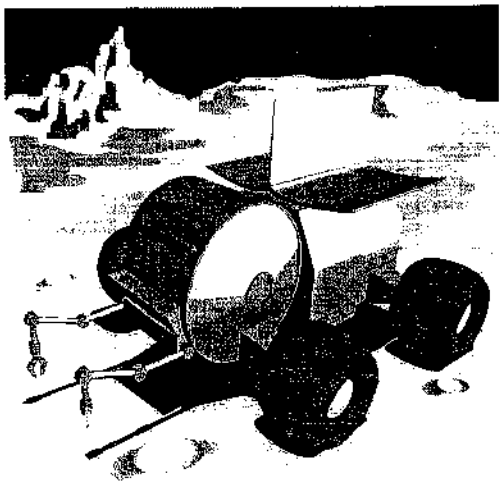
Los coeficientes varían como sigue:

$$2 \leqslant a_2 \leqslant 3, \quad 1 \leqslant a_1 \leqslant 3,$$
$$3 \leqslant a_0 \leqslant 5.$$

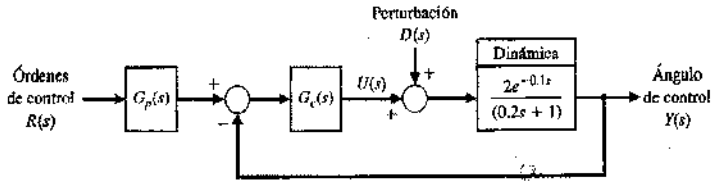
Determinar si el sistema es estable para estos coeficientes inciertos.

P12.10. Los astronautas del futuro podrán conducir en la luna en un vehículo presurizado, tal como se muestra en la Figura P12.10(a), que tiene un rango de 620 millas y se podrá utilizar para misiones de hasta seis meses. Los ingenieros de la Boeing Company primero analizaron el vehículo de transporte lunar de la era Apollo y a continuación diseñaron el nuevo vehículo que incorporaba mejoras en radiación y protección térmica, control de choques y vibraciones y lubricación y estanquidad.

En la Figura P12.10(b) se muestra el control de dirección del vehículo lunar. El objetivo del diseño del control es conseguir una respuesta en escalón a una orden de dirección con un error nulo en estado estacionario, una sobreelongación menor que el 20% y un tiempo de pico menor que 0.3 segundos con $|u(t)| \leqslant 50$. Es también necesario determinar el efecto de una perturbación en escalón $D(s) = 1/s$ cuando $R(s) = 0$ con el fin de asegurar la reducción de los efectos de la superficie de la luna. Utilizando (a) un controlador PI y (b) un controlador PID, diseñar un controlador aceptable. Registrar los resultados para cada diseño en una tabla. Comparar el comportamiento de cada diseño. Si fuera necesario, emplear un prefiltro $G_p(s)$.



(a)



(b)

FIGURA P12.10
(a) Un vehículo lunar.
(b) Control de dirección para el vehículo lunar.

P12.11. Una planta tiene una función de transferencia

$$G(s) = \frac{10}{s^2}.$$

Se desea utilizar un sistema con realimentación unitaria negativa con un controlador PID y un prefiltro. El objetivo es conseguir un tiempo de pico de 0.75 segundos con comportamiento tipo ITAE. Predecir la sobreelongación y el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) para una entrada en escalón.

P12.12. En la Figura P12.12(a) se muestra una leva tridimensional para generar una función de dos variables. Ambas x e θ se pueden controlar utilizando un sistema de control de posición [19]. El control de x se puede lograr con un motor de cc y realimentación de la posición de la forma que se muestra en la Figura P12.12(b), con el motor de cc y la carga representados por

$$G(s) = \frac{K}{s(s + p)(s + 4)},$$

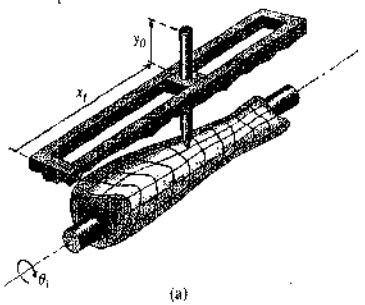
donde $1 \leqslant K \leqslant 3$ y $1 \leqslant p \leqslant 3$. Normalmente $K = 2$ y $p = 2$. Diseñar un sistema ITAE con un controlador PID de forma que el tiempo de respuesta de pico a una entrada en escalón es menor que 2.5 segundos para el comportamiento del caso más desfavorable.

P12.13. Sea el sistema de segundo orden en lazo cerrado

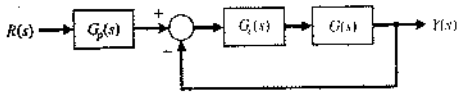
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -K \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [10 \quad 0]x + [0]u.$$

Calcular la sensibilidad del sistema en lazo cerrado a variaciones en el parámetro K.



(a)



(b)

FIGURA P12.12. (a) Leva tridimensional. (b) Sistema de control del eje x.

PROBLEMAS AVANZADOS

PA12.1. Para minimizar los efectos vibratorios, se levita magnéticamente un telescopio. Este método también elimina el rozamiento en el sistema de accionamiento del azimut magnético. El fotodetector para el sistema sensor requiere conexiones eléctricas que se pueden representar mediante un resorte con una constante de 1 kg/m. La masa del telescopio es 100 kg. En la Figura PA12.1 se muestra el diagrama de bloques del sistema. Diseñar un controlador PID de forma que la constante de error de velocidad es $K_v = 100$ y la máxima sobreelongación para una entrada en escalón es menor que el 5%.

PA12.2. Una solución prometedora al problema del tráfico es un sistema de levitación magnética (maglev). Los vehículos se suspenden sobre un camino por encima de la autopista y se guían por fuerzas magnéticas en lugar de descansar sobre ruedas o fuerzas aerodinámicas. Los imanes proporcionan la propulsión para los vehículos [7, 12, 17]. Idealmente el maglev puede ofrecer las ventajas medioambientales y de seguridad de un tren de alta velocidad, la velocidad y el bajo rozamiento de un avión y la conveniencia de un automóvil. A pesar de todos estos atributos compartidos, el sistema maglev es verdaderamente un nuevo modo de viaje y mejorará a los otros modos por aliviar la congestión y proporcionar conexiones entre ellas. Los viajes en los sistemas maglev serían rápidos, operando de 150 a 300 millas por hora.

En la figura PA12.2(a) y (b) se ilustra el control de inclinación de un vehículo maglev. La dinámica de la planta $G(s)$ está sujeta a variación de forma que los polos se encontrarán dentro del cuadro sombreado que se muestra en la Figura PA12.2(c) y $1 \leqslant K \leqslant 2$.

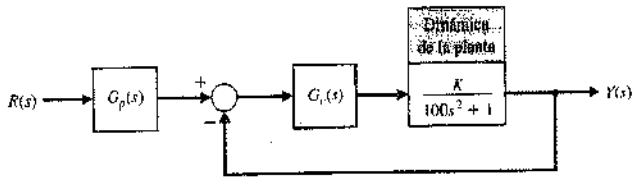
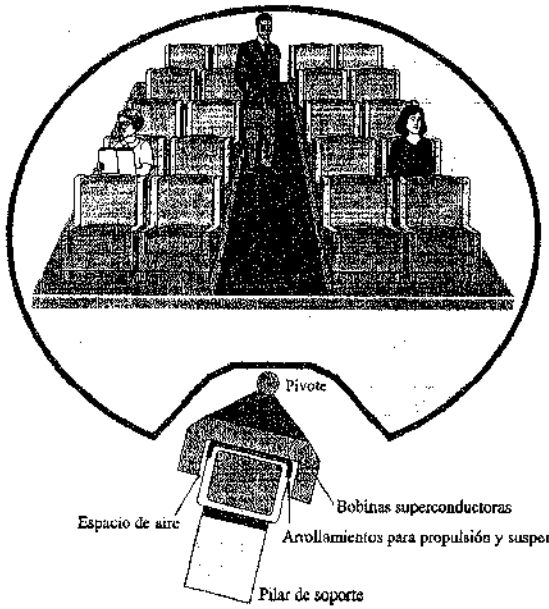
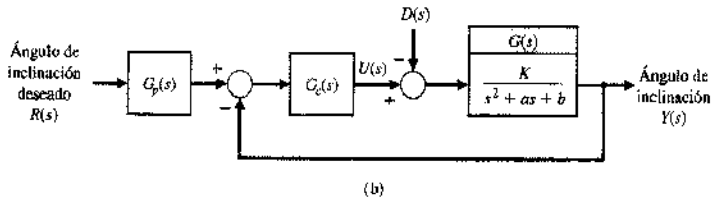


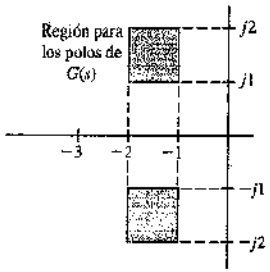
FIGURA PA12.1
Sistema de control de posición de un telescopio levitado magnéticamente.



(a)



(b)



(c)

FIGURA PA12.2. (a) y (b) Control de inclinación de un vehículo levitado magnéticamente. (c) Dinámica de la planta.

El objetivo es conseguir un sistema robusto con una respuesta en escalón que posee una sobreelongación menor que el 10%, así como un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) menor que 2 segundos cuando $|u(t)| \leq 100$. Obtener un diseño con un controlador PI, PD y PID y comparar los resultados. Si fuera necesario, utilizar un prefiltro $G_p(s)$.

PA12.3. Los sistemas de frenado antideslizantes presentan un problema de control importante ya que las variaciones de los parámetros del sistema freno/automóvil pueden cambiar significativamente (por ejemplo, debido a los cambios del coeficiente de fricción del disco de freno o a variaciones en la pendiente de la carretera) y las influencias medioambientales (por ejemplo, producidas por las condiciones adversas de la carretera). El objetivo del sistema antideslizante es regular el deslizamiento de la rueda para maximizar el coeficiente de fricción entre el neumático y la carretera para cualquier superficie [8]. Como cabía esperar, el coeficiente de fricción de frenado es mayor en asfalto seco, ligeramente reducido en asfalto húmedo y muy reducido en hielo.

Un modelo simplificado del sistema de frenado se representa por una función de transferencia de planta $G(s)$ con un sistema tal como se muestra en la Figura 12.16 con

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s + a)(s + b)},$$

donde normalmente $a = 1$ y $b = 4$.

(a) Utilizando un controlador PID, diseñar un sistema muy robusto donde, para una entrada en escalón, la sobreelongación es menor que el 4% y el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) es de 1 segundo o menos. El error en estado estacionario debe ser menor que el 1% para un escalón. Se espera que a y b varíen en $\pm 50\%$.

(b) Diseñar un sistema para que cumpla las especificaciones de la parte (a) empleando un índice de comportamiento ITAE. Predecir la sobreelongación y el tiempo de asentamiento para este diseño.

PA12.4. Se ha diseñado un robot para ayudar en las operaciones de prótesis de cadera. El dispositivo, llamado RoBoDoc, se utiliza para orientar y tallar de forma precisa la cavidad femoral que va a aceptar el implante protésico de la cadera. Claramente se necesita un control de la herramienta quirúrgica muy robusto ya que no existe una segunda oportunidad para volver a taladrar un hueso [23, 30]. El sistema de control es como el que se muestra en la Figura 12.16 con

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b},$$

donde $1 \leq a \leq 2$ y $4 \leq b \leq 12$.

Seleccionar un controlador PID de forma que el sistema sea muy robusto. Utilizar el método del lugar de las raíces en el plano s. Seleccionar la $G_p(s)$ apropiada y representar la respuesta a una entrada en escalón.

PA12.5. En la Figura PA12.5 se muestra un vehículo espacial con una cámara. La cámara gira alrededor de 16° en un plano inclinado relativo a la base. Los cohetes de reacción estabilizan la base contra la reacción de los motores de giro. El control de la velocidad rotacional para el giro de la cámara tiene una función de transferencia de la planta

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)}.$$

Se utiliza un controlador PID en un sistema como el que se muestra en la Figura 12.16 donde

$$G_c(s) = \frac{K(s + \sigma + j1)(s + \sigma - j1)}{s}.$$

Determinar K y las raíces resultantes de forma que todas las raíces tengan ζ menor o igual a $1/\sqrt{2}$ cuando $1 < \sigma < 2$ (variar σ en incrementos de 0.25). Determinar la sensibilidad de la raíz a cambios en K.

PA12.6. Sea el sistema de la Figura 12.16 con

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s + 10)},$$

donde $K_1 = 1$ en condiciones normales. Diseñar un controlador PID para conseguir un margen de fase de 50°. El controlador es

$$G_c(s) = \frac{K(s^2 + 20s + b)}{s}$$

con ceros complejos. Seleccionar un prefiltro apropiado. Determinar el efecto de un cambio de $\pm 25\%$ en K_1 realizando un registro tabular del comportamiento del sistema.

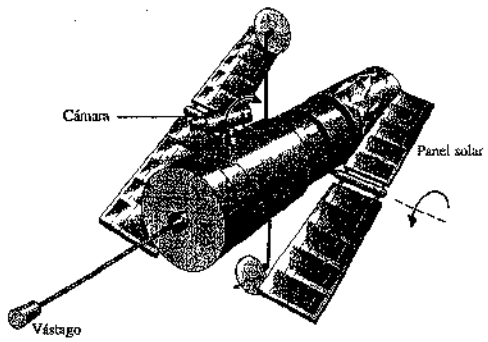


FIGURA PA12.5
Vehículo espacial con una cámara.

PA12.7. Sea el sistema de la Figura 12.16 con

$$G(s) = \frac{K_1}{s(\tau s + 1)},$$

donde $K_1 = 1$ y $\tau \simeq 0.001$ segundo que puede despreciarse. (Comprobar esto último en el proceso de diseño.) Seleccionar un controlador PID de forma que el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) para una entrada en escalón es menor que 0.8 segundos y la sobreelongación es menor del 5%. También el efecto de una perturbación en la salida debe reducirse a menos del 5% de la magnitud de la perturbación. Seleccionar ω_n y usar el método de diseño ITAE.

PA12.8. Sea el sistema de la Figura 12.16 con

$$G(s) = \frac{1}{s}.$$

El objetivo es seleccionar un controlador PI utilizando el criterio de diseño ITAE mientras la señal de control se restringe a $|u(t)| \leq 1$ para una entrada en escalón unitario. Determinar el controlador PI apropiado y el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) para una entrada en escalón. Utilizar un prefiltro.

PA12.9. Sea el sistema de la Figura 12.16 con

$$G(s) = \frac{3}{s(s^2 + 4s + 5)}.$$

Diseñar un controlador PID para conseguir (a) una aceleración constante $K_a = 2$, (b) un margen de fase igual a 45°, y (c) un ancho de banda mayor que 2.8 rad/s. Seleccionar un prefiltro apropiado y representar la respuesta a una entrada en escalón.

PA12.10. En la Figura PA12.10 se muestra un sistema de control de una máquina de herramienta. La función de transferencia del amplificador de potencia, fuente de energía, soporte móvil y herramienta es

$$G(s) = \frac{50}{s(s + 1)(s + 4)(s + 5)}.$$

El objetivo es tener una sobreelongación menor que el 25% para una entrada en escalón mientras se consigue un tiempo de pico menor que 3 segundos. Determinar un controlador apropiado utilizando (a) control PD, (b) control PI y (c) control PID. (d) Luego seleccionar el mejor controlador.

PA12.11. Sea un sistema con la estructura mostrada en la Figura 12.16 con

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2as + a^2},$$

donde $1 \leq a \leq 3$ y $2 \leq K \leq 4$.

Utilizar un controlador PID y diseñar el controlador para la condición del caso más desfavorable. Se desea que el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) sea menor que 0.8 segundos con un comportamiento ITAE.

PA12.12. Un sistema de la forma que se muestra en la Figura 12.16 tiene

$$G(s) = \frac{s + r}{(s + p)(s + q)},$$

donde $3 \leq p \leq 5$, $0 \leq q \leq 1$ y $1 \leq r \leq 2$. Se utilizará un compensador

$$G_c(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)},$$

con todos los polos y ceros reales. Seleccionar un compensador apropiado para conseguir comportamiento robusto.

PA12.13. Un sistema de la forma que se muestra en la Figura 12.31 tiene una planta

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 4)(s + 6)}.$$

Se desea alcanzar un error en estado estacionario para una entrada en escalón. Seleccionar un compensador $G_c(s)$ y una ganancia K utilizando el método pseudo-QFT y determinar el comportamiento del sistema cuando todos los polos de $G(s)$ cambian un -50%. Describir la naturaleza robusta del sistema.

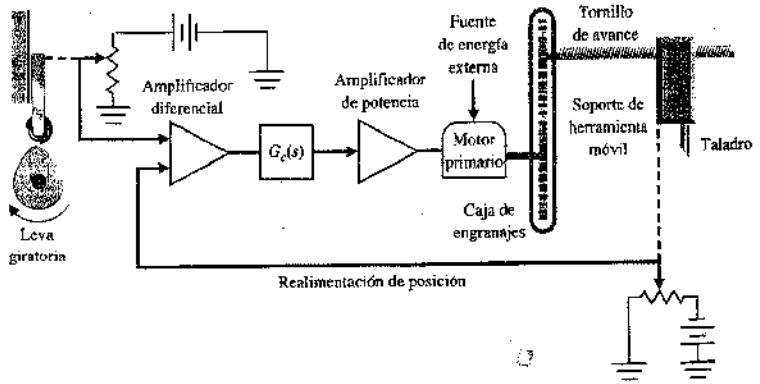


FIGURA PA12.10
Sistema de control de una máquina de herramienta.

PROBLEMAS DE DISEÑO

PDC12.1. Diseñar un controlador PID para el sistema de rodillo de cabestrante y corredera lineal de la Figura PDC4.1. El porcentaje de sobreelongación debería ser menor que el 3% y el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) menor que 250 ms para una entrada en escalón $r(t)$. Determinar la respuesta a una perturbación para el sistema diseñado.

PD12.1. En la Figura PD12.1(a) se muestra el sistema de control de posición de una gran mesa giratoria y en la Figura PD12.1(b) el diagrama de bloques del sistema [11, 14]. Este sistema utiliza un motor con un gran par con $K_m = 15$. El objetivo es reducir el efecto en estado estacionario de un cambio en escalón en la perturbación de la carga al 5% de la magnitud de la perturbación del escalón y manteniendo al mismo tiempo una respuesta rápida a una orden de entrada en escalón $R(s)$ con menos del 5% de sobreelongación. Seleccionar K_1 y el compensador cuando (a) $G_c(s) = K$ y (b) $G_c(s) = K_2 + K_3 s$ (un compensador PD). Representar la respuesta a un escalón para la perturbación y la entrada para ambos compensadores. Determinar si se precisa de un prefiltro para cumplir el requisito de sobreelongación.

PD12.2. La cinta de audio digital (DAT) almacena 1.3 gigabytes de datos en un espacio del tamaño de una tarjeta de crédito —aproximadamente nueve veces más que el carrete de cinta magnética de media pulgada de ancho o el cartucho de cinta magnética de un cuarto de pulgada—. Una DAT se vende por unos pocos dólares —un precio similar al de un disquete— incluso aunque puede almacenar 1000 veces más datos. Una DAT puede grabar hasta dos horas (más tiempo que con un carrete o un cartucho de cinta magnética), lo que significa que puede permanecer más tiempo sin ser atendida y se requieren menos cambios de cintas y, por tanto, menos interrupciones de transferencia de datos. Una DAT da acceso a un archivo de datos dado en 20 segundos, como promedio, comparado con pocos o algunos minutos que se precisan con un carrete o cartucho de cinta [2].

El accionamiento de la cinta controla electrónicamente las velocidades relativas de la bobina y de la cinta de forma que las cabezas siguen las pistas de la cinta, tal como se muestra en la Figura PD12.2(a). El sistema de control es mucho más complejo que el de un CD-ROM ya que hay que controlar de manera precisa muchos más motores: control del eje motor, del rebobinado, bobina de alimentación y tensión de la cinta.

Sea el sistema de control de velocidad que se muestra en la Figura PD12.2(b). La función de transferencia del motor y la carga varía porque la cinta se mueve de una bobina a otra. La función de transferencia es

$$G(s) = \frac{K_m}{(s + p_1)(s + p_2)},$$

donde los valores nominales son $K_m = 4$, $p_1 = 1$ y $p_2 = 4$. Sin embargo, el rango de variación es $3 \leq K_m \leq 5$;

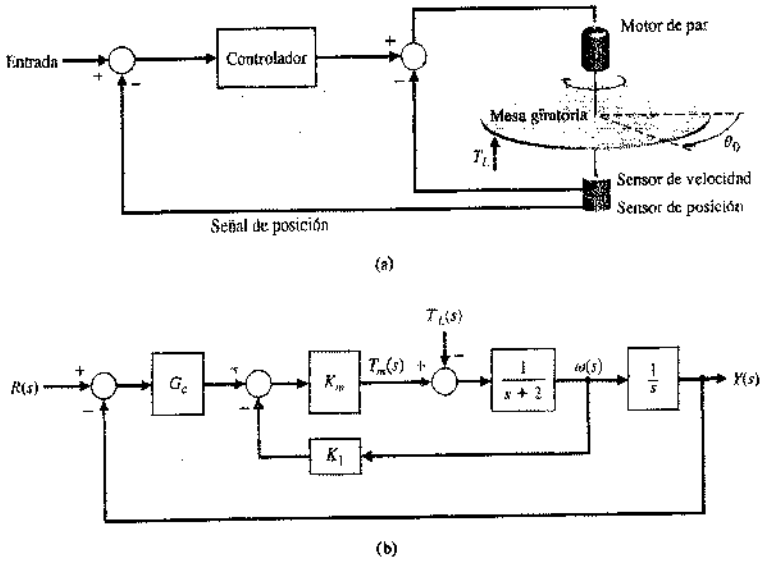


FIGURA PD12.1
Control de una mesa giratoria.

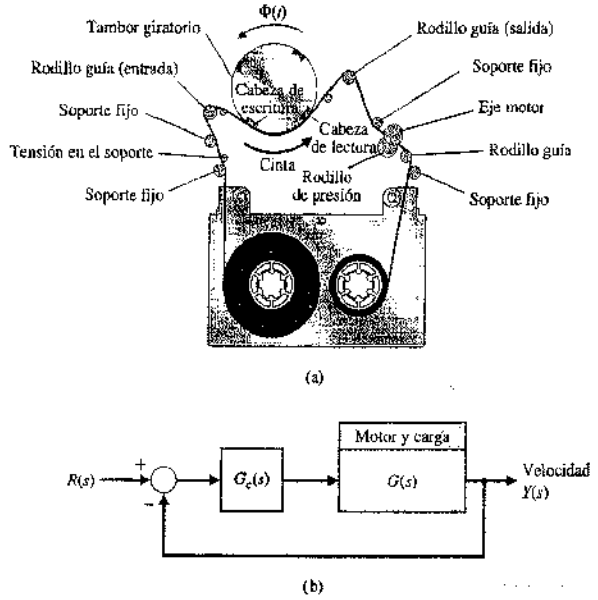


FIGURA PD12.2
Control de un reproductor de cinta de audio digital (DAT).

$0.5 \leqslant p_1 \leqslant 1.5$ y $3.5 \leqslant p_2 \leqslant 4.5$. El sistema debe responder rápidamente con una sobreelongación a un escalón de menos del 13% y un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) de menos de 0.5 segundos. El sistema requiere un tiempo de pico rápido, de forma que no se permite la condición de sobreamortiguada. Determinar un controlador PID que genere un respuesta aceptable en todo el rango de variación de los parámetros. La ganancia $K_m K_3$ no puede exceder de 20 cuando el nominal $K_m = 4$ y K_3 se define como en la Ecuación (12.33).

PD12.3. Muchos laboratorios de universidades y gobiernos han construido manos de robots capaces de coger y manipular objetos. Pero enseñar a dispositivos artificiales a realizar incluso tareas simples requería una formidable programación de un computador. Ahora, sin embargo, la «Mano Diestra Maestra» (DHM) puede usarse en lugar de una mano humana para registrar los movimientos de lado a lado y de doblar las articulaciones de los dedos. Cada articulación va equipada con un sensor que cambia su señal dependiendo de la posición. Las señales de todos los sensores se trasladan a un computador y se utilizan para operar las manos del robot [1].

El DHM se muestra en las partes (a) y (b) de la Figura PD12.3. En la parte (c) se muestra el sistema de control del ángulo de la articulación. El valor normal de K_m es 1.0. El objetivo es diseñar un controlador PID de forma que el error en estado estacionario para una entrada en rampa sea nulo. También el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) debe ser menor que 3 segundos para la entrada en rampa. Se desea que el controlador sea

$$G_c(s) = \frac{K_3(s^2 + 6s + 18)}{s}.$$

(a) Seleccionar K_3 y obtener la respuesta en rampa. Representar el lugar de las raíces cuando K_3 varía. (b) Si K_m cambia a la mitad de su valor normal y $G_c(s)$ permanece tal como se diseñó en el apartado (a), obtener la respuesta en rampa del sistema. Comparar los resultados de los apartados (a) y (b) y razonar la robustez del sistema.

PD12.4. Objetos más pequeños que las longitudes de onda de la luz visible son un asunto principal de la ciencia y la tecnología contemporánea. Los biólogos estudian moléculas simples de proteínas o ADN; los científicos de materiales examinan defectos a escala atómica en cristales; los ingenieros microelectrónicos diseñan circuitos en sólo unas pocas decenas de grosor de átomos. Hasta hace poco, este mundo diminuto sólo se podía ver mediante complicados métodos que a menudo eran destructivos, tales como la microscopía electrónica y la difracción por rayos X. Estaba fuera del alcance de cualquier instrumento tan simple y directo como el familiar microscopio de luz. Nuevos microscopios, tipificados por el microscopio de efecto túnel (STM), están ahora disponibles [3].

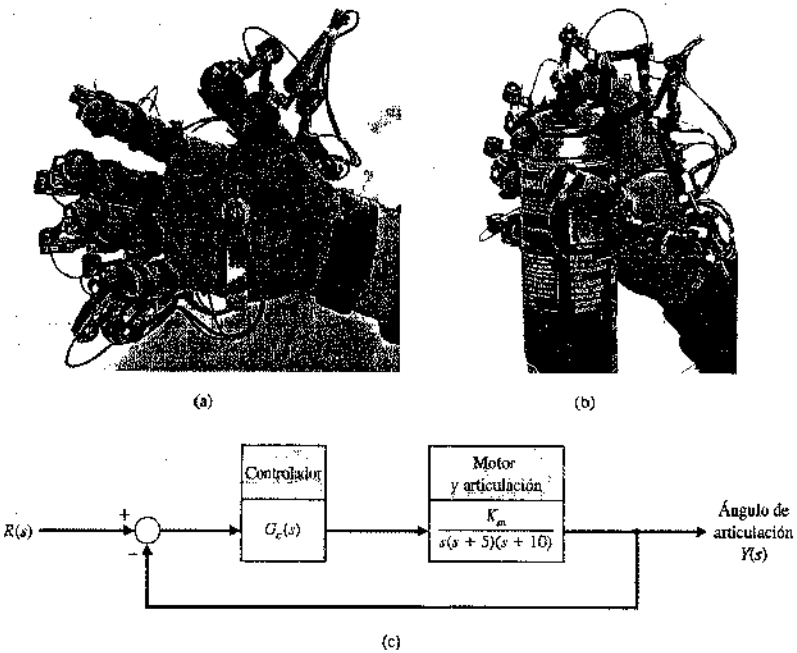


FIGURA PD12.3
Mano diestra maestra.

La precisión del control requerido es del orden de los nanómetros. El STM se fundamenta en sensores piezoeléctricos que cambian de tamaño cuando se modifica el voltaje que se aplica al material. La «apertura» en el STM es una pequeña sonda de tungsteno; su punta es tan fina que puede constar de sólo un único átomo y medir 0.2 nanómetros en anchura. Los controles piezoeléctricos maniobran la punta hasta dentro de uno o dos nanómetros de la superficie de la muestra conductora —tan próxima que la nube de electrones del átomo en la punta de la sonda y aquellos pertenecientes a los átomos más cercanos de la muestra se solapan—. Un mecanismo de realimentación mide las variaciones en la corriente túnel y modifica el voltaje aplicado a un tercer eje z de control. El eje z piezoeléctrico mueve la prueba verticalmente para estabilizar la corriente y mantener una separación constante entre la punta del microscopio y la superficie. En la Figura PD12.4(a) se muestra el sistema de control y en la Figura PD12.4(b) su diagrama de bloques. El proceso es

$$G(s) = \frac{17\,640}{s(s^2 + 59.4s + 1764)},$$

y el controlador se escoge de forma que tenga dos ceros reales y distintos. Se tiene entonces

$$G_c(s) = \frac{K_2(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s}.$$

(a) Utilizar el método de diseño ITAE para determinar $G_c(s)$. (b) Determinar la respuesta a un escalón del sistema con y sin un prefiltro $G_p(s)$. (c) Determinar la respuesta del sistema a una perturbación cuando $D(s) = 1/s$. (d) Utilizando el prefiltro y la $G_c(s)$ de los apartados (a) y (b), determinar la respuesta cuando el proceso cambia a

$$G(s) = \frac{16\,000}{s(s^2 + 40s + 1600)}.$$

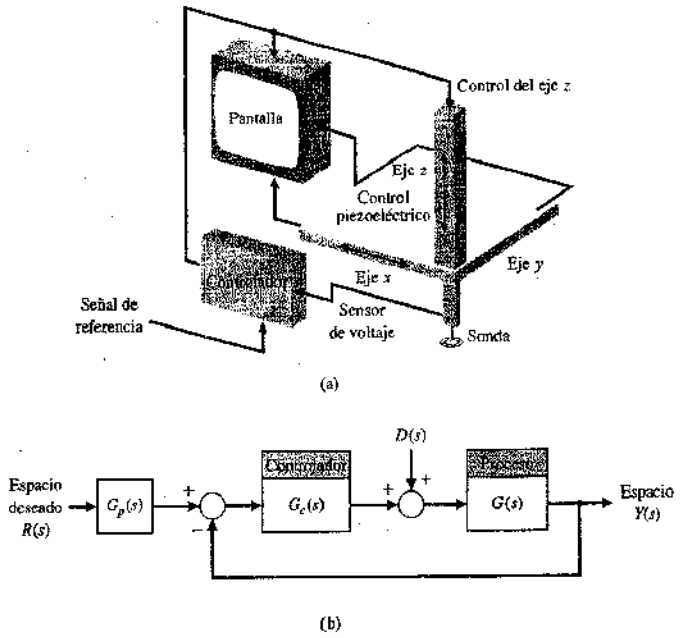


FIGURA PD12.4
Control de un microscopio.

PD12.5. Se desea diseñar el sistema descrito en PD12.4 utilizando las técnicas de respuesta en frecuencia presentadas en la Sección 12.6 con

$$G_c(s) = \frac{K_2(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s}$$

Seleccionar los coeficientes de $G_c(s)$ de forma que el margen de fase sea aproximadamente 45°. Obtener la respuesta del sistema a un escalón con y sin un prefiltro $G_p(s)$.

PD12.6. El uso de la teoría de control para proporcionar nuevas perspectivas en neurofisiología tiene una larga historia. Tan pronto como el comienzo del pasado siglo, muchos investigadores describieron un fenómeno de control de músculo originado por la acción de realimentación de los tendones del músculo y por los sensores que se basan en una combinación de la longitud del músculo y de su velocidad de cambio.

El análisis de la regulación del músculo se ha fundamentado en la teoría de los sistemas de control de una entrada y una salida. Un ejemplo es una propuesta de que el estiramiento reflejo es una observación experimental de una estrategia de control motora, es decir, el control de la longitud del músculo individual por los tendones. Otros posteriormente proponían la regulación de la rigidez del músculo individual (mediante sensores de longitud y fuerza) como la estrategia de control motora [34].

En la Figura PD12.6 se muestra un modelo del mecanismo para estar de pie de los seres humanos. Considérese el caso de un parapléjico que ha perdido el control de su mecanismo para estar de pie. Se propone añadir un controlador artificial para conseguir que la persona permanezca de pie y pueda articular sus piernas. (a) Diseñar un consolador cuando los valores normales de los parámetros son $K = 10$, $a = 12$ y $b = 100$ con el fin de lograr una respuesta a un escalón con un porcentaje de sobreelongación menor que el 10%, error en

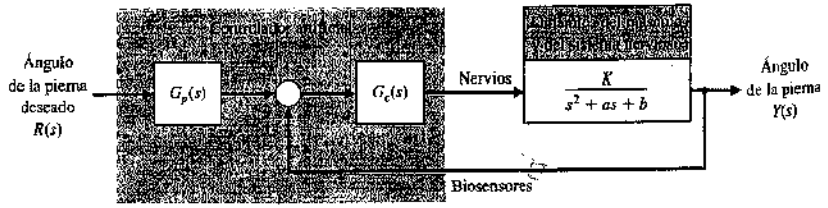


FIGURA PD12.6
Control artificial para estar de pie y de articulación de la pierna.

estado estacionario menor que el 5% y un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) menor que 2 segundos. Intentar un controlador con ganancia proporcional, PI, PD y PID. (b) Cuando la persona está fatigada, los parámetros pueden cambiar a $K = 15$, $a = 8$ y $b = 144$. Examinar el comportamiento de este sistema con los controladores de la parte (a). Preparar una tabla contrastando los resultados de los apartados (a) y (b).

PD12.7. El objetivo es diseñar un sistema de control para un ascensor de forma que se mueva de piso a piso rápidamente y se pare con precisión en el piso seleccionado (Figura PD12.7). El ascensor contendrá de uno a tres ocupantes. Sin embargo, el peso del ascensor debería ser mayor que el peso de los ocupantes; se puede suponer que el ascensor pesa 1000 libras y cada ocupante 150 libras. Diseñar un sistema para controlar de manera precisa al ascensor con un error de un centímetro. Suponer que el gran motor de cc está controlado por campo. También suponer que la constante de tiempo del motor y la carga es un segundo, la constante de tiempo del amplificador de potencia que mueve al motor es de 0.5 segundos y la constante de tiempo del campo es despreciable. Se desea una sobreelongación menor que el 6% y un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) menor que 4 segundos.

PD12.8. Pacientes con una enfermedad cardiológica de una fuerza en el músculo del corazón menor que la normal se pueden beneficiar de un dispositivo de ayuda. Un dispositivo de asistencia ventricular eléctrico (EVAD) convierte la potencia eléctrica en caudal de sangre al mover una placa propulsora contra una cavidad de sangre flexible. La placa propulsora produce un movimiento de vaivén para expulsar sangre en la sístole y permitir a la cavidad llenarse en la diástole. El EVAD será implantado en paralelo con el corazón natural intacto tal como se muestra en la Figura PD12.8(a). El EVAD se mueve mediante baterías recargables y la potencia eléctrica se transmite inductivamente a través de la piel mediante un sistema de transmisión. Las baterías y el sistema de transmisión limitan el almacenamiento de energía eléctrica y la potencia pico transmitida. En consecuencia, se desea mover el EVAD de forma que minimice el consumo de potencia eléctrica [29].

El EVAD tiene una única entrada, el voltaje aplicado al motor, y una única salida, el caudal de sangre. El sistema de control del EVAD efectúa dos tareas principales: ajusta el voltaje del motor para mover la placa propulsora a través de su recorrido deseado y varía el caudal de sangre del EVAD para cumplir la demanda de salida cardíaca del cuerpo variando la frecuencia del EVAD.

En la Figura PD12.8(b) se muestra un modelo del sistema de control con realimentación. El motor, la bomba y la cavidad se pueden modelar por un retardo de tiempo con $T = 1$ segundo. El objetivo es conseguir una respuesta a un escalón con menos del 5% de error en estado estacionario y menos del 10% de sobreelongación. Además, para prolongar las baterías, el voltaje está limitado a 30 V. Diseñar un controlador utilizando (a) $G_c(s) = K/s$, (b) un controlador PI, y (c) un controlador PID. Comparar los resultados para los tres controladores registrando en una tabla el porcentaje de sobreelongación, tiempo de pico, tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) y el valor máximo de $u(t)$.

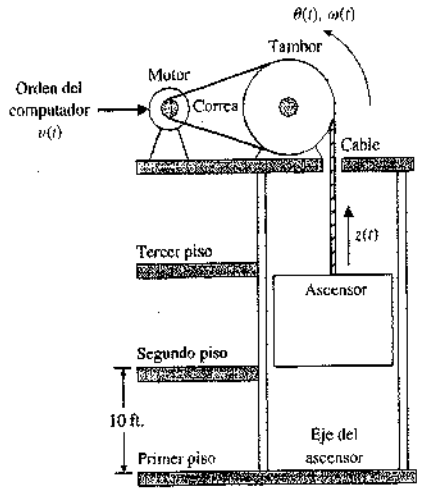
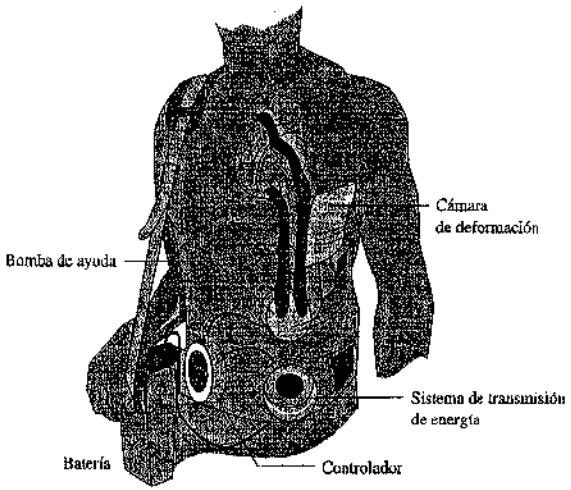
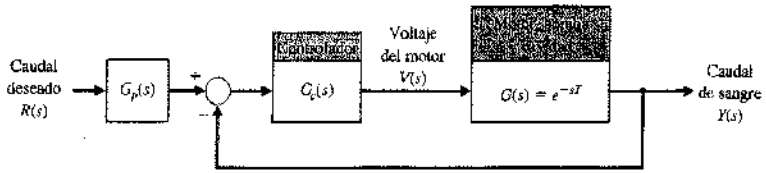


FIGURA PD12.7. Control de posición de un ascensor.



(a)



(b)

FIGURA PD12.8
(a) Dispositivo ventricular eléctrico de ayuda para pacientes de cardiología.
(b) Sistema de control con realimentación.

PD12.9. En la Figura PD12.9(a) se muestra un robot espacial. En la Figura PD12.9(b) se muestra el diagrama de bloques del control del brazo. La función de transferencia del motor y del brazo es

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 10)}.$$

(a) Si $G_c(s) = K$, determinar la ganancia necesaria para una sobreelongación del 4.5% y representar la respuesta a un escalón. (b) Diseñar un controlador proporcional-derivativo (PD) utilizando el método ITAE y $\omega_n = 10$. Determinar el prefiltro requerido $G_p(s)$. (c) Diseñar un controlador PI y un prefiltro utilizando el método ITAE. (d) Diseñar un controlador PID y un prefiltro utilizando el método ITAE con $\omega_n = 10$. (e) Determinar el efecto de una perturbación en escalón unitario para cada diseño. Registrar el valor máximo de $y(t)$ para la entrada de perturbación. (f) Determinar la sobreelongación, tiempo de pico y tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) a un escalón $R(s)$ para cada uno de los diseños anteriores. (g) La planta está sujeta a variación debida a cambios en la carga. Calcular la magnitud de la sensibilidad en $\omega = 5$, $|S_G^T(j5)|$, donde

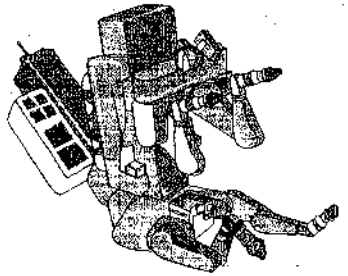
$$T = \frac{GG_c(s)}{1 + GG_c(s)}.$$

(h) Basándose en los resultados de los apartados (e), (f) y (g), seleccionar el mejor controlador.

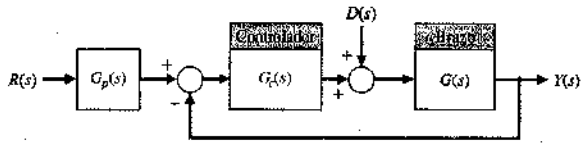
PD12.10. En una estación espacial se monta un sistema fotovoltaico para desarrollar la potencia para la estación. Los paneles fotovoltaicos deberían seguir al sol con buena precisión con el fin de maximizar la energía de los paneles. El sistema utiliza un motor de cc, de forma que la función de transferencia del montaje del panel y el motor es

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 25)}.$$

Se seleccionará un controlador $G_c(s)$ suponiendo que un sensor óptico está disponible para seguir con precisión la posición del sol, y así $H(s) = 1$.



(a)



(b)

FIGURA PD12.9
Control de un robot espacial.

El objetivo es diseñar $G_c(s)$ de manera que (1) el porcentaje de sobreelongación a un escalón es menor que el 7% y (2) el error en estado estacionario a una entrada en rampa es menor o igual que un 1%. Determinar el mejor controlador de adelanto de fase. Examinar la robustez del sistema a una variación del 10% en la constante de tiempo del motor.

PD12.11. Los sistemas de suspensión electromagnética para trenes amortiguados por aire se conocen como trenes de levitación magnética (maglev). Un tren maglev utiliza un sistema de imanes superconductores [17]. Utiliza bobinas superconductoras y la distancia de levitación $x(t)$ es inherentemente inestable. El modelo de la levitación es

$$G(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s^2 - \omega_1^2)},$$

donde $V(s)$ es el voltaje de la bobina, τ_1 es la constante de tiempo de los imanes y ω_1 es la frecuencia natural. El sistema utiliza un sensor de posición con una constante de tiempo despreciable. Un tren que viajara a 250 km/h tendría $\tau_1 = 0.75$ segundos y $\omega_1 = 75$ rad/s. Determinar un controlador que pueda mantener uniforme una levitación precisa cuando las perturbaciones ocurren a lo largo del ferrocarril. Utilizar el modelo del sistema de la Figura 12.1.

PD12.12. Considérese otra vez el problema del vehículo explorador de Marte descrito en PD6.2. El sistema utiliza un controlador PID y se desea un sistema robusto. Las especificaciones son: (1) máxima sobreelongación igual al 18%, (2) tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) menor que 2 segundos, (3) tiempo de subida igual o mayor que 0.20 para limitar los requisitos de potencia, (4) margen de fase mayor que 65°, (5) margen de ganancia mayor que 8 dB, y (6) máxima sensibilidad de la raíz (magnitud de las partes real e imaginaria) menor que 1. Seleccionar el mejor valor de la ganancia K.

PD12.13. Un problema que sirve como banco de prueba consiste en el sistema masa-resorte que se muestra en la Figura PD12.13, que representa una estructura flexible. Sea $m_1 = m_2 = 1$ y $0.5 \leqslant k \leqslant 2.0$ [33]. Es posible medir x_1 y x_2 y utilizar un controlador que se coloca antes de $u(t)$. Obtener la descripción del sistema, escoger una estructura de control y diseñar un sistema robusto. Determinar la respuesta del sistema a una perturbación en escalón unitario. Suponer que la salida $x_2(t)$ es la variable que se va a controlar.

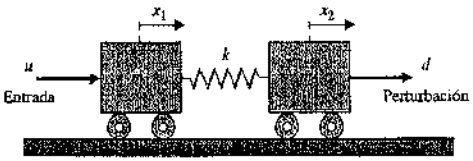


FIGURA PD12.13. Sistema de carro con dos masas.

PROBLEMAS CON MATLAB

PM12.1. En la Figura PM12.1 se muestra un sistema de realimentación en lazo cerrado. Utilizar MATLAB para obtener una gráfica de $|S_K^T|$ respecto de ω. Representar también $|T(s)|$ respecto de ω, donde $T(s)$ es la función de transferencia en lazo cerrado.

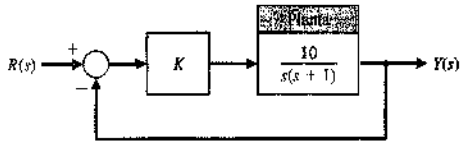


FIGURA PM12.1. Sistema con realimentación en lazo cerrado con ganancia K.

PM12.2. El alerón de un avión se puede modelar como un sistema de primer orden

$$G(s) = \frac{p}{s+p},$$

donde p varía para cada avión. Obtener una familia de respuestas en escalón para el sistema del alerón en la configuración de realimentación que se muestra en la Figura PM12.2.

El valor nominal es de $p = 10$. Calcular un valor razonable de K de forma que la respuesta a un escalón (con $p = 10$) tiene una sobreelongación menor que el 5% y $T_s < 0.1s$. Utilizar MATLAB para obtener la respuesta a un escalón para $0.1 < p < 20$, con el valor de la ganancia K que se haya determinado.

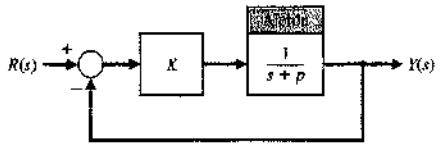


FIGURA PM12.2. Sistema de control en lazo cerrado para el alerón de un avión.

PM12.3. Considérese el sistema de control de la Figura PM12.3, donde

$$G(s) = \frac{1}{Js^2}.$$

Se sabe que el valor de J cambia lentamente con el tiempo, aunque para objetivos de diseño, el valor nominal se elige como $J = 10$.

(a) Diseñar un compensador PID [representado por $G_c(s)$] para conseguir un margen de fase mayor que 45° y un ancho de banda menor que 5 rad/s. (b) Utilizando el controlador PID diseñado en el apartado (a), desarrollar un programa en MATLAB para generar una gráfica del margen de fase cuando J varía de $1 \leqslant J \leqslant 30$.

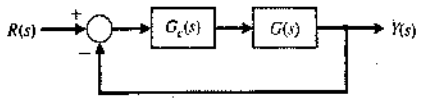


FIGURA PM12.3. Sistema de control realimentado con compensación.

PM12.4. Sea el sistema de control con realimentación de la Figura PM12.4. El valor del parámetro b es desconocido; sin embargo, con fines de diseño el valor nominal se toma como $b = 4$. El valor de $a = 8$ se conoce de forma muy precisa.

(a) Diseñar el controlador proporcional K de forma que la respuesta del sistema en lazo cerrado a una entrada en escalón unitario tiene un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) menor que 5 segundos y una sobreelongación menor que el 10%. Utilizar el valor nominal de b en el diseño.

(b) Investigar los efectos de variaciones en el parámetro b sobre la respuesta a un escalón unitario del sistema en lazo cerrado. Suponiendo $b = 0$, 1, 4 y 40, representar en una misma gráfica la respuesta a un escalón asociada con cada valor de b. En todos los casos, usar el controlador proporcional del apartado (a). Comentar los resultados.

PM12.5. Un modelo de una estructura flexible viene dado por:

$$G(s) = \frac{(1 + k\omega_n^2)s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)},$$

donde ω_n es la frecuencia natural del modo flexible y ζ es la razón de amortiguamiento correspondiente. En general es difícil conocer de forma precisa el amortiguamiento estructural, mientras que la frecuencia natural se puede predecir de forma más precisa empleando técnicas de modelado bien establecidas. Supóngase que los valores nominales de $\omega_n = 2$ rad/s, $\zeta = 0.005$ y $k = 0.1$.

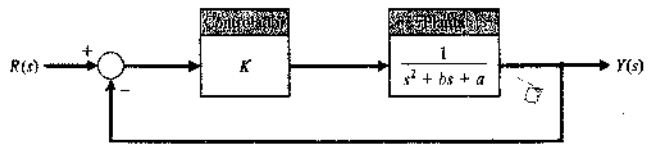


FIGURA PM12.4
Sistema de control realimentado con parámetro incierto b.

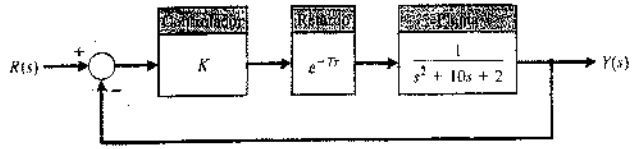


FIGURA PM12.6
Un proceso industrial controlado con un retardo de tiempo en el lazo.

(a) Diseñar un compensador de adelanto para cumplir las siguientes especificaciones: (1) una respuesta en lazo cerrado a una entrada en escalón unitario con un tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) menor que 200 segundos y (2) una sobreelongación menor que el 50%.

(b) Con el controlador del apartado (a), investigar la respuesta a un escalón unitario del sistema en lazo cerrado con $\zeta = 0.005$, 0.1 y 1. Representar en una misma gráfica las diferentes respuestas a un escalón unitario y comentar los resultados.

(c) Desde un punto de vista de sistema de control, ¿es preferible tener el amortiguamiento de la estructura flexible real menor o mayor que el valor de diseño? Explicarlo.

PM12.6. El proceso industrial que se muestra en la Figura PM12.6 se sabe que tiene un retardo de tiempo en el lazo. En la práctica, sucede con frecuencia que la magnitud de los retardos de tiempo del sistema no se puede determinar de manera precisa. El valor del retardo puede cambiar de forma no predecible dependiendo del entorno del proceso. Un sistema de control robusto debería ser capaz de operar satisfactoriamente en presencia de retardos en el sistema.

(a) Desarrollar un programa en MATLAB para calcular y representar el margen de fase para el proceso industrial de la Figura PM12.6 cuando el retardo de tiempo varía entre 0 y 5 segundos. Utilizar la función de pade con una aproximación de segundo orden para aproximar el retardo. Representar el margen de fase como función del retardo.

(b) Determinar el máximo retardo permisible para la estabilidad del sistema. Utilizar la gráfica generada en el apartado (a) para calcular el máximo retardo de tiempo aproximadamente.

PM12.7. Un lazo de realimentación negativa unitaria tiene la función de transferencia de lazo

$$GH(s) = \frac{a(s-1)}{s^2 + 2s + 1}.$$

Se sabe del conocimiento físico del problema que el parámetro a puede variar sólo entre $0 < a < 1$. Desarrollar un programa en MATLAB para generar las gráficas siguientes:

(a) El error de seguimiento en estado estacionario debido a una entrada en escalón unitario [por ejemplo, $R(s) = -1/s$] respecto del parámetro a.

(b) La máxima subelongación (o sobreelongación) inicial en porcentaje respecto del parámetro a.

(c) El margen de ganancia respecto del parámetro a.

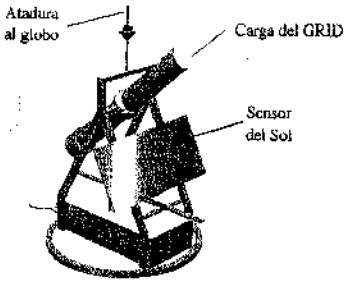
(d) Basándose en los resultados de los apartados (a)-(c), comentar la robustez del sistema a cambios en el parámetro a en términos de los errores en estado estacionario, estabilidad y respuesta temporal transitoria.

PM12.8. El Dispositivo de Imagen de Rayo Gamma (GRID) es un experimento de la NASA que se instala en un globo que permanece a una gran altura por un largo período de tiempo durante la llegada de un máximo de radiación solar. El GRID en un globo es un instrumento que mejorará cualitativamente la imagen de los rayos X duros y llevará a cabo la primera imagen de rayos gamma para el estudio de fenómenos de alta energía solar en la próxima fase de pico de la actividad solar. Desde su plataforma en el globo, GRID observará numerosas explosiones de rayos X duros, coronas de fuentes de rayos X duros, sucesos térmicos «supercalientes» y microerupciones [2]. La Figura PM12.8(a) representa la carga total de GRID que está unida al globo. Los grandes componentes del experimento GRID consisten en una barquilla de 5.2 metros, un globo de gran altura y un cable que conecta la barquilla y el globo. Los requisitos del experimento de apuntamiento instrumento-sol son: 0.1 grado de precisión en el apuntamiento y un arco de 0.2 segundos por 4 ms de estabilidad de apuntamiento.

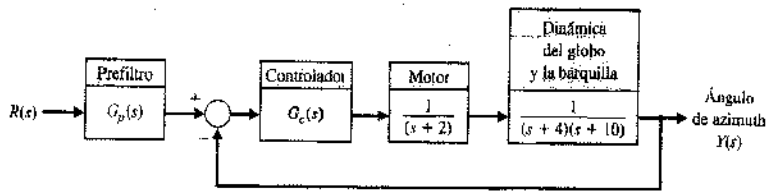
Un sensor óptico proporciona una medida del ángulo sol-instrumento y se modela como un sistema de primer orden con una ganancia cc y un polo en $s = -500$. Un par motor actúa sobre el ensamblaje de la barquilla. En la Figura PM12.8(b) se muestra el sistema de control del ángulo de azimut. El controlador PID se selecciona por el equipo de diseño de forma que

$$G_c(s) = \frac{K_3(s^2 + as + b)}{s},$$

donde hay que escoger a y b. Se emplea un prefiltro tal como se muestra en la Figura PM12.8(b). Determinar el valor de K_3, a y b de manera que las raíces dominantes tengan un ζ de 0.8 y la sobreelongación a una entrada en escalón sea menor que el 3%. Desarrollar una simulación en Simulink para estudiar el comportamiento del sistema de control. Usar una entrada en escalón y observar los resultados en una gráfica xy.



(a)



(b)

FIGURA PM12.8
El dispositivo GRID.

TÉRMINOS Y CONCEPTOS

Controlador de proceso. *Véase* Controlador PID.

Controlador de tres modos. *Véase* Controlador PID.

Controlador de tres términos. *Véase* Controlador PID.

Controlador PID. Controlador con tres términos en el cual la salida es la suma de un término proporcional, un término integral y un término diferenciador, con una ganancia ajustable para cada término.

Criterio de estabilidad robusta. Test para robustez con respecto a perturbaciones multiplicativas en el cual se garantiza estabilidad si $|M(j\omega)| < \left|1 + \frac{1}{G(j\omega)}\right|$, para toda ω, donde $M(s)$ es la perturbación multiplicativa.

Función de sensibilidad. Función $S(s) = [1 + G_c(s)G(s)]^{-1}$ que satisface la relación $S(s) + T(s) = 1$, donde $T(s)$ es la función de sensibilidad complementaria.

Función de sensibilidad complementaria. Función $T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$ que satisface la relación $S(s) + T(s) = 1$, donde $S(s)$ es la función de sensibilidad. La función $T(s)$ es la función de transferencia en lazo cerrado.

Perturbación aditiva. Modelo de perturbación del sistema expresado en la forma aditiva $G_a(s) = G(s) + A(s)$, donde $G(s)$ es la planta nominal, $A(s)$ es la perturbación que está acotada en magnitud y $G_a(s)$ es la familia de plantas perturbadas.

Perturbación multiplicativa. Modelo de perturbación del sistema expresado en la forma multiplicativa $G_m(s) = G(s)[1 + M(s)]$, donde $G(s)$ es la planta nominal, $M(s)$ es la perturbación que está acotada en magnitud y $G_m(s)$ es la familia de plantas perturbadas.

Prefiltro. Función de transferencia, $G_p(s)$, que filtra la señal de entrada $R(s)$ antes del cálculo de la señal de error.

Principio del modelo interno. Principio que dice que si $G_c(s)G(s)$ contiene a la entrada $R(s)$, entonces la salida $y(t)$ seguirá a $R(s)$ asintóticamente (en el estado estacionario) y el seguimiento es robusto.

Sensibilidad de la raíz. Medida de la sensibilidad de las raíces (por ejemplo, los polos y ceros) del sistema a cambios en un parámetro definido por $S_\alpha^{r_i} = \frac{\partial r_i}{\partial \alpha / \alpha}$, donde α es el parámetro y r_i es la raíz.

Sensibilidad del sistema. Medida de la sensibilidad del sistema a cambios en un parámetro definido por $S_\alpha^T = \frac{\partial T / T}{\partial \alpha / \alpha}$, donde α es el parámetro y T es la función de transferencia del sistema.

Sistema de control robusto. Sistema que exhibe el comportamiento deseado en la presencia de incertidumbre significativa en la planta.

CAPÍTULO 13

Sistemas de control digital

13.1. Introducción 788
13.2. Aplicaciones de los sistemas de control por computador 788
13.3. Sistemas de datos muestreados 790
13.4. La transformada z 793
13.5. Sistemas de datos muestreados en lazo cerrado 798
13.6. Análisis de estabilidad en el plano z 800
13.7. Comportamiento de un sistema de segundo orden de datos muestreados 801
13.8. Sistemas en lazo cerrado con compensación mediante un computador 804
13.9. Diseño del sistema de control del movimiento de una mesa de trabajo 806
13.10. Lugar de las raíces de sistemas de control digital 808
13.11. Implementación de controladores digitales 812
13.12. Sistemas de control digital utilizando MATLAB 813
13.13. Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco 818
13.14. Resumen 820

SINOPSIS

Un computador digital puede servir como un compensador o un controlador en un sistema de control realimentado. Puesto que el computador recibe datos sólo en intervalos específicos, es necesario desarrollar un método para describir y analizar el comportamiento de los sistemas de control por computador.

El sistema del computador utiliza datos muestreados en intervalos preespecificados, resultando unas series temporales de señales. Estas series temporales, denominadas datos muestreados, se pueden transformar en el dominio s y, después, en el dominio z mediante la relación $z = e^{sT}$. El dominio de frecuencia compleja en términos de z tiene propiedades similares a las del dominio s de Laplace.

Se puede utilizar la transformada z de una función de transferencia para analizar la estabilidad y la respuesta transitoria de un sistema. Por tanto, se puede determinar fácilmente la respuesta de un sistema realimentado en lazo cerrado con un computador digital utilizado como bloque compensador (o controlador). También se puede emplear el método del lugar de las raíces para determinar la situación de las raíces de la ecuación característica. Estos sistemas de control se utilizan ampliamente en la industria. También desempeñan un papel importante en el control de procesos industriales que emplean una combinación de un computador y un actuador que trabajan de manera conjunta para conseguir una serie de objetivos. Este capítulo finaliza con el diseño de un controlador digital para el Ejemplo de diseño secuencial: Sistema de lectura de una unidad de disco.

13.1. INTRODUCCIÓN

Durante las tres últimas décadas, el empleo de un computador digital como dispositivo compensador (controlador) ha aumentado, ya que su precio y confiabilidad han mejorado notablemente [1, 2]. En la Figura 13.1 se muestra un diagrama de bloques de un sistema de control digital de lazo simple. En esta configuración de sistema, el computador digital recibe el error de forma digital y realiza los cálculos para proporcionar una salida de manera digital. El computador se puede programar para proporcionar una salida de forma que el comportamiento del proceso sea igual, o casi, al comportamiento deseado. Muchos computadores tienen la capacidad de recibir y manipular diversas entradas, por lo que un sistema de control por computador digital constituye frecuentemente un sistema multivariable.

Un computador digital recibe señales en forma digital (numérica), en contraste con las señales continuas [3]. Un **sistema de control digital** utiliza señales digitales y un computador digital para controlar un proceso. Los datos medidos se convierten de una forma analógica a otra digital por medio de un convertidor, como se muestra en la Figura 13.1. Después de procesar las entradas, el computador digital proporciona una salida en forma digital. Esta salida, a su vez, se convierte en analógica mediante el convertidor digital a analógico que se muestra en la citada figura.

13.2. APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE CONTROL POR COMPUTADOR

El número total de sistemas de control por computador instalados en la industria ha crecido en las tres últimas décadas [2]. En la actualidad existen aproximadamente 100 millones de sistemas de control que emplean computadores, aunque el tamaño y capacidad de éstos varía significativamente. Si sólo se consideran sistemas de control por computador de una naturaleza relativamente compleja, como el control de procesos químicos o de aviones, el número de sistemas de control por computador es de aproximadamente 20 millones.

Un computador digital consiste en una unidad de procesamiento de control (UPC), unidades de entrada y salida, y una unidad de memoria. El tamaño y la capacidad de un computador varían con el tamaño, la velocidad y la potencia de la UPC, así como con el tamaño, la velocidad y la organización de la unidad de memoria. Desde 1980 se han hecho cada vez más comunes los computadores pequeños, llamados **minicomputadores**. Se dispone además de computadores pequeños y de bajo costo denominados **microcomputadores**, que emplean una palabra de 16 bits o de 32 bits. Estos sistemas emplean un microprocesador como UCP. Por esto, la naturaleza de la tarea de control, la cantidad de datos requeridos en la memoria y la velocidad de los cálculos requeridos determinarán la elección del computador dentro de los disponibles.

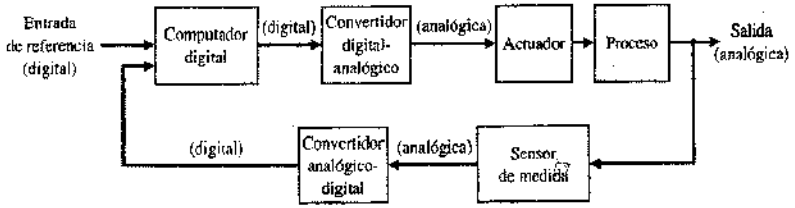


FIGURA 13.1
Diagrama de bloques de un sistema de control por computador que incluye los convertidores de señales. La señal se indica como digital o analógica.

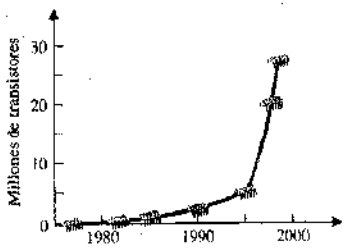


FIGURA 13.2
El desarrollo del microprocesador INTEL medido en millones de transistores. (*Fuente:* INTEL.)

Tanto el tamaño de los computadores como el coste de los dispositivos lógicos activos utilizados en su construcción han disminuido exponencialmente. El número de componentes activos por centímetro cúbico se ha incrementado, por lo que el tamaño real de los computadores ha disminuido hasta el punto de ser relativamente de bajo costo; computadores potentes LAPTOP están proporcionando capacidades computacionales de alto rendimiento a estudiantes y profesionales y en muchos casos están sustituyendo a los tradicionales microcomputadores de sobremesa. La velocidad de los computadores también se ha incrementado exponencialmente. La densidad de los transistores (una medida del comportamiento computacional) del microprocesador integrado INTEL se ha incrementado exponencialmente en los últimos treinta años, como se muestra en la Figura 13.2. De hecho, y de acuerdo con la «ley de Moore», la densidad de transistores se dobla cada año, y probablemente continúe a este ritmo durante los próximos veinte años. Un cálculo simple muestra que, en 2012, los microprocesadores contendrá billones de transistores con velocidades de operación que se aproxime a ¡10 GHz! En 1976, la popular unidad central de proceso 8086 contenía sólo 29 000 transistores y operaba a 10 MHz. Desde entonces se han llevado a cabo progresos significativos en la capacidad computacional y se continúa progresando. Claramente, las mejoras en la capacidad computacional han revolucionado la aplicación de la teoría de control y diseño en la era moderna. Con la disponibilidad de microprocesadores rápidos, de bajo costo y de pequeño tamaño, una gran parte del control de procesos industriales y comerciales se está dirigiendo hacia el empleo de computadores en los sistemas de control.

Los sistemas de control digital se emplean en múltiples aplicaciones: para máquinas herramienta, procesos metalúrgicos, procesos químicos, control de aviones, control de tráfico de automóviles, etc. [4-8]. La Figura 13.3 muestra un ejemplo de sistema de control por computador usado en la industria aeronáutica. Los sistemas controlados automáticamente por computador se emplean con fines tan diversos como la medición de la refracción de objetivos del ojo humano y la frecuencia de chispa de un motor o la relación aire-combustible de motores de automóviles. Estas últimas innovaciones son necesarias para reducir las emisiones de los automóviles y aumentar la economía de combustible.

Entre las ventajas de usar el control digital se hallan el aumento de sensibilidad; el uso de señales codificadas digitalmente, de sensores y transductores digitales y de microprocesadores; sensibilidad reducida a la señal de ruido, y posibilidad de reconfigurar fácilmente el algoritmo de control mediante software. La mejora en la sensibilidad resulta de las señales de baja energía que requieren los dispositivos y sensores digitales. El empleo de señales codificadas digitalmente permite una aplicación más amplia de los dispositivos y comunicaciones digitales. Los sensores y transductores digitales pueden medir, transmitir y acoplar señales y dispositivos de una manera efectiva. Además, existen muchos sistemas que son intrínsecamente digitales ya que emiten señales de

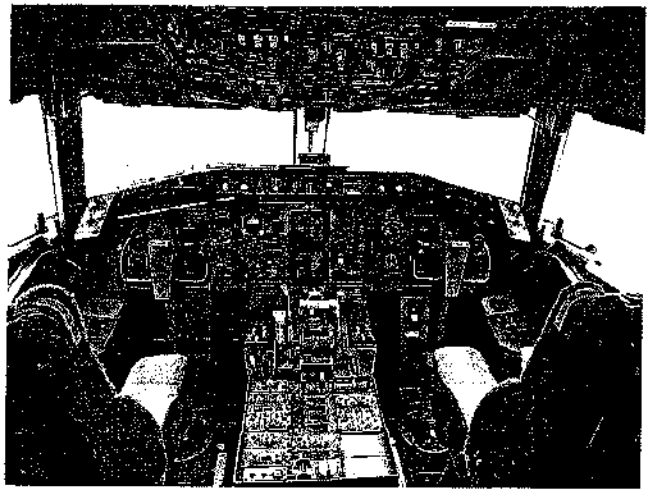


FIGURA 13.3. Las cabinas de vuelo de las aeronaves Boeing 757 y 767 tienen electrónica con control digital, que incluye un sistema de indicación de los motores y un sistema de alerta para la tripulación. Todos los controles del sistema se encuentran al alcance de los pilotos. Este incluye un sistema de referencia inercial, que emplea giroscopios láser y un indicador-director de posición electrónico. Un sistema con computador de dirección de vuelo integra las funciones de navegación, guía y datos de comportamiento. Cuando se acopla al sistema de control automático de vuelo (piloto automático), el sistema de dirección de vuelo proporciona niveles de empuje de los motores y de rumbo precisos durante todas las fases del vuelo, desde inmediatamente después del despegue hasta la aproximación final y el aterrizaje. El sistema puede predecir las velocidades y altitudes a las cuales se tendrá la mejor economía de combustible, y ordenará al avión seguir las trayectorias de mayor eficiencia de combustible o de «menor tiempo». (Cortesía de Boeing Airplane Co.)

pulso. Ejemplos de estos sistemas digitales son el sistema de rastreo de los radares y los satélites espaciales.

Las velocidades con que se reciben datos de las misiones planetarias se han incrementado en los últimos veinte años por un factor de un millón, hasta 10^{12} bits por misión con la sonda espacial Galileo [18].

13.3. SISTEMAS DE DATOS MUESTREADOS

Los computadores que se emplean en sistemas de control están interconectados al actuador y al proceso por medio de convertidores de señales. La salida del computador se procesa mediante un convertidor digital a analógico. Se supondrá que todos los números que entran o salen del computador lo hacen en el mismo periodo de tiempo fijo T, llamado **periodo de muestreo**. Así, por ejemplo, la entrada de referencia de la Figura 13.4 es una secuencia de valores de muestra $r(kT)$. Las variables $r(kT)$, $m(kT)$ y $u(kT)$ son señales discretas, mientras que $m(t)$ y $c(t)$ son funciones continuas del tiempo.

El muestreador es básicamente un interruptor que cierra cada T segundos por instante de tiempo. Se considera el muestreador ideal que aparece en la Figura 13.5. La entrada es $r(t)$ y la salida es $r^*(t)$, donde nT es el tiempo de muestreo hasta ese momento y el valor correspondiente de $r^*(t)$ es $r(nT)$. Entonces se tiene que $r^*(t) = r(nT)\delta(t - nT)$, donde δ es la función de impulso.

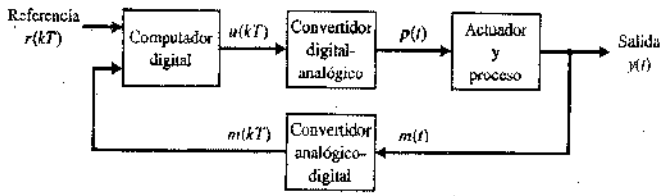


FIGURA 13.4
Un sistema digital de control.

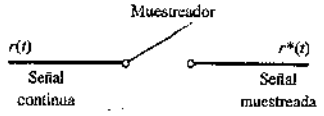


FIGURA 13.5
Un muestreador ideal con una entrada $r(t)$.

Se supone, como se muestra en la Figura 13.5, que se muestrea una señal $r(t)$ y que se obtiene $r^*(t)$. Entonces se sigue la serie para $r^*(t)$ como se muestra en la Figura 13.15, donde un muestreador ideal implica que la salida $r^*(t)$ es una cadena de impulsos que comienza en $t = 0$, espaciados T segundos, y de una amplitud $r(kT)$. Por ejemplo, se considera la señal de entrada $r(t)$ que se muestra en la Figura 13.6(a). La señal muestreada se presenta en la Figura 13.6(b) con un impulso representado por una flecha vertical de magnitud $r(kT)$.

Un convertidor digital-analógico sirve como un dispositivo que convierte la señal muestreada $r^*(t)$ en una señal continua $p(t)$. El convertidor digital-analógico se puede representar normalmente por un circuito retenedor de orden cero, como se muestra en la Figura 13.7. El retenedor de orden cero toma el valor $r(kT)$ y lo mantiene constante en

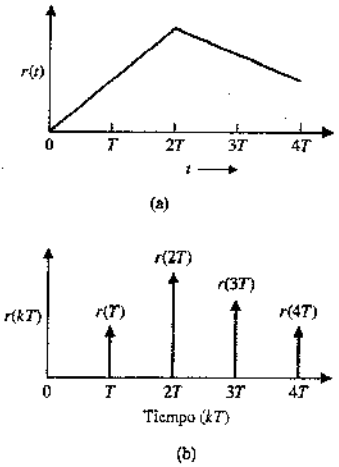


FIGURA 13.6. (a) Una señal de entrada $r(t)$. (b) La señal muestreada $r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t - kT)$. Las flechas verticales representan un impulso.

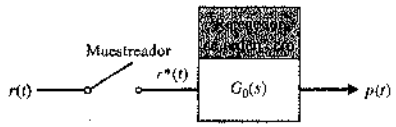


FIGURA 13.7. Un muestreador y un circuito retenedor de orden cero.

$r(kT)$ para $kT \leq t < (k+1)T$, como se muestra en la Figura 13.8 para $k = 0$. Por lo tanto, se utiliza $r(kT)$ durante el periodo de muestreo.

Un muestreador y un retenedor de orden cero pueden seguir con toda precisión la señal de entrada si T es pequeño comparado con los cambios transitorios en la señal misma. En la Figura 13.9 se muestra la respuesta de un muestreador y un retenedor de orden cero para una entrada de rampa. Finalmente, en la Figura 13.10 se muestra la respuesta de un muestreador y un retenedor de orden cero para una señal que decae exponencialmente para dos valores de periodo de muestreo. Evidentemente, la salida $p(t)$ tenderá a la entrada $r(t)$ a medida que T tiende a cero (como se muestrea con frecuencia).

En la Figura 13.8 se muestra la respuesta a un impulso de un retenedor de orden cero. La función de transferencia del **retenedor de orden cero** es

$$G_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT} = \frac{(1 - e^{-sT})}{s}. \tag{13.1}$$

La precisión de un computador digital y de los convertidores de señal asociados está limitada (*véase* la Figura 13.4). La **precisión** es el grado de exactitud o discriminación con el que se establece una cantidad. La precisión del computador está limitada por una longitud de palabra finita. La precisión de un convertidor analógico a digital está limitada por la capacidad de almacenar su salida solamente en una forma lógica digital compuesta de un número finito de dígitos binarios. Se dice entonces que la señal convertida, $m(kT)$, incluye un **error de cuantificación de amplitud**. Cuando el error de cuantificación y el error debido al tamaño finito de palabra del computador son pequeños en relación con la amplitud de la señal [13, 19], entonces el sistema es suficientemente preciso y se pueden omitir las limitaciones de precisión.

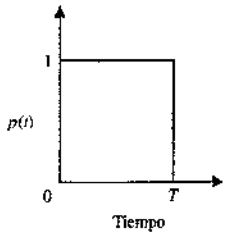


FIGURA 13.8. La respuesta de un retenedor de orden cero a una entrada de impulso $r(kT)$, que es igual a la unidad cuando $k = 0$, e igual a cero cuando $k \neq 0$, por lo que $r^*(t) = r(0)\delta(t)$.

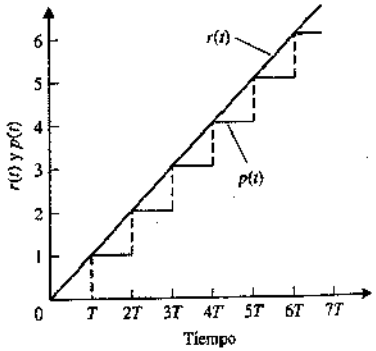
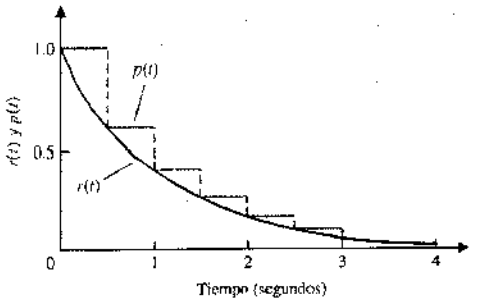
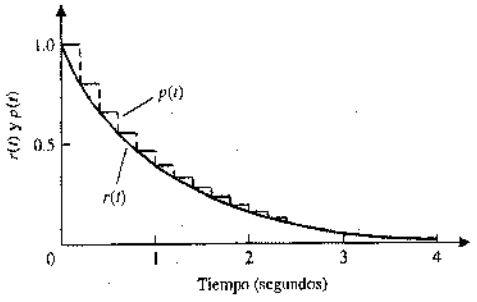


FIGURA 13.9. Respuesta de un muestreador y un retenedor de orden cero para una entrada de rampa, $r(t) = t$.



(a) $T = 0.5$ segundos



(b) $T = 0.2$ segundos

FIGURA 13.10
Respuesta de un muestreador y un retenedor de orden a una entrada $r(t) = e^{-t}$, para dos valores del periodo de muestreo T.

13.4. LA TRANSFORMADA Z

Como la salida de un muestreador ideal, $r^*(t)$, es una serie de impulsos con valores $r^*(kT)$, se tiene que

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t - kT), \tag{13.2}$$

para una señal para $t > 0$. Empleando la transformación de Laplace, se tiene

$$\mathcal{L}\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)e^{-ksT}. \tag{13.3}$$

Se tiene ahora una serie infinita que comprende factores de e^{sT} y sus potencias. Se define

$$\boxed{z = e^{sT},} \tag{13.4}$$

donde esta relación incluye una transformación conforme del plano s al plano z. Se define entonces una nueva transformación, denominada transformada z, tal que

$$Z\{r(t)\} = Z\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)z^{-k}. \tag{13.5}$$

Como ejemplo, se va a determinar la transformada z de una función de escalón unitaria $u(t)$ [no debe confundirse con la señal de control $u(t)$]. Se obtiene que

$$Z\{u(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}, \tag{13.6}$$

dado que $u(kT) = 1$ para $k \geq 0$. Esta serie se puede escribir en forma cerrada como[1]

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \tag{13.7}$$

En general, se define la **transformada** z de una función $f(t)$ como

$$\boxed{Z\{f(t)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}.} \tag{13.8}$$

EJEMPLO 13.1. Transformada de una exponencial

Se va a determinar la transformada z de $f(t) = e^{-at}$ para $t \geq 0$. Entonces

$$Z\{e^{-at}\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (ze^{+aT})^{-k}. \tag{13.9}$$

Nuevamente, esta serie se puede escribir en forma cerrada como

$$F(z) = \frac{1}{1 - (ze^{aT})^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}. \tag{13.10}$$

Se puede demostrar en general que

$$Z\{e^{-at}f(t)\} = F(e^{aT}z). \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 13.2. Transformada de una sinusoide

Se va a determinar la transformada z de $f(t) = \operatorname{sen} \omega t$ para $t \geq 0$. Se puede escribir sen ωt como

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j}.$$

Por tanto,

$$\{\operatorname{sen} \omega t\} = \left\{\frac{e^{j\omega T}}{2j} - \frac{e^{-j\omega T}}{2j}\right\}. \tag{13.11}$$

[1] Recuérdese que las series geométricas infinitas se pueden escribir $(1 - bx)^{-1} = 1 + bx + (bx)^2 + (bx)^3 + \ldots$ si $(bx)^2 < 1$.

Entonces

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{z(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})}{z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + 1}\right) \\ &= \frac{z \operatorname{sen} \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}. \end{aligned} \tag{13.12}$$

■

En la Tabla 13.1 y en la web MCS se presenta una tabla de transformadas z. En la Tabla 13.2 se incluyen las propiedades de la transformada z. Como en el caso de las transformadas de Laplace, finalmente se está interesado en la salida $y(t)$ del sistema. Por tanto, se debe emplear una transformación inversa para obtener $y(t)$ a partir de $Y(z)$. La salida se puede obtener mediante: (1) el desarrollo de $Y(z)$ en serie de potencias, (2) el desarrollo de $Y(z)$ en fracciones parciales y el empleo de la Tabla 13.1 para obtener la inversa de cada término o (3) obtener la transformada z inversa por medio de una inversión integral. En el presente análisis, se limitarán los métodos a las opciones (1) y (2).

Tabla 13.1 Transformadas z

$x(t)$	$X(s)$	$X(z)$
$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0, \\ 0 & t = kT,\ k \neq 0 \end{cases}$	1	1
$\delta(t - kT) = \begin{cases} 1 & t = kT, \\ 0 & t \neq kT \end{cases}$	e^{-kTs}	z^{-k}
Escalón unidad, $u(t)$	$1/s$	$\dfrac{z}{z - 1}$
t	$1/s^2$	$\dfrac{Tz}{(z - 1)^2}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s + a}$	$\dfrac{z}{z - e^{-aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\dfrac{1}{s(s + a)}$	$\dfrac{(1 - e^{-aT})z}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$
sen ωt	$\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\dfrac{z \operatorname{sen} \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
cos ωt	$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\dfrac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
e^{-aT} sen ωt	$\dfrac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$\dfrac{(ze^{-aT} \operatorname{sen} \omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-aT} \cos \omega t$	$\dfrac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$\dfrac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$

Tabla 13.1 Propiedades de las transformadas z

	$x(t)$	$X(z)$
1.	$kx(t)$	$kX(z)$
2.	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(z) + X_2(z)$
3.	$x(t + T)$	$zX(z) - zx(0)$
4.	$tx(t)$	$-Tz\dfrac{dX(z)}{dz}$
5.	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
6.	$x(0)$, valor inicial	$\lim_{z\to\infty} X(z)$ si el límite existe
7.	$x(\infty)$, valor final	$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$ si el límite existe y el sistema es estable; esto es, si todos los polos de $(z-1)X(z)$ están dentro del círculo unidad $\lvert z\rvert = 1$ en el plano z.

EJEMPLO 13.3. Función de transferencia de un sistema en lazo abierto

Considérese el sistema que se muestra en la Figura 13.11 para $T = 1$. La función de transferencia del retenedor de orden cero (Ecuación 13.1) es

$$G_0(s) = \frac{(1 - e^{-sT})}{s}.$$

Por lo tanto, la función de transferencia $Y(s)/R^*(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{R^*(s)} = G_0(s)G_p(s) = G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s^2(s+1)}. \tag{13.13}$$

Desarrollando en fracciones parciales, se tiene que

$$G(s) = (1 - e^{-sT})\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right) \tag{13.14}$$

$$G(z) = Z\{G(s)\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\}. \tag{13.15}$$

Utilizando las entradas de la Tabla 13.1 para obtener la transformada z de cada término, se obtiene

$$G(z) = (1 - z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T}}\right]$$

$$= \left[\frac{(ze^{-T} - z + Tz) + (1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})}\right].$$

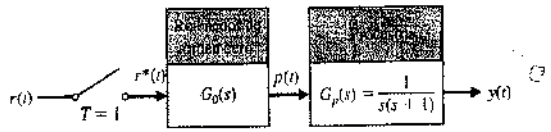


FIGURA 13.11 Sistema de datos muestreados en lazo abierto (sin realimentación).

Cuando $T = 1$, se tiene que

$$G(z) = \frac{ze^{-1} + 1 - 2e^{-1}}{(z-1)(z - e^{-1})}$$

$$= \frac{0.3678z + 0.2644}{(z-1)(z - 0.3678)} = \frac{0.3678z + 0.2644}{z^2 - 1.3678z + 0.3678}. \tag{13.16}$$

La respuesta de este sistema a un impulso unitario se obtiene para $R(z) = 1$, por lo que $Y(z) = G(z) \cdot 1$. Se puede obtener $Y(z)$ dividiendo el denominador entre el numerador, y así

$$\begin{array}{r|l} & 0.3678z^{-1} + 0.7675z^{-2} + 0.9145z^{-3} + \cdots = Y(z) \\ z^2 - 1.3678z + 0.3678 & \overline{0.3678z + 0.2644} \\ & \underline{0.3678z - 0.5031 + 0.1353z^{-1}} \\ & \quad + 0.7675 - 0.1353z^{-1} \\ & \quad \underline{+ 0.7675 - 1.0497z^{-1} + 0.2823z^{-2}} \\ & \qquad 0.9145z^{-1} - 0.2823z^{-2} \end{array} \tag{13.17}$$

Este cálculo produce la respuesta en los momentos de muestreo y se puede realizar hasta donde se requiera para $Y(z)$. A partir de la Ecuación (13.5), se tiene

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k}.$$

En este caso se ha obtenido $y(kT)$ como sigue: $y(0) = 0$, $y(T) = 0.3678$, $y(2T) = 0.7675$ e $y(3T) = 0.9145$. Obsérvese que $y(kT)$ proporciona los valores de $y(t)$ en $t = kT$. ■

Se ha determinado $Y(z)$, la transformada z de la señal de salida muestreada. La transformada z de la señal de entrada muestreada es $R(z)$. La función de transferencia en el dominio z es

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = G(z). \tag{13.18}$$

Como se ha determinado la salida muestreada, se puede utilizar un muestreador a la salida para mostrar esta condición, tal como se ilustra la Figura 13.12; ésta representa el sistema de la Figura 13.11 con un muestreo adicional (ficticio) (mostrado en color). Se supone que ambos muestreadores tienen el mismo periodo de muestreo y que operan de manera síncrona. Entonces

$$Y(z) = G(z)R(z), \tag{13.19}$$

como se requería. Se puede representar la Ecuación (13.19), que es una ecuación en transformada z, mediante el diagrama de bloques de la Figura 13.13.

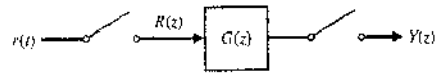


FIGURA 13.12. Sistema con salida muestreada.

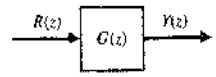


FIGURA 13.13. Transformada z de función de transferencia en forma de diagrama de bloques.

13.5. SISTEMAS DE DATOS MUESTREADOS EN LAZO CERRADO

En esta sección se consideran sistemas de datos muestreados en lazo cerrado. Se considera el sistema que se muestra en la Figura 13.14(a). El modelo de transformada z de los datos muestreados de esta figura con la señal de salida muestreada $Y(z)$ se ilustra en la Figura 13.14(b). La función de transferencia en lazo cerrado (utilizando la reducción de diagramas de bloque) es

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}. \tag{13.20}$$

Aquí se supone que $G(z)$ es la transformada z de $G(s) = G_0(s)G_p(s)$, donde $G_0(s)$ es un retenedor de orden cero y $G_p(s)$ es la función de transferencia de la planta.

Un ejemplo de sistema de control digital es el perro robot Aibo que se muestra en la Figura 13.15(a). En la Figura 13.15(b) se observa el sistema de control realimentado de una articulación con un controlador digital. El modelo de diagrama de bloques en transformada z se muestra en la Figura 13.15(c). La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\boxed{\frac{Y(z)}{R(z)} = T(z) = \frac{G(z)D(z)}{1 + G(z)D(z)}} \tag{13.21}$$

EJEMPLO 13.4. Respuesta de un sistema en lazo cerrado

Considérese ahora el sistema de lazo cerrado que se muestra en la Figura 13.16. Se ha obtenido la transformada z del modelo de este sistema, como se muestra en la Figura 13.14. Por lo tanto, se tiene

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)}. \tag{13.22}$$

En el Ejemplo 13.3 se obtuvo $G(z)$ como se muestra en la Ecuación (13.16) cuando $T = 1$ segundo. Sustituyendo $G(z)$ en la Ecuación (13.22), se obtiene

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.3678z + 0.2644}{z^2 - z + 0.6322}. \tag{13.23}$$

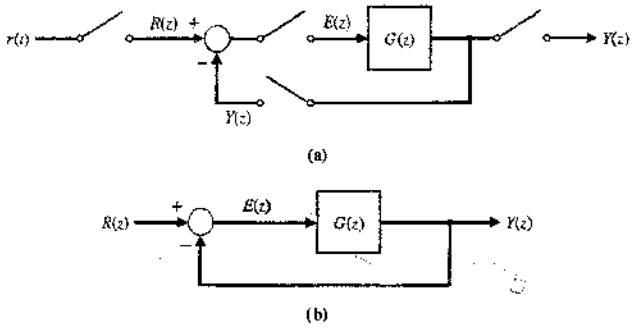
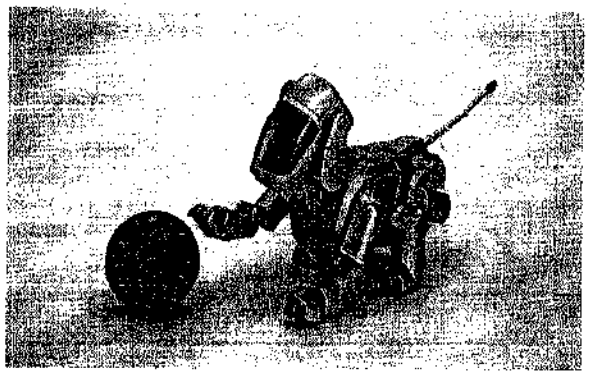
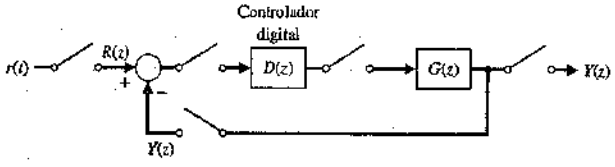


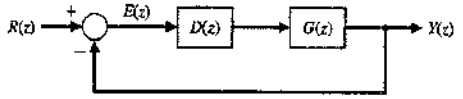
FIGURA 13.14
Sistema de control realimentado con realimentación unidad. $G(z)$ es la transformada z de $G(s)$, que representa la planta y el retenedor de orden cero.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 13.15
(a) Aibo es un robot de entretenimiento sofisticado. Aibo se parece a un Chiguagua y menea la cola, hace trucos y sale a pasear. Aibo depende de una amplia variedad de sensores, que incluyen tacto, cámaras de color CCD, FINDER RANGE y sensores de velocidad. En su interior alberga un microprocesador RISC de 64 bits y memoria de 16 MB. Tiene 18 articulaciones con un motor asociado a cada una. (Fotografía cortesía de Sony Electronics Inc.)
(b) Sistema de control realimentado con un controlador digital. (c) Diagrama de bloques del modelo. Obsérvese que $G(z) = Z\{G_0(s)G_p(s)\}$.

Como la entrada es un escalón unidad,

$$R(z) = \frac{z}{z - 1}, \tag{13.24}$$

entonces

$$Y(z) = \frac{z(0.3678z + 0.2644)}{(z - 1)(z^2 - z + 0.6322)} = \frac{0.3678z^2 + 0.2644z}{z^3 - 2z^2 + 1.6322z - 0.6322}.$$

Completando la división, se tiene

$$Y(z) = 0.3678z^{-1} + z^{-2} + 1.4z^{-3} + 1.4z^{-4} + 1.147z^{-5} \cdots \tag{13.25}$$

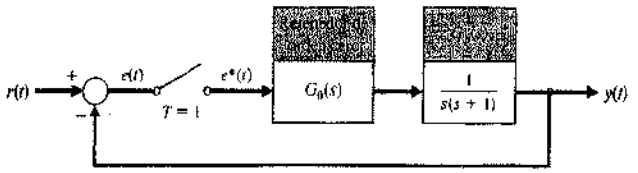


FIGURA 13.16
Un sistema muestreado en lazo cerrado.

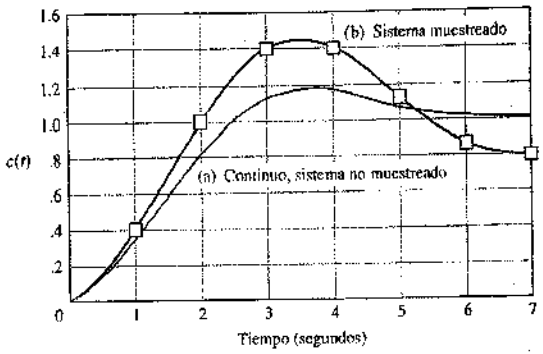


FIGURA 13.17
Respuesta de un sistema de segundo orden: (a) continuo ($T = 0$), no muestreado; (b) sistema muestreado, $T = 1$ segundo.

En la Figura 13.17 se muestran los valores de $y(kT)$ representados por el símbolo □. También se muestra la respuesta completa del sistema de lazo cerrado de los datos muestreados (obtenida utilizando MATLAB; *véase* la Sección 13.12) y se contrasta con la respuesta de un sistema continuo (cuando $T = 0$). La sobreelongación del sistema muestreado es del 45%, lo cual resulta diferente del 17% del sistema continuo. Además, el tiempo de estabilización del sistema muestreado es dos veces mayor que el del sistema continuo. ■

13.6. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD EN EL PLANO *Z*

Un sistema de control continuo con realimentación lineal continuo es estable si todos los polos de la función de transferencia de lazo cerrado $T(s)$ están en la mitad izquierda del plano s. El plano z está relacionado con el plano s por la transformación

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T}. \tag{13.26}$$

Esta relación se puede escribir también como

$$|z| = e^{\sigma T}$$

y

$$\angle z = \omega T. \tag{13.27}$$

En la parte izquierda del plano s, $\sigma < 0$ y, por tanto, la magnitud correspondiente de z varía de 0 a 1. Por esta razón, el eje imaginario del plano s corresponde al círculo en el plano z, y la parte interna del mismo círculo unitario corresponde a la mitad izquierda del plano s [15].

Por tanto, se puede establecer que un **sistema muestreado es estable si todos los polos de la función de transferencia de lazo cerrado $T(z)$ están dentro del círculo unitario en el plano z.**

EJEMPLO 13.5. Estabilidad de un sistema en lazo cerrado

Considérese el sistema que se muestra en la Figura 13.18, cuando $T = 1$ y

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s+1)}. \tag{13.28}$$

Entonces, recordando la Ecuación (13.16), se observa que

$$G(z) = \frac{K(0.3678z + 0.2644)}{z^2 - 1.3678z + 0.3678} = \frac{K(az + b)}{z^2 - (1 + a)z + a}, \tag{13.29}$$

donde $a = 0.3678$ y $b = 0.2644$.

Los polos de la función de transferencia de lazo cerrado $T(z)$ son las raíces de la ecuación $[1 + G(z)] = 0$. Se denomina a $q(z) = 1 + G(z) = 0$ la ecuación característica; por tanto, se obtiene

$$q(z) = 1 + G(z) = z^2 - (1 + a)z + a + Kaz + Kb = 0. \tag{13.30}$$

Cuando $K = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} q(z) &= z^2 - z + 0.6322 \\ &= (z - 0.50 + j0.6182)(z - 0.50 - j0.6182) = 0. \end{aligned} \tag{13.31}$$

En consecuencia, el sistema es estable, ya que las raíces caen dentro del círculo unitario. Cuando $K = 10$, se tiene

$$\begin{aligned} q(z) &= z^2 + 2.310z + 3.012 \\ &= (z + 1.155 + j1.295)(z + 1.155 - j1.295), \end{aligned} \tag{13.32}$$

y el sistema es inestable ya que una de las raíces está fuera del círculo unitario. Este sistema es estable para $0 < K < 2.39$. El lugar de las raíces cuando K varía se muestra en la Sección 13.10.

Es posible observar que un sistema muestreado de segundo orden puede ser inestable al aumentar la ganancia, mientras que un sistema continuo de segundo orden es estable para todos los valores de ganancia (suponiendo que en ambos casos los polos del sistema de lazo abierto caen en la mitad izquierda del plano s). ■

13.7. COMPORTAMIENTO DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN DE DATOS MUESTREADOS

Considérese el comportamiento de un sistema muestreado de segundo orden, con un retenedor de orden cero, como se muestra en la Figura 13.18, cuando la planta es

$$G_p(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}. \tag{13.33}$$

Entonces se obtiene $G(z)$ para el periodo de muestreo T no especificado como

$$G(z) = \frac{K[(z - E)[T - \tau(z - 1)] + \tau(z - 1)^2]}{(z - 1)(z - E)}. \tag{13.34}$$

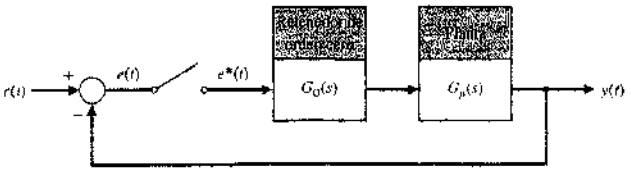


FIGURA 13.18
Sistema muestreado en lazo cerrado.

Tabla 13.3 Ganancia máxima para un sistema muestreado de segundo orden

	T/τ	0	0.1	0.5	1	2
Máximo	$K\tau$	∞	20.4	4.0	2.32	1.45

donde $E = e^{-T/\tau}$. La estabilidad del sistema se analiza considerando la ecuación característica

$$q(z) = z^2 + z\{K[T - \tau(1 - E)] - (1 + E)\} + K[\tau(1 - E) - TE] + E = 0. \quad (13.35)$$

Como el polinomio $q(z)$ es cuadrático y tiene coeficientes reales, las condiciones necesarias y suficientes para que $q(z)$ tenga todas sus raíces dentro del círculo unitario son:

$$|q(0)| < 1, \qquad q(1) > 0 \quad \text{y} \quad q(-1) > 0.$$

Estas condiciones de estabilidad para un sistema de segundo orden se pueden establecer proyectando la ecuación característica del plano z en el plano s y comprobando la positividad de los coeficientes de $q(s)$. Empleando estas condiciones se han establecido a partir de la Ecuación (13.35) las condiciones necesarias como

$$K\tau < \frac{1 - E}{1 - E - (T/\tau)E}, \quad (13.36)$$

$$K\tau < \frac{2(1 + E)}{(T/\tau)(1 + E) - 2(1 - E)}, \quad (13.37)$$

y $K > 0$, $T > 0$. Para este sistema, se puede calcular la máxima ganancia permisible para que sea estable. Esta máxima ganancia permisible se presenta en la Tabla 13.3 para diversos valores de T/τ. Si el sistema de cómputo tiene la suficiente velocidad de cálculo y de manejo de datos, es posible hacer $T/\tau = 0.1$ y obtener las características del sistema cercanas a las de un sistema continuo (no muestreado).

En la Figura 13.19 se muestra la sobreelongación máxima del sistema de segundo orden frente a una entrada de escalón unitario.

El criterio de comportamiento, error cuadrado integral, se puede escribir como

$$I = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^2(t)\,dt. \quad (13.38)$$

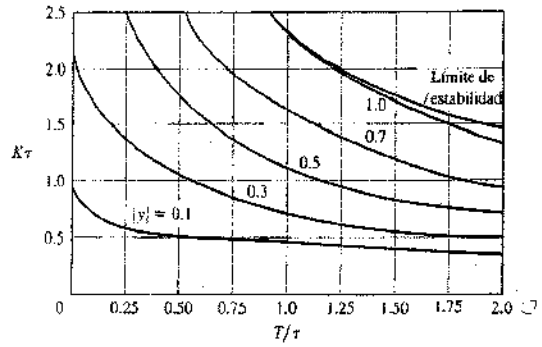


FIGURA 13.19 La máxima sobreelongación |y| para un sistema muestreado de segundo orden con una entrada de escalón unitario.

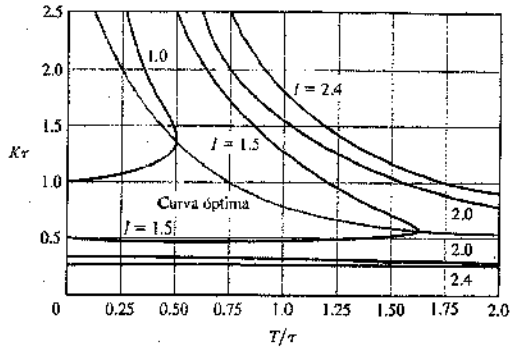


FIGURA 13.20 Lugares geométricos de la integral del error al cuadrado para un sistema muestreado de segundo orden para valores constantes de I.

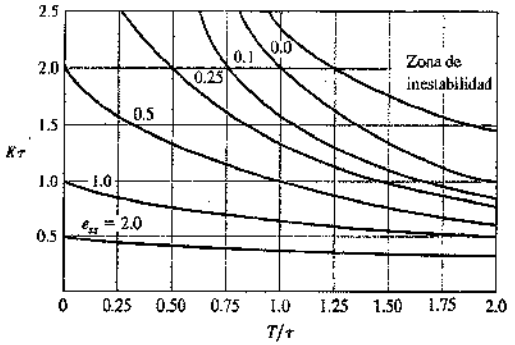


FIGURA 13.21 Error en estado estacionario de un sistema muestreado de segundo orden para una entrada de rampa $r(t) = t$, $t > 0$.

En la Figura 13.20 se ilustran los lugares geométricos de este criterio para valores constantes de I. Para un valor dado de T/τ, se puede determinar el valor mínimo de I y el valor requerido de $K\tau$. La curva óptima que se muestra en la Figura 13.20 indica el $K\tau$ que se requiere para un T/τ especificado que minimiza I. Por ejemplo, cuando un $T/\tau = 0.75$, se requiere $K\tau = 1$ para minimizar el criterio de comportamiento I.

En la Figura 13.21 se muestra el error en estado estacionario para una entrada unitaria de rampa, $r(t) = t$. Para un T/τ especificado se puede reducir el error en estado estacionario, pero el sistema presenta una sobreelongación y un tiempo de asentamiento mayor frente a una entrada escalón.

EJEMPLO 13.6. Diseño de un sistema muestreado

Se considera un sistema muestreado de lazo cerrado como el que se ilustra en la Figura 13.18 cuando

$$G_p(s) = \frac{K}{s(0.1s + 1)(0.005s + 1)} \quad (13.39)$$

y se requiere seleccionar T y K para un comportamiento adecuado. Como una aproximación, se despreciarán los efectos de la constante de tiempo $\tau_2 = 0.005$ segundos, ya que es solamente el 5% de la constante de tiempo principal $\tau_1 = 0.1$. Se pueden emplear entonces las Figuras 13.19, 13.20 y 13.21 para seleccionar K y T. Limitando el sobrepaso

al 30% para la entrada de escalón, se elige $T/\tau = 0.25$, lo que conduce a que $K\tau = 1.4$. Para estos valores, el error en estado estacionario correspondiente a una entrada de rampa unitaria es de aproximadamente 0.6 (*véase* la Figura 13.21).

Como $\tau = 0.1$, entonces se fija $T = 0.025$ segundos y $K = 14$. La velocidad de muestreo requerida es, por tanto, de 40 muestras por segundo.

La sobreelongación frente a una entrada escalón y el error en estado estacionario para una entrada rampa se puede reducir si se fija T/τ a 0.1. La sobreelongación frente a una entrada escalón será del 25% para $K\tau = 1.6$. Utilizando la Figura 13.21, se puede estimar que el error en estado estacionario para una entrada rampa unitaria es 0.55 para $K\tau = 1.6$. ■

13.8. SISTEMAS EN LAZO CERRADO CON COMPENSACIÓN MEDIANTE UN COMPUTADOR

En la Figura 13.15 se muestra un sistema muestreado de lazo cerrado con un compensador digital que se emplea para mejorar el comportamiento. La función de transferencia de lazo cerrado es

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = T(z) = \frac{G(z)D(z)}{1 + G(z)D(z)}. \tag{13.40}$$

La función de transferencia del computador se representa por

$$\frac{U(z)}{E(z)} = D(z). \tag{13.41}$$

En los cálculos anteriores, $D(z)$ se podría representar simplemente por una ganancia K. Como ilustración del poder del computador como compensador, se considerará nuevamente el sistema de segundo orden con un retenedor de orden cero y una planta

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)} \text{ cuando } T = 1.$$

Entonces (*véase* la Ecuación 13.16)

$$G(z) = \frac{0.3678(z + 0.7189)}{(z-1)(z-0.3678)}. \tag{13.42}$$

Si se selecciona

$$D(z) = \frac{K(z - 0.3678)}{(z + r)}, \tag{13.43}$$

se cancela el polo de $G(z)$ en $z = 0.3678$ y se tienen que fijar dos parámetros: r y K. Si se elige

$$D(z) = \frac{1.359(z - 0.3678)}{(z + 0.240)}, \tag{13.44}$$

se tiene que

$$G(z)D(z) = \frac{0.50(z + 0.7189)}{(z-1)(z + 0.240)}. \tag{13.45}$$

Si se calcula la respuesta del sistema a un escalón unitario, se encuentra que la salida es igual a la entrada del cuarto instante de muestreo, y de ahí en adelante. En la Figura 13.22 se muestran las respuestas para $K = 1$, tanto del sistema compensado como del no compensado. La sobreelongación del sistema compensado es del 4%, mientras que el del sistema no compensado es del 45%. La descripción de los métodos extensivos para la selección analítica de los parámetros de $D(z)$ está fuera del objetivo de este libro; el lector puede consultar textos avanzados sobre este tema [2-4]. No obstante, se tratarán dos métodos de diseño de compensadores: (1) el método de conversión de $G_c(s)$ a $D(z)$ (en los párrafos siguientes) y (2) el método del lugar de las raíces en el plano z (en la Sección 13.10).

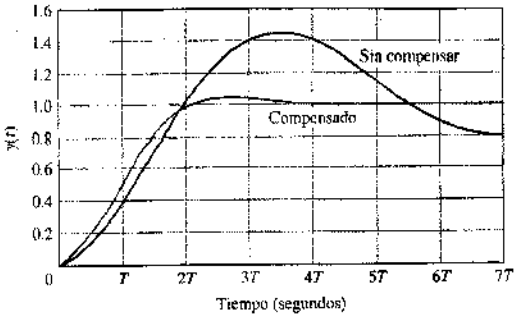


FIGURA 13.22
La repuesta de un sistema muestreado de segundo orden para una entrada escalón unidad.

Un método para determinar $D(z)$ determina en primer lugar un controlador $G_c(s)$ para una planta dada $G_p(s)$ para el sistema que se muestra en la Figura 13.23. Entonces, el controlador se convierte a $D(z)$ para un periodo de muestreo dado T. Las técnicas que se describieron en el Capítulo 10 se utilizan para determinar $G_c(s)$. Este método de diseño se denomina método de conversión $G_c(s)$ a $D(z)$. Convierte la $G_c(s)$ de la Figura 13.23 en la $D(z)$ de la Figura 13.15 [7].

Se considera el compensador de primer orden

$$G_c(s) = K\frac{s + a}{s + b} \tag{13.46}$$

y un **controlador digital**

$$\boxed{D(z) = C\frac{z - A}{z - B}} \tag{13.47}$$

Se determina la transformada z de $G_c(s)$ y se iguala a $D(z)$ mediante

$$Z\{G_c(s)\} = D(z). \tag{13.48}$$

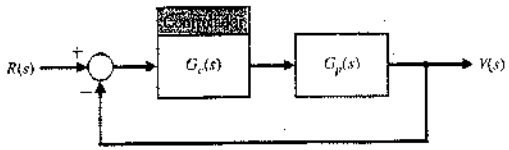


FIGURA 13.23
El modelo de sistema continuo de un sistema muestreado.

Entonces la relación entre las dos funciones de transferencia es $A = e^{-aT}$, $B = e^{-bT}$, y cuando $s = 0$, se requiere que

$$C\frac{(1-A)}{(1-B)} = K\frac{a}{b}. \tag{13.49}$$

EJEMPLO 13.7. Diseño para conseguir la especificación del margen de fase

Se considera un sistema con una planta

$$G_p(s) = \frac{1740}{s(0.25s+1)}. \tag{13.50}$$

Se intentará diseñar $G_c(s)$ de manera que se logre un margen de fase de 45° con una frecuencia de cruce $\omega_c = 125$ rad/s. Empleando el diagrama de Bode de $G_p(s)$, se encuentra que el margen de fase es de 2°. Utilizando el método de la Sección 10.4, se obtiene que la relación polo a cero requerida es $\alpha = 6.25$. Se especifica que $\omega_c = 125$, y así se observa que $\omega_c = (ab)^{1/2}$. Por tanto, $a = 50$ y $b = 312$. El compensador es entonces

$$G_c(s) = \frac{K(s+50)}{(s+312)}. \tag{13.51}$$

Se elige una K para producir $|GG_c(j\omega)| = 1$ cuando $\omega = \omega_c = 125$ rad/s. Se observa entonces que $K = 5.6$. El compensador $G_c(s)$ se va a realizar como $D(z)$, y se resuelven así las relaciones con un periodo de muestreo seleccionado. Fijando $T = 0.001$ segundo, se tiene

$$A = e^{-0.05} = 0.95, \qquad B = e^{-0.312} = 0.73 \quad \text{y} \quad C = 4.85.$$

Entonces se tiene

$$D(z) = \frac{4.85(z-0.95)}{(z-0.73)}. \tag{13.52}$$

Desde luego, si se seleccionara otro valor para el periodo de muestreo, entonces los coeficientes de $D(z)$ serían diferentes. ■

Normalmente se selecciona un periodo de muestreo pequeño de manera que el diseño basado en el sistema continuo sea preciso en el plano z. Sin embargo, no se debería seleccionar un T demasiado pequeño, o los requisitos de cálculo pueden ser muy necesarios. En general, utilizar un periodo de muestreo $T \simeq 1/10f_B$, donde $f_B = \omega_B/2\pi$ y ω_B es el ancho de banda del sistema continuo en lazo cerrado.

El ancho de banda del sistema diseñado en el Ejemplo 13.7 es $\omega_B = 180$ rad/s o $f_B = 28.6$ Hz. Entonces se selecciona un periodo $T = 0.003$ segundos. Obsérvese que en el Ejemplo 13.7 se utilizó $T = 0.001$ segundo.

13.9. DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL DEL MOVIMIENTO DE UNA MESA DE TRABAJO

Un sistema de posicionamiento importante en los sistemas de manufacturado es un sistema de control de una mesa de trabajo. Los sistemas controlan el movimiento de una mesa de trabajo en una cierta posición [21]. Se supone que la mesa está activada en cada eje mediante un motor y un tornillo regulador, tal como se muestra en la Figura 13.24(a). Se considera el eje x y se examina el movimiento de control para un sistema

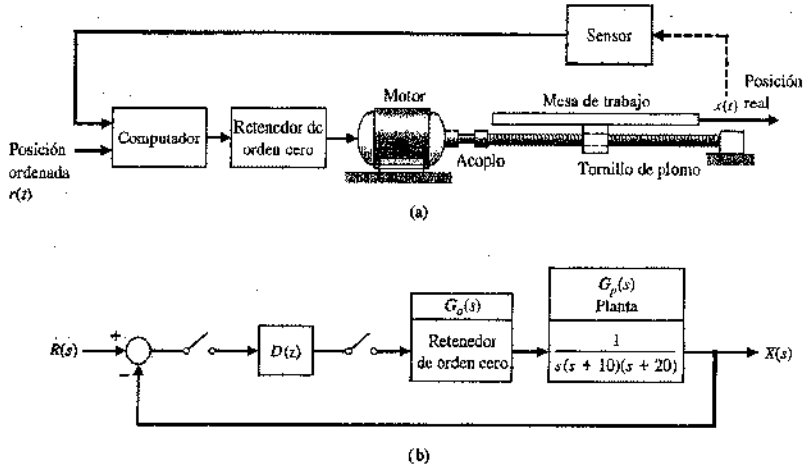


FIGURA 13.24
Sistema de control de movimiento de una mesa: (a) actuador y mesa; (b) diagrama de bloques.

realimentado, como se muestra en la Figura 13.24(b). El objetivo es mantener una respuesta con un tiempo de subida rápido y un tiempo de asentamiento rápido frente a entradas de escalón mientras que la sobreelongación no exceda del 5%.

Las especificaciones son entonces (1) un tanto por ciento de sobreelongación igual al 5% y (2) un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) y un tiempo de subida mínimo. El tiempo de subida se define como el tiempo en alcanzar la magnitud de la entrada y se representa en la Figura 5.7 mediante T_R.

Para configurar el sistema, se selecciona un amplificador de potencia y un motor como los que se describen en la Figura 13.25. Al obtener la función de transferencia del motor y del amplificador de potencia se tiene

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+10)(s+20)}. \tag{13.53}$$

Se utilizará inicialmente un sistema continuo y se diseñará $G_c(s)$ tal y como se mostró en la Sección 13.8. Después se obtendrá $D(z)$ a partir de $G_c(s)$. En primer lugar se selecciona el controlador como una ganancia simple, K, para determinar la respuesta que se puede lograr sin un compensador. Si se dibuja el lugar de las raíces, se observa que cuando $K = 700$, las raíces complejas dominantes tienen una razón de amortiguamiento de 0.707, y se deseaba una sobreelongación del 5%. Entonces, mediante simulación se obtiene que la sobreelongación es del 5%, el tiempo de subida es de 0.48 segundos, y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) es de 1.12 segundos. Estos valores se muestran como objeto 1 en la Tabla 13.4.

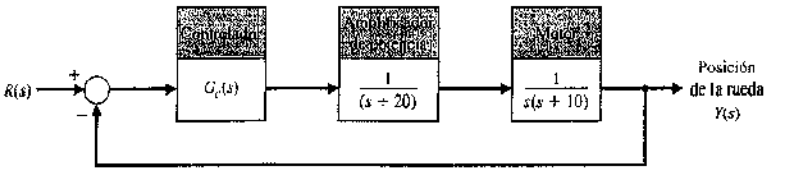


FIGURA 13.25
Modelo de control de rueda para una mesa de trabajo.

Tabla 13.4 Comportamiento para diferentes valores de K

Compensador $G_c(s)$	K	Tanto por ciento de sobreelongación	Tiempo de asentamiento (segundos)	Tiempo de subida (segundos)
1. K	700	5.0	1.12	0.40
2. $K(s + 11)/(s + 62)$	8000	5.0	0.60	0.25

El siguiente paso consiste en introducir un compensador de adelanto, de manera que

$$G_c(s) = \frac{K(s + a)}{(s + b)}. \tag{13.54}$$

Se seleccionará un cero en $s = -11$ de forma que las raíces complejas próximas al origen sean dominantes. Utilizando el método de la Sección 10.5, se observa que se requiere un polo en $s = -62$. Si se evalúa la ganancia en las raíces, se sigue que $K = 8000$. Entonces la respuesta frente a un escalón tiene un tiempo de subida de 0.25 segundos y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de 0.60 segundos. Esto significa una mejora en la respuesta, y se concluye que este sistema es aceptable.

Ahora resta seleccionar el periodo de muestreo y después utilizar el método detallado en la Sección 13.8 para obtener $D(z)$. El tiempo de subida del sistema continuo compensado es de 0.25 segundos. Entonces se requiere que $T \ll T_R$ para poder obtener una respuesta predicha por el diseño del sistema continuo. Seleccionando $T = 0.01$ segundo se tiene

$$G_c(s) = \frac{8000(s + 11)}{(s + 62)}.$$

Entonces

$$D(z) = C\frac{z - A}{z - B},$$

donde

$$A = e^{-11T} = 0.8958 \quad \text{y} \quad B = e^{-62T} = 0.5379.$$

Ahora se tiene

$$C = K\frac{a(1 - B)}{b(1 - A)} = \frac{8000(11)(0.462)}{62(0.1042)} = 6293.$$

Utilizando $D(z)$, es de esperar una respuesta muy similar a la que se obtiene para el modelo de sistema continuo.

13.10. LUGAR DE LAS RAÍCES DE SISTEMAS DE CONTROL DIGITAL

Se considera la función de transferencia del sistema que se muestra en la Figura 13.26. Se recuerda que $G(s) = G_0(s)G_p(s)$. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{KG(z)D(z)}{1 + KG(z)D(z)}. \tag{13.55}$$

Tabla 13.5 Lugar de las raíces en el plano z

1. El lugar de las raíces comienza en los polos y termina en los ceros.
2. El lugar de las raíces que está en el eje real deja a la izquierda un número impar de polos y ceros.
3. El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real horizontal.
4. El lugar de las raíces puede partir del eje real y puede regresar al eje real. Los puntos de ruptura y de entrada se determinan mediante la ecuación

$$K = -\frac{N(z)}{D(z)} = F(z),$$

con $z = \sigma$. Entonces se obtiene la solución de $\dfrac{dF(\sigma)}{d\sigma} = 0$.

5. Dibujar el lugar de las raíces que satisface

$$1 + KG(z)D(z) = 0,$$

o

$$|KG(z)D(z)| = 1$$

y

$$\underline{/G(z)D(z)} = 180^\circ \pm k360^\circ, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

La ecuación característica es

$$\boxed{1 + KG(z)D(z) = 0,}$$

que es análoga a la ecuación característica para el análisis en el plano s de $KG(s)$. Por lo tanto, se puede dibujar el lugar de las raíces para la ecuación característica del sistema muestreado cuando K varía. Las reglas para obtener el lugar de las raíces se resumen en la Tabla 13.5.

EJEMPLO 13.8. Lugar de las raíces para un sistema de segundo orden

Se considera el sistema de segundo orden que se muestra en la Figura 13.26 con $D(z) = 1$ y $G_p(s) = 1/s^2$. Entonces se obtiene

$$KG(z) = \frac{T^2}{2}\frac{K(z + 1)}{(z - 1)^2}.$$

Sea $T = \sqrt{2}$ y se dibuja el lugar de las raíces. Ahora se tiene

$$KG(z) = \frac{K(z + 1)}{(z - 1)^2},$$

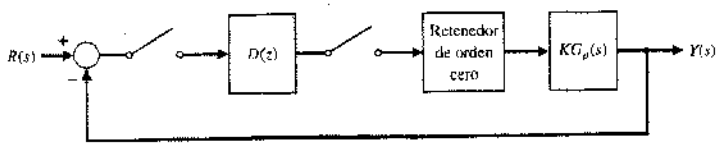


FIGURA 13.26
Sistema de lazo cerrado con un controlador digital.

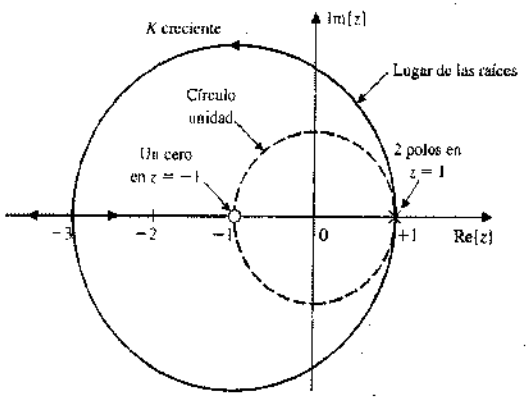


FIGURA 13.27
Lugar de las raíces para el Ejemplo 13.8.

y los polos y los ceros son los que se muestran en el plano z en la Figura 13.27. La ecuación característica es

$$1 + KG(z) = 1 + \frac{K(z+1)}{(z-1)^2} = 0.$$

Suponiendo $z = \sigma$ y despejando K se obtiene

$$K = -\frac{(\sigma-1)^2}{(\sigma+1)} = F(\sigma).$$

Entonces se obtiene la derivada $dF(\sigma)/d\sigma = 0$ y se calculan las raíces como $\sigma_1 = -3$ y $\sigma_2 = 1$. Como se muestra en la Figura 13.27, el lugar refleja dos polos en $\sigma_2 = 1$ y vuelve a entrar en $\sigma_1 = -3$. El sistema presenta siempre dos raíces fuera del círculo unidad y es siempre estable para todo $K > 0$. ■

Ahora se regresa al diseño del controlador digital $D(z)$ para lograr la respuesta especificada utilizando el método del lugar de las raíces. Se seleccionará un controlador

$$D(z) = \frac{(z-a)}{(z-b)}.$$

Se utiliza $(z - a)$ para cancelar un polo en $G(z)$ que yace en el eje real positivo del plano z. Después se selecciona $(z - b)$ de manera que el lugar de las raíces del sistema compensado origine un conjunto de raíces complejas en un punto deseado dentro del círculo unidad en el plano z.

EJEMPLO 13.9. Diseño de un compensador digital

Se va a diseñar un compensador $D(z)$ que da lugar a un sistema estable cuando $G_p(s)$ es como se describe en el Ejemplo 13.8. Con $D(z) = 2$ se tiene un sistema inestable. Se selecciona

$$D(z) = \frac{z-a}{z-b}$$

de manera que

$$KG(z)D(z) = \frac{K(z+1)(z-a)}{(z-1)^2(z-b)}.$$

Si se fija $a = 1$ y $b = 0.2$, se tiene

$$KG(z)D(z) = \frac{K(z+1)}{(z-1)(z-0.2)}.$$

Si se utiliza la ecuación para $F(\sigma)$, se obtiene el punto de entrada en $z = -2.56$, tal y como se muestra en la Figura 13.28. El lugar de las raíces está sobre el círculo unidad para $K = 0.8$. Por lo tanto, el sistema es estable para $K < 0.8$. Si se selecciona $K = 0.25$, se obtiene que la respuesta frente a un escalón presenta una sobreelongación del 20% y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) igual a 8.5 segundos.

Si el comportamiento del sistema fuera inadecuado, se mejoraría el lugar de las raíces seleccionando $a = 1$ y $b = -0.98$ de manera que

$$KG(z)D(z) = \frac{K(z+1)}{(z-1)(z+0.98)} \simeq \frac{K}{(z-1)}.$$

Entonces el lugar de las raíces se situaría sobre el eje real en el plano z. Cuando $K = 1$, la raíz de la ecuación característica se sitúa en el origen y $T(z) = 1/z = z^{-1}$. Entonces la respuesta del sistema muestreado (en los instantes de muestreo) coincide con la entrada escalón retrasada por un periodo de muestreo. ■

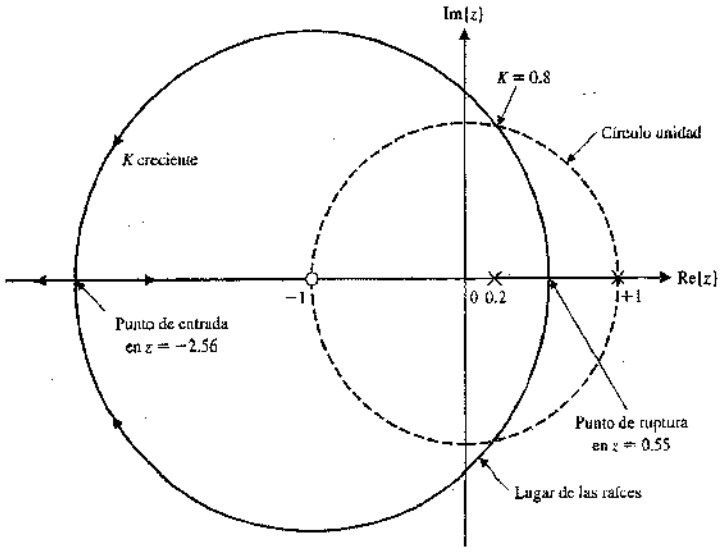


FIGURA 13.28
Lugar de las raíces para el Ejemplo 13.9.

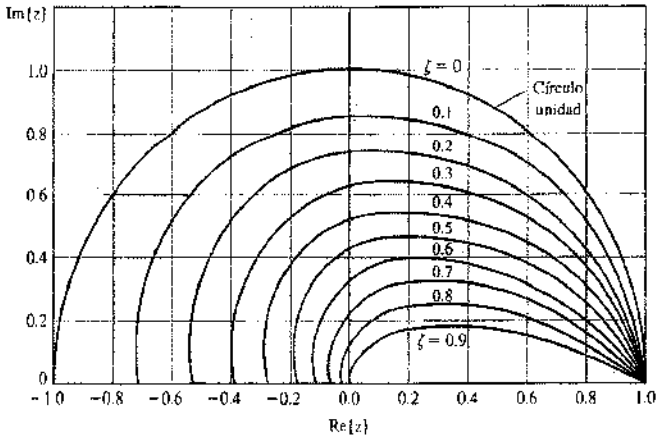


FIGURA 13.29
Curvas de ζ constante en el plano z.

Se pueden dibujar las líneas de ζ constante en el plano z. La correspondencia entre el plano s y el plano z se obtiene mediante la relación $z = e^{sT}$. Las líneas de ζ constante en el plano s son líneas radiales con

$$\frac{\sigma}{\omega} = -\tan\theta = -\tan(\text{sen}^{-1}\zeta) = -\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Como $s = \sigma + j\omega$, se tiene

$$z = e^{\sigma T}e^{j\omega T},$$

donde

$$\sigma = -\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\omega.$$

El dibujo de esas líneas para ζ constante se muestra en la Figura 13.29 para un rango de T. Un valor usual de ζ para muchas aplicaciones es $\zeta = 1/\sqrt{2}$. Entonces se tiene $\sigma = -\omega$ y

$$z = e^{-\omega T}e^{j\omega T} = e^{-\omega T}\underline{/\theta},$$

donde $\theta = \omega T$.

13.11. IMPLEMENTACIÓN DE CONTROLADORES DIGITALES

Se considera un controlador PID con una función de transferencia en el dominio s

$$\frac{U(s)}{X(s)} = G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s. \tag{13.56}$$

Se puede determinar una implementación digital de este controlador utilizando una aproximación discreta para la derivada y para la integral. Para el tiempo derivativo se utiliza la **regla de la diferenciación hacia atrás**

$$u(kT) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=kT} = \frac{1}{T}(x(kT) - x[(k-1)T]). \tag{13.57}$$

La transformada z de la Ecuación (13.57) es entonces

$$U(z) = \frac{(1-z^{-1})}{T}X(z) = \frac{(z-1)}{Tz}X(z).$$

La integración de $x(t)$ se puede representar mediante una **integración rectangular hacia adelante** en $t = KT$ como

$$u(kT) = u[(k-1)T] + Tx(kT), \tag{13.58}$$

donde $u(kT)$ es la salida del integrador en $t = kT$. La transformada z de la Ecuación (13.58) es

$$U(z) = z^{-1}U(z) + TX(z),$$

y la función de transferencia es entonces

$$\frac{U(z)}{X(z)} = \frac{Tz}{(z-1)}.$$

Por lo tanto, la función de transferencia en el dominio z del **controlador PID** es

$$\boxed{G_c(z) = K_1 + \frac{K_2 Tz}{(z-1)} + K_3\frac{(z-1)}{Tz}.} \tag{13.59}$$

El algoritmo de la ecuación en diferencias completa que proporciona el controlador PID se obtiene añadiendo los tres términos para obtener [se utiliza $x(kT) = x(k)$]

$$\begin{aligned} u(k) &= K_1x(k) + K_2[u(k-1) + Tx(k)] + (K_3/T)[x(k) - x(k-1)] \\ &= [K_1 + K_2T + (K_3/T)]x(k) + K_3Tx(k-1) + K_2u(k-1). \end{aligned} \tag{13.60}$$

La Ecuación (13.60) se puede implementar mediante un computador digital o un microprocesador. Por supuesto, se puede obtener un controlador PI o PID fijando la ganancia apropiada a cero.

13.12. SISTEMAS DE CONTROL DIGITAL UTILIZANDO MATLAB

El proceso de diseño y de análisis de sistemas muestreados se realiza extensivamente mediante el uso de herramientas de computación. Muchas de las funciones de MATLAB para el diseño de sistemas de control continuos en el tiempo tienen su equivalente para sistemas muestreados. Los objetos del modelo de la función de transferencia en tiempo discreto se obtienen con la función tf, de manera análoga a los modelos continuos en el tiempo como se presentó en el Capítulo 2. La Figura 13.30 muestra el uso de tf. Las conversiones entre modelos se pueden llevar a cabo con las funciones c2d y d2c, tal y como se observa en la Figura 13.30. La función c2d convierte los sistemas continuos en el tiempo en sistemas discretos en el tiempo; la función d2c convierte los sistemas discretos en el tiempo en sistemas continuos en el tiempo. Por ejemplo, se considera la función de transferencia de la planta

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)},$$

como se muestra en la Figura 13.16. Para un periodo de muestreo de $T = 1$ segundo, a partir de la Ecuación (13.16) se deduce que

$$G(z) = \frac{0.3678(z + 0.7189)}{(z - 1)(z - 0.3680)} = \frac{0.3679z + 0.2644}{z^2 - 1.368z + 0.3680} \tag{13.61}$$

Como se muestra en la Figura 13.31, se puede utilizar MATLAB para obtener $G(z)$.

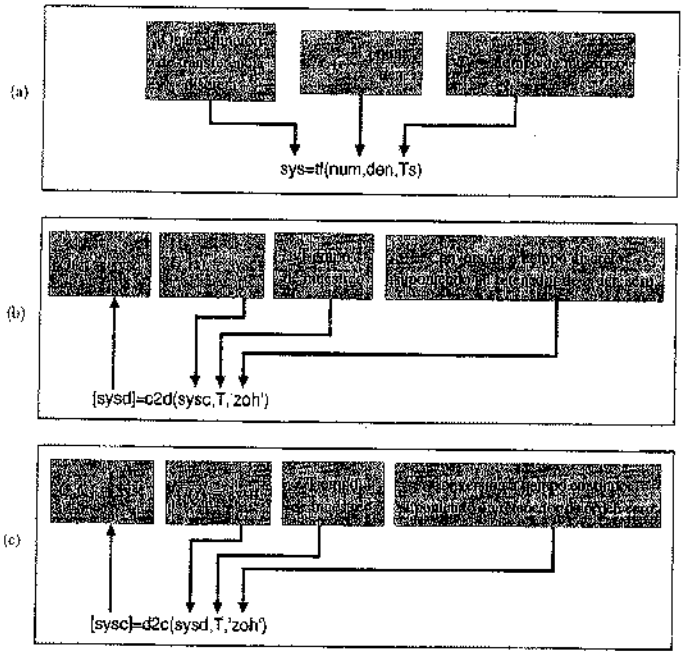


FIGURA 13.30
(a) La función **tf**.
(b) La función **c2d**.
(c) La función **d2c**.

```
% Este código convierte la función
% Gp(s) = 1/s(s+1) a un sistema discreto
% con un periodo de muestreo
% de T=1 s.
num=[1]; den=[1 1 0]; sysc=tf(num,den);
T=1;
[sysd]=c2d(sysc,T,'zoh');
>>
Función de transferencia:
  0.3679 z + 0.2642
-------------------
z^2 - 1.368 z + 0.3679

Tiempo de muestreo: 1
```

FIGURA 13.31
Empleo de la función **c2d** *para convertir* $G(s) = G_0(s)G_p(s)$ *en* $G(z)$.

Las funciones step, impulse y lsim se utilizan para la simulación de sistemas muestreados. La respuesta a un escalón unidad se genera mediante step. El formato de la función step se muestra en la Figura 13.32. La respuesta a un impulso unidad se genera mediante la función impulse, y la respuesta a una entrada arbitraria se obtiene utilizando la función lsim. En las Figuras 13.33 y 13.34 se muestran, respectivamente, las funciones impulse y lsim. Estas funciones de simulación para sistemas de datos muestreados operan en esencia de la misma forma que sus equivalentes para sistemas continuos (no muestreados). La salida es $y(kT)$ y se muestra como $y(kT)$ mantenida constante durante el periodo T.

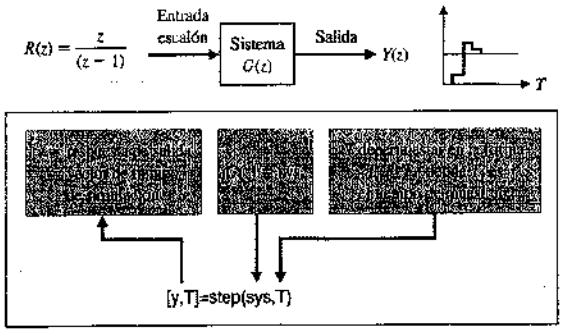


FIGURA 13.32
La función **step** genera la salida $y(kT)$ para una entrada escalón.

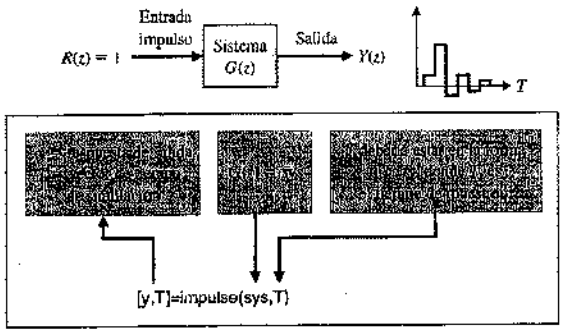


FIGURA 13.33
La función **impulse** genera la salida $y(kT)$ para una entrada impulso.

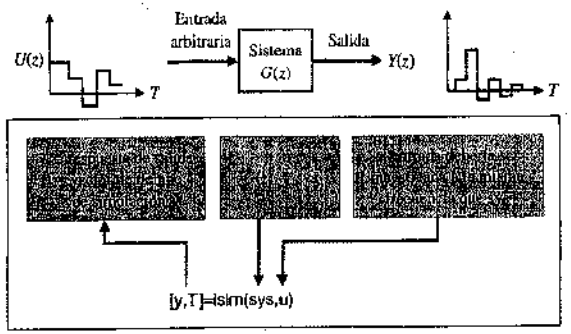


FIGURA 13.34
La función **lsim** genera la salida $y(kT)$ para una entrada arbitraria.

Ahora se considera de nuevo el Ejemplo 13.4 y se aproxima el problema para obtener una respuesta frente a un escalón sin utilizar división larga.

EJEMPLO 13.10. Respuesta a un escalón unitario

En el Ejemplo 13.4 se consideró el problema de calcular la respuesta frente a un escalón de un sistema de datos muestreado en lazo cerrado. En aquel ejemplo, la respuesta, $y(kT)$, se calculó utilizando la división larga. Se puede emplear MATLAB para calcular la respuesta $y(kT)$ empleando la función step, como se muestra en la Figura 13.32. Con la función de transferencia en lazo cerrado dada por

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.3678z + 0.2644}{z^2 - z + 0.6322},$$

en la Figura 13.35 se muestra la respuesta asociada a un escalón en lazo cerrado. La respuesta a un escalón discreto que se observa en esta figura también se muestra en la Figura 13.17. Para determinar la respuesta continua real, $y(t)$, se utiliza el código MATLAB recogido en la Figura 13.36. El retenedor de orden cero se modela mediante la función de transferencia

$$G_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{2}.$$

```
% Este código genera la respuesta para un escalón unidad, y(kT),
% para el sistema muestreado del Ejemplo 13.4.
%
num=[1]; den=[1 1 0];
sysc=tf(num,den);
sysd=c2d(sysc,1,'zoh');
sys=feedback(sysd,[1]);
T=[0:1:20]; step(sys,T)
```

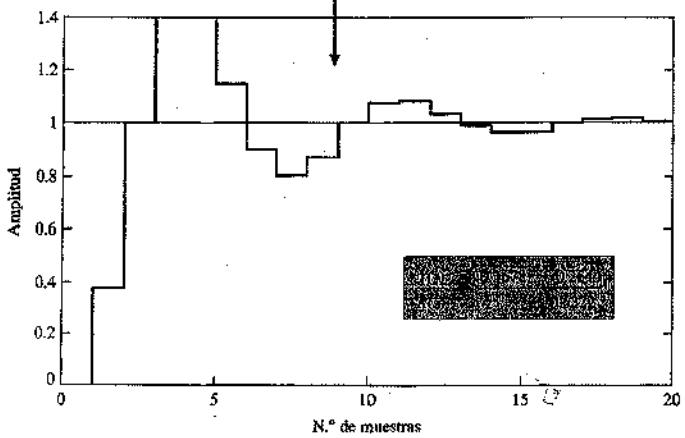


FIGURA 13.35
La respuesta discreta, $y(kT)$, de un sistema de segundo orden muestreado para una entrada escalón unidad.


```
% Este código calcula la respuesta continua
% para el sistema del Ejemplo 13.4 para un escalón.
%
numg=[1]; deng=[1 1 0]; sysg=tf(numg,deng);
%
[nd,dd]=pade(1,2); sysp=tf(nd,dd);
sysi=tf([1],[1,0]);
sys1=series(1-sysp,sysi);
%
sysc=series(sys1,sysg);
sys=feedback(sysc,[1]);
t=[0:0.1:20];
step(sys,t)
```

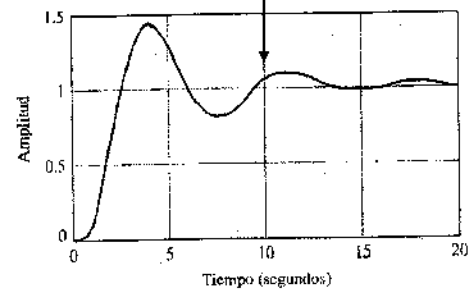


FIGURA 13.36
La respuesta continua, $y(t)$, para el sistema de la Figura 13.16 cuando la entrada es un escalón unidad.

En el código en MATLAB de la Figura 13.36, se aproxima el término e^{-sT} mediante la función pade con una aproximación de segundo orden y un periodo de muestreo de 1 segundo. Después se calcula una aproximación para $G_0(s)$ basada en la aproximación Padé de e^{-sT}. ■

En la Sección 13.8 se discutió el objetivo de la compensación digital mediante computador. En el ejemplo siguiente se considera de nuevo esta cuestión utilizando MATLAB.

EJEMPLO 13.11. Lugar de las raíces de un sistema de control digital

Volviendo a la Ecuación (13.16) la planta está dada por

$$G(z) = \frac{0.3678(z + 0.7189)}{(z - 1)(z - 0.3680)}.$$

El compensador seleccionado es

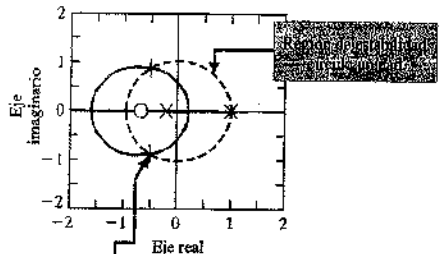
$$D(z) = \frac{K(z - 0.3678)}{z + 0.2400},$$

con el parámetro K como variable que debe seleccionarse. Cuando

$$G(z)D(z) = K\frac{0.3678(z + 0.7189)}{(z - 1)(z + 0.2400)}, \tag{13.62}$$

se tiene el problema de forma que el método del lugar de las raíces se puede aplicar directamente. La función rlocus para los sistemas temporales discretos es análoga a la de

```
% Este código genera el lugar de las raíces
% para el sistema muestreado.
%
%    K(0.3678)(z+0.7189)
%    -------------------
%      (z-1)(z+0.2400)
%
num=[0.3678 0.2644]; den=[1.0000 -0.7600 -0.2400]; sys=tf(num,den);
rlocus(sys);hold on
x=[-1:0.1:1];y=sqrt(1-x.^2);
plot(x,y,'--',x,-y,'--')
```




```
>>rlocfind(sys)
Seleccionar un punto
en la ventana gráfica

selected_point =
 -0.4787 + 0.6530i

ans =
    4.6390
```

FIGURA 13.37
La función rlocus para los sistemas muestreados.

los sistemas continuos. Como se muestra en la Figura 13.37, el lugar de las raíces asociado con la Ecuación (13.62) se genera fácilmente utilizando MATLAB. Recuérdese que la región de estabilidad se define mediante el círculo unidad en el plano complejo. La función de MATLAB rlocfind se puede utilizar con el lugar de las raíces del sistema discreto de la misma forma que con los sistemas continuos para determinar el valor de la ganancia del sistema asociada con cualquier punto del lugar. Si se utiliza rlocfind, se puede determinar que $K = 4.639$ sitúa a las raíces sobre el círculo unidad. ■

13.13. EJEMPLO DE DISEÑO SECUENCIAL: SISTEMA DE LECTURA DE UNA UNIDAD DE DISCO

En este capítulo se diseñará un controlador digital para el sistema de la unidad de disco. Cuando los discos rotan, la cabeza del sensor lee los patrones utilizados para proporcionar la información del error de referencia. Este patrón de información del error se lee intermitentemente cuando la cabeza lee los datos almacenados y a continuación otra vez el patrón. Como el disco está rotando a una velocidad constante, el tiempo, T, entre las

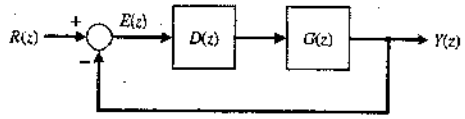


FIGURA 13.38
Sistema de control realimentado con un controlador digital. Observar que $G(z) = Z[G_0(s)G_p(s)]$.

lecturas de posición-error es una constante. Este periodo de muestreo normalmente está comprendido entre 100 μs y 1 ms [25]. Por lo tanto, se dispone de una información del error muestreado. Además, como muestra la Figura 13.38, se puede utilizar un controlador digital para lograr una respuesta satisfactoria del sistema. En este capítulo se va a diseñar $D(z)$.

En primer lugar se determina

$$G(z) = Z[G_0(s)G_p(s)].$$

Como

$$G_p(s) = \frac{5}{s(s + 20)}, \tag{13.63}$$

se tiene

$$G_0(s)G_p(s) = \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s}\right)\frac{5}{s(s + 20)}.$$

Se observa que para $a = 20$ y $T = 1$ ms, e^{-aT} es igual a 0.98. Entonces se observa que el polo en $s = -20$ de la Ecuación (13.63) tiene un efecto insignificante. Por lo tanto, se podría aproximar

$$G_p(s) \simeq \frac{0.25}{s}.$$

Entonces se necesita

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\left[\frac{1 - e^{-sT}}{s}\left(\frac{0.25}{s}\right)\right] \\ &= (1 - z^{-1})(0.25)Z\left[\frac{1}{s^2}\right] \\ &= (1 - z)(0.25)\left(\frac{Tz}{(z - 1)^2}\right) \\ &= \frac{0.25T}{(z - 1)} = \frac{0.25 \times 10^{-3}}{(z - 1)}. \end{aligned}$$

Se requiere seleccionar un controlador digital $D(z)$ de forma que se logre la respuesta deseada para una entrada escalón. Si se fija $D(z) = K$, entonces se tiene

$$D(z)G(z) = \frac{K(0.25 \times 10^{-3})}{(z - 1)}.$$

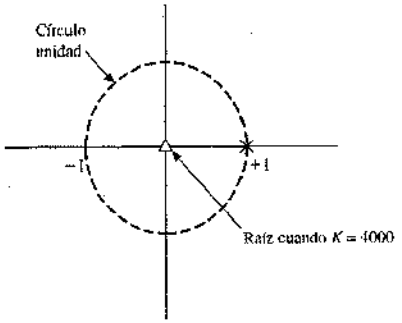


FIGURA 13.39
Lugar de las raíces.

En la Figura 13.39 se muestra el lugar de las raíces para este sistema. Cuando $K = 4000$,

$$D(z)G(z) = \frac{1}{(z-1)}.$$

Por lo tanto, la función de transferencia en lazo cerrado es

$$T(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} = \frac{1}{z}.$$

Se espera una respuesta rápida para el sistema. Si se utiliza MATLAB se puede demostrar que la respuesta es estable y rápida. El tanto por ciento de sobreelongación para una entrada escalón es de 0% y el tiempo de asentamiento es de 2 ms.

13.14. RESUMEN

El uso de un computador digital como dispositivo de compensación para un sistema de control de lazo cerrado ha aumentado a medida que el precio y la confiabilidad de los computadores se han mejorado notablemente. Un computador se puede usar para completar muchos cálculos durante el intervalo T de muestreo y para proporcionar una señal de salida que se usa para activar un actuador de un proceso. En la actualidad, el control por computador se emplea para procesos químicos, control aéreo, máquinas herramienta y muchos otros procesos comunes.

La transformada z se puede usar para analizar la estabilidad y respuesta de un sistema muestreado, y para diseñar sistemas adecuados que incorporan un computador. Los sistemas de control por computador se han vuelto comunes, ya que se dispone de computadores de bajo costo.

EJERCICIOS

E13.1. Indicar si las siguientes señales son discretas o continuas:

(a) Los contornos de elevación en un mapa.
(b) La temperatura en una habitación.
(c) La pantalla de un reloj de pared digital.
(d) El marcador de un juego de baloncesto.
(e) La salida de un altavoz.

E13.2. (a) Hallar los valores de $y(kT)$ cuando

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

para $k = 0$ a 4.

(b) Obtener una solución en forma cerrada para $y(kT)$ como función de k.

Respuesta: $y(0) = 0$, $y(T) = 1$, $y(2T) = 3$, $y(3T) = 7$, $y(4T) = 15$

E13.3. Un sistema tiene una respuesta $y(kT) = kT$ para $k \geq 0$. Calcular $Y(z)$ para esta respuesta.

Respuesta: $Y(z) = \dfrac{Tz}{(z-1)^2}$

E13.4. Se tiene una función

$$Y(s) = \frac{5}{s(s+2)(s+10)},$$

Usando un desarrollo en fracciones parciales de $Y(s)$ y la Tabla 13.1, determinar $Y(z)$ cuando $T = 0.1$ segundo.

E13.5. En la Figura E13.5(a) se muestra el transbordador espacial con su brazo robótico. Un astronauta controla el brazo robótico y la pinza por medio de una mirilla y las cámaras de televisión [9]. Analizar el empleo del control digital para este sistema y dibujar su diagrama de bloques, incluyendo un computador para el control de la visualización en la pantalla.

E13.6. El sistema que se muestra en la Figura E13.6 [1] ilustra el control por computador de un robot que pulveriza pintura en automóviles. El sistema es del tipo que se mostró en la Figura 13.26, donde

$$KG_p(s) = \frac{20}{s(s/2+1)},$$

y se obtiene un margen de fase de 45°. En la Sección 10.8 se obtuvo un compensador para este sistema. Obtener la $D(z)$ requerida cuando $T = 0.001$ segundo.

E13.7. Averiguar la respuesta para los primeros cuatro instantes para

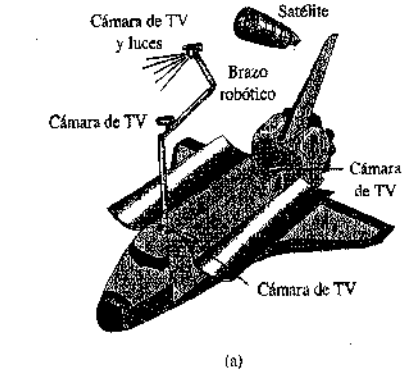
$$Y(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z^3 - 1.5z^2 + 0.5z}.$$

Después determinar $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$ e $y(3)$.

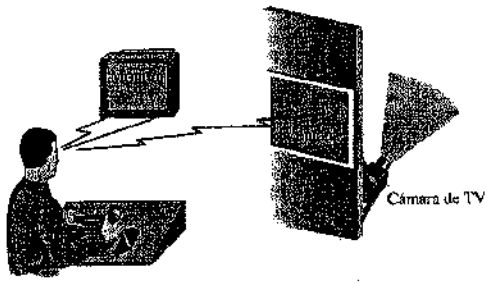
E13.8. Determinar si el sistema en lazo cerrado con $T(z)$ es estable cuando

$$T(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 + 0.1z - 0.2}.$$

Respuesta: estable



(a)



(b)

FIGURA E13.5
(a) Transbordador espacial y brazo robótico. (b) Control del brazo por el astronauta.

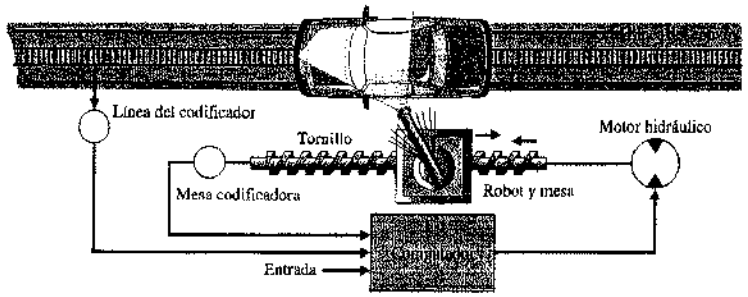


FIGURA E13.6
Sistema pulverizador de pintura para automóviles.

E13.9. (a) Determinar $y(kT)$ para $k = 0$ a 3 cuando

$$Y(z) = \frac{z+1}{z^2-1}.$$

(b) Determinar la solución en forma cerrada para $y(kT)$ como función de k.

E13.10. Un sistema tiene $G(z)$ como la que se describe en la Ecuación (13.34) con $T = 0.01$ segundo y $\tau = 0.008$ segundos. (a) Determinar K de forma que la sobreelongación sea menor del 40%. (b) Calcular el error en estado estacionario como respuesta a una entrada rampa unitaria. (c) Determinar la K que minimiza la integral del cuadrado del error.

E13.11. Un sistema tiene una función de transferencia de la planta

$$G_p(s) = \frac{100}{s^2+100}.$$

(a) Determinar $G(z)$ para $G_p(s)$ precedida por un retenedor de orden cero con $T = 0.05$ segundos. (b) Determinar si el sistema digital es estable. (c) Dibujar la respuesta a un impulso de $G(z)$ para los 15 primeros instantes de muestreo. (d) Dibujar la respuesta para una entrada sinusoidal con la misma frecuencia que la frecuencia natural del sistema.

E13.12. Determinar la transformada z de

$$X(s) = \frac{(s+2)}{s^2+5s+6}$$

cuando el periodo de muestreo es de 1 segundo.

E13.13. La ecuación característica de un sistema muestreado es

$$z^2 + (K - 1.5)z + 0.5 = 0.$$

Determinar el rango de K de forma que el sistema sea estable.

Respuesta: $0 < K < 3$

E13.14. Un sistema con realimentación unidad como el que se muestra en la Figura 13.18 tiene una planta

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s+3)},$$

con $T = 0.5$. Determinar si el sistema es estable cuando $K = 5$. Determinar el máximo valor de K para que el sistema sea estable.

PROBLEMAS

P13.1. La entrada en un muestreador es $r(t) = \operatorname{sen} \omega t$, donde $\omega = 1/\pi$. Dibujar la entrada en el muestreador y la salida $r^*(t)$ para los dos primeros segundos cuando $T = 0.25$ segundos.

P13.2. La entrada en un muestreador es $r(t) = \operatorname{sen} \omega t$, donde $\omega = 1/\pi$. La salida del muestreador entra en un retenedor de orden cero, como se ilustra en la Figura 13.7. Dibujar la salida del circuito retenedor $p(t)$ para los dos primeros segundos cuando $T = 0.25$ segundos.

P13.3. Una rampa unitaria $r(t) = t$, $t > 0$, se emplea como entrada en un proceso en el que $G(s) = 1/(s+1)$, como se muestra en la Figura P13.3. Determinar la salida $y(kT)$ para los cuatro primeros instantes de muestreo.

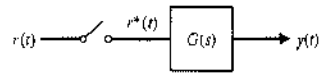


FIGURA P13.3. Sistema muestreado.

P13.4. Un sistema de lazo cerrado tiene un lazo de bloqueo y un proceso como se muestra en la Figura P13.18. Determinar $G(z)$ cuando $T = 1$ y

$$G_p(s) = \frac{2}{s+2}.$$

P13.5. Para el sistema del Problema 13.4, sea $r(t)$ una entrada de escalón unitaria; calcular la respuesta del sistema mediante la división sintética.

P13.6. Para la salida del sistema del Problema 13.4, calcular los valores inicial y final de la salida directamente de $Y(z)$.

P13.7. En la Figura 13.18 se muestra un sistema de lazo cerrado. Este sistema representa el control de la inclinación de un avión. La función de transferencia es $G_p(s) = K/[s(0.5s+1)]$. Seleccionar una ganancia K y un periodo de muestreo T de forma que la sobreelongación esté limitada a 0.3 para una entrada de escalón unitaria y el error en estado estacionario para una entrada de rampa unitaria sea menor que 1.0.

P13.8. Considerar el sistema compensado por computador que se mostró en la Figura 13.26 cuando $T = 1$ y

$$KG_p(s) = \frac{K}{s(s+10)}.$$

Seleccionar los parámetros K y r de $D(z)$ cuando

$$D(z) = \frac{(z-0.3678)}{(z+r)}.$$

Seleccionar dichos parámetros dentro de los siguientes intervalos: $1 < K < 2$ y $0 < r < 1$.

Determinar la respuesta del sistema compensado y compararla con la del sistema no compensado.

P13.9. En la Figura P13.9 se muestra un nuevo sistema de control remoto suspendido y móvil, que brinda al fútbol profesional de la NFL (Liga Nacional de Fútbol) una movilidad tridimensional. La cámara se puede mover sobre todo el campo, así como hacia arriba y hacia abajo. El control del motor de cada polea está representado en la Figura 13.18 con

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+1)(s/10+1)}.$$

Se desea alcanzar un margen de fase de 45°. Seleccionar una frecuencia de cruce adecuada y un periodo de muestreo para obtener $D(z)$. Utilizar el método de conversión de $G_c(s)$ a $D(z)$.

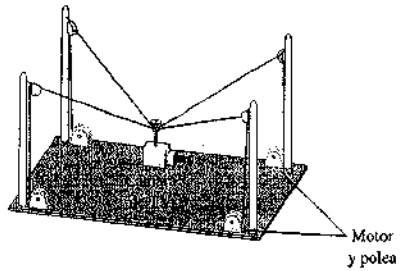


FIGURA P13.9. Cámara móvil para campo de fútbol.

P13.10. Considerar un sistema como el que se muestra en la Figura 13.15 con un retenedor de orden cero, una planta

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+10)},$$

y $T = 0.1$ segundo.

(a) Suponiendo $D(z) = K$, determinar la función de transferencia $G(z)\,D(z)$. (b) Determinar la ecuación característica del sistema en lazo cerrado. (c) Calcular el máximo valor de K para que el sistema sea estable. (d) Determinar K de forma que la sobreelongación sea menor que el 30%. (e) Calcular la función de transferencia en lazo cerrado $T(z)$ para la K del apartado (d) y dibujar la respuesta frente a un escalón. (f) Determinar la situación de las raíces en lazo cerrado y la sobreelongación si el valor de K es la mitad del calculado en el apartado (d). (g) Dibujar la respuesta frente a un escalón para la K determinada en el apartado (f).

P13.11. (a) Para el sistema que se describe en el Problema 13.10, diseñar un compensador de retardo $G_c(s)$ utilizando los métodos del Capítulo 10 para lograr una sobreelongación menor que el 10% y un error en estado estacionario menor que 0.01 para una entrada rampa. Supóngase un sistema continuo no muestreado con $G_p(s)$.

(b) Determinar una $D(z)$ apropiada para que se satisfagan los requisitos del apartado (a) con un periodo de muestreo de $T = 0.1$ segundo. Supóngase un retenedor de orden cero y un muestreador y utilizar el método de conversión de $G_c(s)$ a $D(z)$.

(c) Dibujar la respuesta del sistema frente a un escalón con el compensador continuo en el tiempo del apartado (a) y el sistema con la $D(z)$ calculada en el apartado (b). Comparar los resultados.

(d) Repetir el apartado (b) para $T = 0.01$ segundo y después repetir el apartado (c).

(e) Dibujar la respuesta a una rampa para $D(z)$ con $T = 0.1$ segundo y compararla con la respuesta del sistema continuo.

P13.12. La función de transferencia de una planta y un retenedor de orden cero (Figura 13.18) es

$$G(z) = \frac{K(z+0.1)}{z(z-1)}.$$

(a) Dibujar el lugar de las raíces. (b) Determinar el rango de la ganancia K para que el sistema sea estable.

P13.13. El controlador de la orientación de la estación espacial descrito en el Ejercicio 7.6 se implementa utilizando un muestreador y un retenedor y tiene la función de transferencia (Figura 13.18)

$$G(z) = \frac{K(z^2 + 1.1206z - 0.0364)}{z^3 - 1.7358z^2 + 0.8711z - 0.1353}.$$

(a) Dibujar el lugar de las raíces. (b) Determinar el valor de K de manera que las dos raíces de la ecuación característica sean iguales. (c) Determinar todas las raíces de la ecuación característica para la ganancia calculada en el apartado (b).

P13.14. Un sistema de datos muestreados con un periodo de muestreo $T = 0.05s$ (Figura 13.18) es

$$G(z) = \frac{K(z^3 + 10.3614z^2 + 9.758z + 0.8353)}{z^4 - 3.7123z^3 + 5.1644z^2 - 3.195z + 0.7408}.$$

(a) Dibujar el lugar de las raíces. (b) Determinar K cuando los dos polos reales parten desde el eje real. (c) Calcular el máximo valor de K que garantiza la estabilidad.

P13.15. Un sistema en lazo cerrado con un muestreador y un retenedor, como el que se muestra en la Figura 13.18, tiene una función de transferencia de la planta

$$G_p(s) = \frac{20}{s - 5}.$$

Calcular y dibujar $y(kT)$ para $0 \leq T \leq 0.6$ cuando $T = 0.1$ segundo. La señal de entrada es un escalón unitario.

P13.16. Un sistema en lazo cerrado como el que se muestra en la Figura 13.18 tiene

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s + 1)}.$$

Calcular y dibujar $y(kT)$ para $0 \leq T \leq 0.6$ cuando $T = 1$ segundo y la entrada es un escalón unitario.

P13.17. Un sistema en lazo cerrado, como el que se muestra en la Figura 13.18, tiene

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s + 1)}$$

y $T = 1$ segundo. Dibujar el lugar de las raíces para $K \geq 0$, y determinar la ganancia K que resulta cuando las dos raíces de la ecuación característica están sobre el círculo z (en el límite de la estabilidad).

P13.18. Un sistema con realimentación unidad como el que se muestra en la Figura 13.18 tiene

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s + 1)}.$$

Si el sistema es continuo ($T = 0$), entonces $K = 1$ produce una respuesta a un escalón con una sobreelongación del 16% y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de 8 segundos. Dibujar la respuesta para $0 \leq T \leq 1.2$, variando T en incrementos de 0.2 cuando $K = 1$. Completar una tabla en la que se almacene la sobreelongación y el tiempo de asentamiento frente a T.

PROBLEMAS AVANZADOS

PA13.1. Un sistema en lazo cerrado como el que se muestra en la Figura 13.18 tiene una planta

$$G_p(s) = \frac{K(1 + as)}{s^2},$$

donde a se puede ajustar para lograr una respuesta adecuada. Dibujar el lugar de las raíces cuando $a = 10$. Determinar el rango de K que garantiza la estabilidad cuando $T = 1$ segundo.

PA13.2. El aumento en las restricciones de peso, comportamiento, consumo de carburante y precisión creó la necesidad de un nuevo tipo de sistemas de control de vuelo conocidos como vuelo por cable. Esta aproximación implica que están interconectadas eléctricamente en lugar de mecánicamente componentes particulares del sistema y que operan bajo la supervisión de un computador responsable las tareas de monitorización, control y coordinación. El principio del vuelo por cable permite la implementación de sistemas de control totalmente digitales y altamente redundantes que logran un alto nivel de precisión y comportamiento [24].

Las características operacionales de un sistema de control de vuelo dependen en gran medida de la rigidez dinámica de un actuador, que representa su posibilidad de mantener la posición de la superficie de control a pesar de los efectos de las perturbaciones de las fuerzas externas aleatorias.

Un sistema de actuador de vuelo consiste en un tipo especial de motor de cc, dirigido por un amplificador de potencia, que actúa sobre una bomba hidráulica conectada a los lados de un cilindro hidráulico. El pistón del cilindro hidráulico se conecta directamente a una superficie de control de un avión mediante una unión mecánica apropiada, como se muestra en la Figura PA13.2(a).

En la Figura PA13.2(b) se muestra el diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado. Se desea una respuesta frente a un escalón con una sobreelongación menor del 5% y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 4 segundos. (b) Dibujar la respuesta del sistema diseñado en el apartado (a).

PA13.3. Una fábrica utiliza un pegamento para formar una junta a lo largo del eje de un material, tal y como se muestra en la Figura PA13.3. Es crítico que el pegamento se aplique uniformemente para evitar imperfecciones; sin embargo, la velocidad a la que el material pasa bajo la dispersión de la cabeza no es constante. El pegamento necesita que se reparta con una tasa proporcional a la variación de la velocidad del material. El controlador ajusta la válvula que reparte el pegamento [12].

El sistema se puede representar mediante el diagrama de bloques de la Figura 13.15, donde $G_p(s) = 2/(0.03s + 1)$ con un retenedor de orden cero $G_0(s)$. Utilizar un controlador

$$D(z) = \frac{KT}{1 - z^{-1}} = \frac{KTz}{z - 1}$$

que representa un controlador de tipo integral. Determinar $G(z)D(z)$ para $T = 30$ ms y dibujar el lugar de las raíces. Seleccionar una ganancia apropiada K y dibujar la respuesta frente a un escalón.

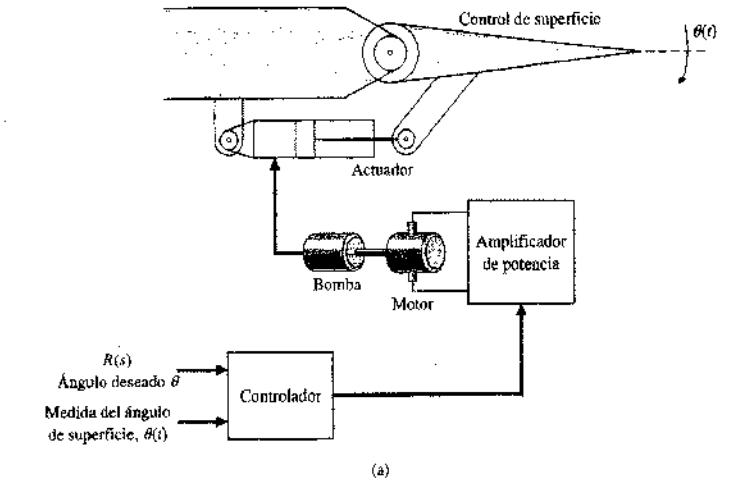


FIGURA PA13.2
(a) Sistema de control de superficie de un vuelo por cable de un avión y (b) diagrama de bloques. El periodo de muestreo es de 1 segundo.

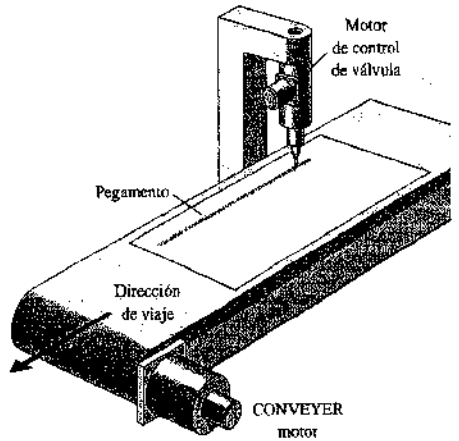


FIGURA PA13.3. Sistema de control de pegamento.

PA13.4. Un sistema como el que se muestra en la Figura 13.15 tiene $D(z) = K$ y

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s + 10)}.$$

Cuando $T = 0.05$, determinar una K apropiada para obtener una respuesta rápida frente a un escalón con una sobreelongación menor del 10%.

PA13.5. Un sistema como el que se muestra en la Figura 13.18 tiene

$$G_p(s) = \frac{10}{s + 1}.$$

Determinar el rango del periodo de muestreo T para el que el sistema es estable. Seleccionar un periodo de muestreo T de manera que el sistema sea estable y proporcione una respuesta rápida.

PROBLEMAS DE DISEÑO

PDC13.1. Diseñar un controlador digital para un sistema utilizando el modelo de segundo orden del motor CAPSTAN SLIDE que se describe en PDC2.1 y PDC4.1. Utilizar un periodo de muestreo de $T = 1$ ms y seleccionar una $D(z)$ adecuada para el sistema que se muestra en la Figura 13.15. Determinar la respuesta del sistema diseñado frente a una entrada escalón unidad $r(t)$.

PD13.1. Un sistema de temperatura como el que se muestra en la Figura 13.15 tiene una función de transferencia de la planta

$$G_p(s) = \frac{0.8}{3s + 1}$$

y un periodo de muestreo T de 0.5 segundos.

(a) Utilizando $D(z) = K$, seleccionar una ganancia K de manera que el sistema sea estable. (b) El sistema puede ser lento y sobreamortiguado, y por lo tanto se requiere diseñar una red de adelanto utilizando el método descrito en la Sección 10.8. Determinar el controlador adecuado $G_c(s)$ y después calcular $D(z)$. (c) Verificar el diseño obtenido en el apartado (b) dibujando la respuesta del sistema frente a un escalón para la $D(z)$ seleccionada.

PD13.2. Un sistema de posicionamiento de la cabeza de lectura de una unidad de disco es un sistema como el que se muestra en la Figura 13.15 [11]. La función de transferencia de la planta es

$$G_p(s) = \frac{10}{s^2 + 0.8s + 800}$$

Se requiere precisión en el control utilizando un compensador digital. Suponiendo $T = 10$ ms, diseñar un compensador, $D(z)$, utilizando (a) el método de conversión $G_c(s)$ a $D(z)$ y (b) el método del lugar de las raíces.

PD13.3. El control de tracción de un vehículo que incluye un freno antideslizante y una aceleración antigiro, puede mejorar el comportamiento y el manejo del mismo. El objetivo de este control consiste en maximizar la tracción de la rueda mediante la prevención del bloqueo de las ruedas durante el frenado y del giro durante la aceleración.

El deslizamiento de la rueda, esto es, la diferencia entre la velocidad del vehículo y la velocidad de la rueda (normalizada por la velocidad del vehículo para frenar y la velocidad de la rueda para acelerar) se elige como la variable controlada en la mayoría de los algoritmos de control de tracción debido a su gran influencia sobre la fuerza de tracción entre la rueda y la carretera [20].

En la Figura PD13.3 se muestra un modelo para una rueda cuando λ es el deslizamiento de la rueda. El objetivo es minimizar el deslizamiento cuando ocurre una perturbación a causa de las condiciones de la carretera. Diseñar un controlador $D(z)$ de manera que la ζ del sistema sea $1/\sqrt{2}$, y determinar la K resultante. Supóngase $T = 0.1$ segundo. Dibujar la respuesta escalón resultante y determinar la sobreelongación y el tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%).

PD13.4. Un sistema de máquina de herramientas tiene la forma que se muestra en la Figura 13.25 con [10]

$$G_p(s) = \frac{0.1}{s(s + 0.1)}$$

El periodo de muestreo se selecciona de $T = 1$ segundo. Se desea que la respuesta a un escalón presente una sobreelongación del 16% o menor y un tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) de 12 segundos o menor. Además, el error para una entrada rampa unitaria, $r(t) = t$, debe ser menor o igual que 1. Diseñar una $D(z)$ que consiga estas especificaciones.

PD13.5. La extrusión de plástico es un método bien establecido y de uso muy extendido en los procesos industriales de polímeros [12]. Normalmente tales máquinas de moldeo por inyección consisten en un gran cilindro dividido en distintas zonas de temperatura, con una tolva en un extremo y un troquel en el otro. El polímero se introduce en bruto y en forma sólida desde la tolva y se empuja hacia adelante utilizando un potente tornillo. Simultáneamente se calienta gradualmente mientras pasa a través de diversas zonas de temperaturas crecientes. El calor que producen los calentadores en el cilindro junto con el calor liberado por la fricción entre el polímero en bruto y las superficies del cilindro y el tornillo, provoca finalmente la fusión del polímero, que entonces es empujado por el tornillo fuera del troquel, para ser procesado aún más según los diferentes objetivos.

Las variables de salida son el flujo del troquel y la temperatura del polímero. La variable de control principal es la velocidad del tornillo, puesto que la respuesta del proceso es rápida.

En la Figura PD13.5 se muestra el sistema de control para la temperatura de salida del polímero. Seleccionar una ganancia K y un periodo de muestreo T para obtener una sobreelongación frente a un escalón del 10% al tiempo que reduzca el error en estado estacionario frente a una entrada rampa.

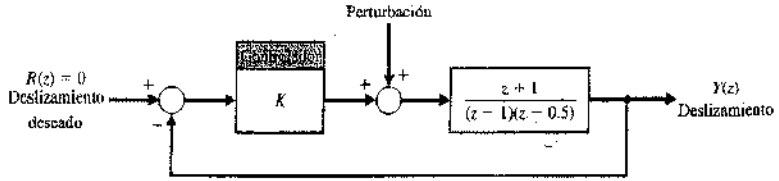


FIGURA PD13.3

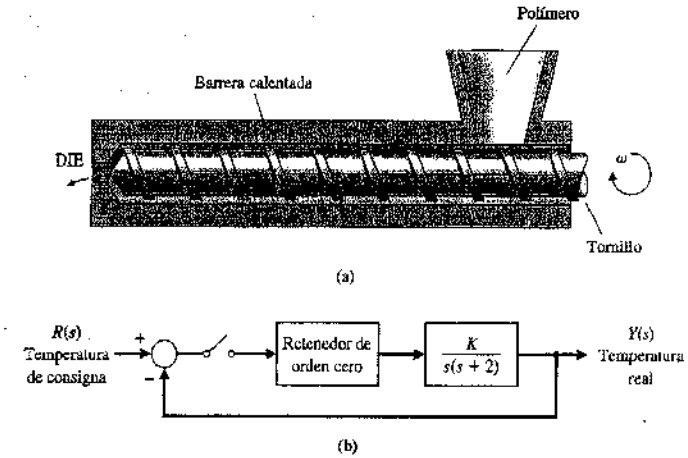


FIGURA PD13.5
Sistema de control para una máquina de moldeo por inyección.

PROBLEMAS CON MATLAB

PM13.1. Utilizando MATLAB, dibujar la respuesta para un escalón unidad del sistema

$$G(z) = \frac{0.2145z + 0.1609}{z^2 - 0.75z + 0.125}$$

Comprobar gráficamente que el valor en estado estacionario de la salida es 1.

PM13.2. Convertir las funciones de transferencia siguientes continuas en el tiempo en sistemas muestreados utilizando la función c2d. Suponer un periodo de muestreo de 1 segundo y un retenedor de orden cero, $G_0(s)$.

(a) $G_p(s) = \dfrac{1}{s}$

(b) $G_p(s) = \dfrac{s}{s^2 + 4}$

(c) $G_p(s) = \dfrac{s + 5}{s + 1}$

(d) $G_p(s) = \dfrac{1}{s(s + 1)}$

PM13.3. La función de transferencia de un sistema de datos muestreado esta dada por

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1.7(z + 0.46)}{z^2 + z + 0.5}$$

(a) Calcular la respuesta del sistema para un escalón unidad utilizando la función step. (b) Determinar la función de transferencia continua en el tiempo equivalente a $T(z)$ utilizando la función d2c y suponer que el periodo de muestreo es de $T = 0.1$ segundo. (c) Calcular la respuesta del sistema continuo (no muestreado) para un escalón unitario utilizando la función step, y compararlo con el dibujo del apartado (a).

PM13.4. Dibujar el lugar de las raíces del sistema

$$G(z)D(z) = K\frac{z}{z^2 - z + 0.1}$$

Determinar el rango de K para que sea estable.

PM13.5. Considerar el sistema realimentado de la Figura PM13.5. Obtener el lugar de las raíces y determinar el rango de K que garantice la estabilidad.

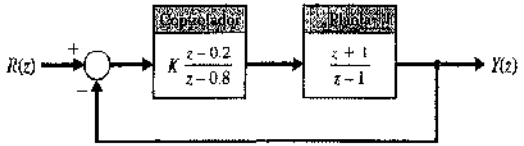


FIGURA PM13.5
Sistema de control con un controlador digital.

PM13.6. Considerar el sistema de datos muestreado con la función de transferencia de lazo

$$G(z)D(z) = K\frac{z^2 + 3z + 3.75}{z^2 - 0.2z - 1.9}.$$

(a) Dibujar el lugar de las raíces utilizando la función rlocus.
(b) A partir del lugar de las raíces, determinar el rango de K que garantice la estabilidad. Utilizar la función rlocfind.

PM13.7. Un proceso de moler industrialmente está representado por la función de transferencia [17]

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s + 5)}.$$

El objetivo consiste en utilizar un computador digital para mejorar el comportamiento, donde la función de transferencia del computador se representa mediante $D(z)$. Las especificaciones de diseño son (1) margen de fase mayor que 45°, y (2) tiempo de asentamiento (con el criterio del 2%) menor que 1 segundo.

(a) Diseñar un controlador

$$G_c(s) = K\frac{s + a}{s + b}$$

que obtenga las especificaciones deseadas. (b) Suponiendo un tiempo de muestreo de $T = 0.02$ segundos, convertir $G_c(s)$ a $D(z)$. (c) Simular el sistema en lazo cerrado continuo en el tiempo con una entrada escalón unitario. (d) Simular el sistema en lazo cerrado de datos muestreados con una entrada escalón unitario. (e) Comparar los resultados de los apartados (c) y (d) y comentarlos.

TÉRMINOS Y CONCEPTOS

Compensador digital por computador. Sistema que utiliza un computador digital como elemento compensador.

Controlador PID. Controlador con tres tiempos en el que la salida es la suma de un término proporcional, un término integral y un término diferencial, con una ganancia ajustable para cada término, dado por $G_c(z) = K_1 + \frac{K_2 Ts}{z - 1} + K_3\frac{z - 1}{Tz}$.

Dato muestreado. Dato obtenido para las variables del sistema sólo en intervalos discretos. Dato obtenidos una vez en cada periodo de muestreo.

Error de cuantificación de amplitud. La señal muestreada está disponible únicamente con una precisión limitada. El error entre la señal real y la señal muestreada.

Estabilidad de un sistema de datos muestreado. La condición de estabilidad se satisface cuando todos los polos de la función de transferencia en lazo cerrado $T(z)$ están dentro del círculo unidad en el plano z.

Integración rectangular hacia delante. Método de cálculo de aproximar la integral de una función dada por $x(kT) \simeq x((k - 1)T) + Tx((k - 1)T)$, donde $t = kT$, T es el tiempo de muestreo y $k = 1, 2, \ldots$

Microcomputador. Pequeño computador personal (PC) basado en un microprocesador.

Minicomputador. Computador con un tamaño y un comportamiento entre un microcomputador y un gran computador. Normalmente el término no se utiliza en la actualidad, y los computadores de este tipo se suelen denominar servidores de rango medio.

Plano z. Plano con el eje vertical igual a la parte imaginaria de z y el eje horizontal igual a la parte real de z.

Periodo de muestreo. Periodo en el que todos los números dejan o entran en el computador. Periodo para el que la variable muestreada se mantiene constante.

Precisión. Grado de exactitud o discriminación con el que se determina una cantidad.

Regla de diferenciación hacia atrás. Método de cálculo para aproximar la derivada temporal de una función dada por $\dot{x}(kT) \simeq \frac{x(kT) - x((k - 1)T)}{T}$, donde $t = kT$, T es el tiempo de muestreo y $k = 1, 2, \ldots$

Retenedor de orden cero. Modelo matemático de una operación muestreada de mantenimiento de datos con función de transferencia de entrada y salida dada por $G_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$.

Sistema de datos muestreado. Sistema en el que parte de él actúa con datos muestreados (variables muestreadas).

Transformada z. Transformación conforme del plano s al plano z dada por la relación $z = e^{sT}$. Transformación del dominio s al dominio z.

Apéndices

A. *Fundamentos de MATLAB* 831

B. *Fundamentos de Simulink* 849

APÉNDICE A

Fundamentos de MATLAB

A.1. INTRODUCCIÓN

MATLAB es un programa interactivo para realizar cálculos científicos y de ingeniería. La familia de programas MATLAB incluye el programa base más diversos paquetes (**toolboxes**), que son una colección de archivos especiales llamados *archivos-M* que extienden la funcionalidad del programa base [1-8]. Juntos, el programa base más el paquete de *Sistemas de Control* proporcionan la capacidad de utilizar MATLAB para el diseño y análisis de sistemas de control. Siempre que se hace referencia a MATLAB en este libro, se entiende MATLAB más el paquete de *Sistemas de Control*.

La mayoría de las sentencias, funciones y órdenes son independientes del tipo de computador que se utilice. Sin tomar en consideración el computador particular que se emplee, la interacción con MATLAB es básicamente la misma. Este apéndice se concentra sobre esta interacción independiente del tipo de computador. Una sesión típica utilizará una diversidad de objetos que permiten interaccionar con el programa: (1) sentencias y variables, (2) matrices, (3) gráficos y (4) programas. MATLAB interpreta y actúa sobre la entrada en la forma de uno o más de estos objetos. El objetivo en este apéndice es introducir cada uno de los cuatro objetos como preparación para el objetivo final de utilizar MATLAB para el análisis y diseño de sistemas de control.

La manera en que MATLAB interacciona con un computador específico depende del tipo de plataforma. Ejemplos de funciones que dependen del tipo de computador son la instalación, la estructura de archivos, la generación de una copia de un gráfico, la invocación y salida de una sesión y la gestión de la memoria. No se van a tratar las cuestiones que están relacionadas con la dependencia de un tipo particular de plataforma. Esto no quiere decir que no sean importantes, sino que hay mejores fuentes de información tales como la *Guía de Usuario* de MATLAB o el experto residente local.

El resto de este apéndice consiste en cuatro sesiones correspondientes a los cuatro objetos ya señalados. En la primera sección, se presentan los fundamentos de **sentencias** y **variables**. A continuación viene el tema de **matrices**. La tercera sección presenta una introducción a los **gráficos** y la cuarta sección es una exposición al importante tema de los **programas** y **archivos-M**. Todas las figuras de este apéndice se pueden construir empleando los archivos-m que se encuentran en el sitio web MCS.

A.2. SENTENCIAS Y VARIABLES

Las sentencias tienen la forma que se muestra en la Figura A.1. MATLAB utiliza el operador de asignación, así que el signo igual («=») implica la asignación de la expresión a

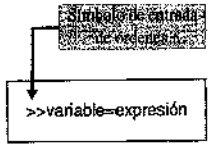


FIGURA A.1. Formato de una sentencia en MATLAB.

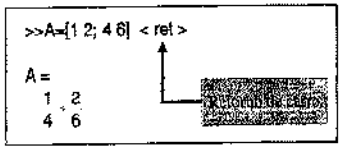


FIGURA A.2. Introducción y visualización de una matriz A.

la variable. El indicativo de petición de orden es «>>». En la Figura A.2 se muestra una sentencia típica, donde se está introduciendo una matriz 2 × 2 a la que se le asocia el nombre de variable **A**. La sentencia se ejecuta después de pulsar la tecla de retorno de carro. El retorno de carro no se denota explícitamente en los ejemplos restantes en este apéndice y en las secciones sobre MATLAB de los capítulos.

La matriz **A** se visualiza de manera automática después de que se ejecuta la sentencia a continuación del retorno de carro. Si la sentencia finaliza con un punto y coma (;), la salida de la matriz **A** se suprime, tal como se observa en la Figura A.3. La asignación de la variable **A** ha sido efectuada incluso aunque se haya suprimido su salida mediante el punto y coma. Con frecuencia sucede que la sesión de MATLAB incluye cálculos intermedios para los cuales la salida es de poco interés. Utilice el punto y coma siempre que tenga necesidad de reducir la cantidad de salida. La gestión de la salida tiene el beneficio añadido de aumentar la velocidad de ejecución de los cálculos, ya que la visualización de la salida por pantalla emplea tiempo.

Los operadores matemáticos se pueden utilizar en expresiones. En la Tabla A.1 se muestran los operadores comunes. El orden de las operaciones aritméticas se puede alterar empleando paréntesis.

El ejemplo de la Figura A.4 ilustra que MATLAB se puede utilizar en un modo «calculador». Cuando de una expresión se omiten el nombre de la variable y el signo «=», el resultado se asigna a la variable genérica *ans*. MATLAB tiene disponible la mayoría de las funciones trigonométricas y matemáticas elementales de una calculadora científica común. La *Guía de Usuario* tiene una lista completa de funciones trigonométricas y matemáticas elementales; en la Tabla A.2 se resumen las más comunes.

Los nombres de variables comienzan por una letra a la que puede seguir un número indefinido de letras y dígitos (incluido el guión de subrayado). Mantenga la longitud del nombre en 19 caracteres como máximo ya que MATLAB recuerda sólo los 19 primeros caracteres. Es una buena práctica emplear nombres de variables que describan la cantidad que representan. Por ejemplo, se podría emplear el nombre de variable *vel* para representar la cantidad *velocidad del avión*. Generalmente, no utilice nombres de variables extremadamente largos, incluso aunque sean nombres legales en MATLAB.

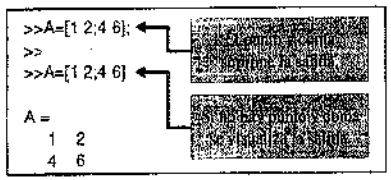


FIGURA A.3
Utilización del punto y coma para suprimir la salida.

Tabla A.1 Operadores matemáticos

+	Suma
−	Resta
×	Multiplicación
/ \	División
^	Potencia

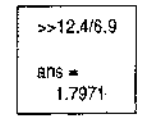


FIGURA A.4
Utilización en modo calculadora.

Como MATLAB es **sensible a mayúsculas**, las variables *M* y *m* no son la misma variable, tal como se ilustra en la Figura A.5. Las variables *M* y *m* se reconocen como cantidades diferentes.

MATLAB tiene algunas variables predefinidas, que incluyen *pi*, *Inf*, *NaN*, *i* y *j*. En la Figura A.6 se muestran tres ejemplos. *NaN* significa *No-es un-Número* y se produce cuando se realizan operaciones que no están definidas. *Inf* representa $+\infty$ y *pi* representa a π. La variable $i = \sqrt{-1}$ se utiliza para representar números complejos. Quienes lo prefieran pueden emplear la variable $j = \sqrt{-1}$ para aritmética compleja en lugar de *i*. Estas variables predefinidas se pueden sobrescribir de forma inadvertida. Por supuesto que también se pueden sobrescribir de forma intencionada con el fin de liberar la variable para otros usos. Por ejemplo, se puede desear utilizar *i* como un entero y reservar *j* para aritmética compleja. Por razones de seguridad se aconseja dejar estas variables como predefinidas; hay una multitud de nombres alternativos que se pueden emplear. Las variables predefinidas se pueden inicializar a sus valores por defecto utilizando clear *nombre* (por ejemplo clear *pi*).

La matriz **A** y la variable *ans*, en las Figuras A.3 y A.4, respectivamente, se almacenan en el **espacio de trabajo**. Las variables en el espacio de trabajo se guardan automáticamente para que puedan ser utilizadas posteriormente en la sesión. La función who da

Tabla A.2 Funciones matemáticas elementales

sen(x)	Seno	acoth(x)	Arco cotangente hiperbólica
senh(x)	Seno hiperbólico	exp(x)	Exponencial
asen(x)	Arco seno	log(x)	Logaritmo natural
asenh(x)	Arco seno hiperbólico	log10(x)	Logaritmo en base 10
cos(x)	Coseno	log2(x)	Logaritmo en base 2
cosh(x)	Coseno hiperbólico	pow2(x)	Potencia en base 2 y escalado en coma flotante
acos(x)	Arco coseno	sqrt(x)	Raíz cuadrada
acosh(x)	Arco coseno hiperbólico	nextpow2(x)	Siguiente potencia de 2 más grande
tan(x)	Tangente	abs(x)	Valor absoluto
tanh(x)	Tangente hiperbólica	angle(x)	Ángulo de fase
atan(x)	Arco tangente	complex(x,y)	Forma complejo a partir de parte real e imaginaria
atan2(y,x)	Arco tangente en 4 cuadrantes	conj(x)	Complejo conjugado
atanh(x)	Arco tangente hiperbólico	imag(x)	Parte imaginaria de un complejo
sec(x)	Secante	real(x)	Parte real de un complejo
sech(x)	Secante hiperbólica	unwrap(x)	Desplegado del ángulo de fase
asec(x)	Arco secante	isreal(x)	Verdadero para array real
asech(x)	Arco secante hiperbólica	cplxpair(x)	Ordena números en pares complejos conjugados
csc(x)	Cosecante	fix(x)	Redondea hacia cero
csch(x)	Cosecante hiperbólica	floor(x)	Redondea hacia menos infinito
acsc(x)	Arco cosecante	ceil(x)	Redondea hacia más infinito
acsch(x)	Arco cosecante hiperbólica	round(x)	Redondea hacia el entero más cercano
cot(x)	Cotangente	mod(x,y)	Módulo (resto con signo después de la división)
coth(x)	Cotangente hiperbólica	rem(x,y)	Resto después de la división
acot(x)	Arco cotangente		

```
>>M=[1 2];
>>m=[3 5 7];
```

FIGURA A.5
Las variables son sensibles a mayúsculas.

```
>>z=3+4*i
z =
   3.0000 + 4.0000i

>>Inf
ans =
   Inf

>>0/0
Warning: Divide by zero
ans =
   NaN
```

FIGURA A.6
Tres variables predefinidas *i*, *Inf* y *NaN*.

```
>>who
Your variables are:
A    M    ans    m    z
```

FIGURA A.7
Utilización de la función **who** para visualizar variables.

una lista de las variables en el espacio de trabajo, tal como se muestra en la Figura A.7. MATLAB tiene una gran cantidad de funciones incorporadas. *Véase* la *Guía de Usuario* de MATLAB o la Ayuda en-línea (**On-line Help**). Cada una de las funciones se describirá cuando surja la necesidad.

La función whos da una lista de las variables que hay en el espacio de trabajo; también da información adicional respecto a la dimensión de las variables, tipo y gestión de la memoria. La Figura A.8 da un ejemplo de la función whos. La información de gestión de la memoria dada por la función whos se puede interpretar como sigue: Cada elemento de la matriz A 2 × 2 requiere 8 bytes de memoria, lo que da un total de 32 bytes; la variable 1 × 1 *ans* requiere 8 bytes, y de la misma forma todas las demás. Todas las variables en el espacio de trabajo usan un total de 96 bytes.

Se pueden eliminar variables del espacio de trabajo con la función clear. La función clear, por sí sola, elimina todos los ítems (variables y funciones) del espacio de trabajo; clear variables elimina todas las variables del espacio de trabajo; clear *nombre1*

```
>>whos
```

Name	Size	Bytes	Class
A	2x2	32	Double array
M	1x2	16	Double array
ans	1x1	8	Double array
m	1x3	24	Double array
z	1x1	16	Double array (complex)

Grand total is 11 elements using 96 bytes.

FIGURA A.8
Utilización de la función **whos** para visualizar variables.


```
>>clear A
>>who
Your variables are:
M    ans    m    z
```

FIGURA A.9
Eliminación de la matriz A del espacio de trabajo.

nombre2... elimina las variables *nombre1*, *nombre2...* En la Figura A.9 se muestra el procedimiento para eliminar la matriz A del espacio de trabajo.

Los cálculos en MATLAB se efectúan en **doble precisión.** Sin embargo, la salida por pantalla se puede visualizar en algunos formatos. El formato de salida por defecto contiene cuatro dígitos después del punto decimal para los números que no son enteros. Esto se puede cambiar utilizando la función format que se muestra en la Figura A.10. Una vez que se ha especificado un formato particular, permanece activo hasta que se altera por una entrada format diferente. El formato de salida no afecta a los cálculos internos de MATLAB. Por otra parte, el número de dígitos que se visualizan no reflejan necesariamente el número de dígitos significativos del número. Éste es un problema-dependiente y sólo el usuario puede saber la precisión verdadera de los números de entrada y de los que visualiza MATLAB. Entre otros formatos de visualización (que no se muestran en la Figura A.10) se encuentran format long g (el mejor de los formatos en coma fija o flotante con 15 dígitos), format short g (lo mismo que format long g pero con 5 dígitos), format hex (formato hexadecimal), format bank (formato fijo para dólares y céntimos) y format (lo mismo que format short).

Como MATLAB es sensible a mayúsculas, las funciones who y WHO no son las mismas funciones. La primera función, who, es una función propia de MATLAB y al escribir who se listan las variables en el espacio de trabajo. Por otra parte, si se escribe WHO con mayúsculas se produce el mensaje de error que se muestra en la Figura A.11. Esto mismo se aplica a todas las funciones.

```
>>pi
ans =
   3.1416

>>format long; pi
ans =
   3.14159265358979

>>format short e; pi
ans =
   3.1416e+00

>>format long e; pi
ans =
   3.141592653589793e+000
```

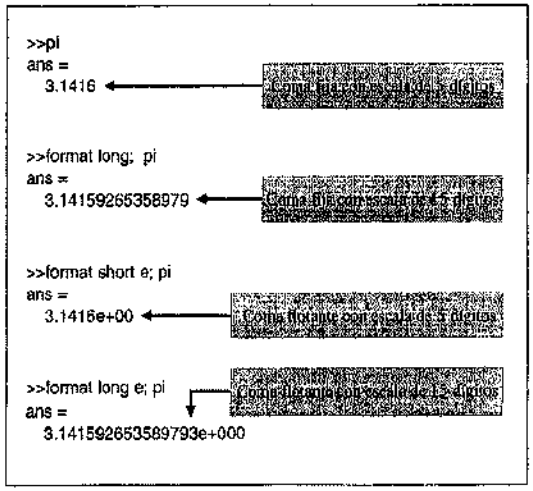


FIGURA A.10
El control del formato de salida ilustra las cuatro formas de salida.

```
>>WHO
??? Undefined variable or capitalized internal
function WHO; Caps Lock may be on.

>>Who
??? Undefined variable or capitalized internal
function Who; Caps Lock may be on.
```

FIGURA A.11
Los nombres de función son sensibles a mayúsculas.

A.3. MATRICES

MATLAB es una contracción de **laboratorio matricial**. Aunque no se va a hacer mucho hincapié en las rutinas matriciales en las que se fundamentan los cálculos, se aprenderá a usar la capacidad interactiva como ayuda en el análisis y diseño de sistemas de control. Se comienza por introducir los conceptos básicos asociados con las matrices y vectores que manipulan.

La unidad computacional básica es la matriz. Los vectores y escalares se pueden considerar casos especiales de matrices. Una expresión matricial típica se encierra entre corchetes, $[\cdot]$. Los elementos columnas se separan por blancos o comas y las filas se separan por puntos y comas o retornos de carro. Supóngase que se desea introducir la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4j & \sqrt{2} \\ \log(-1) & \text{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/3) \\ \text{asen}(0.8) & \text{acos}(0.8) & \exp(0.8) \end{bmatrix}.$$

En la Figura A.12 se muestra una forma de introducir **A**. El estilo de la entrada en la Figura A.12 no es único.

Las matrices se pueden introducir a través de varias líneas utilizando un retorno de carro a continuación del punto y coma o en lugar de los puntos y comas. Esta práctica es útil para introducir grandes matrices. Se pueden utilizar diferentes combinaciones de espacios y comas para separar las columnas y diferentes combinaciones de puntos y comas y retornos de carro para separar las filas, tal como se ilustra en la Figura A.12.

```
>>A=[1, -4*j, sqrt(2);
log(-1) sin(pi/2) cos(pi/3)
asin(0.5), acos(0.8) exp(0.8)]

A =
   1.0000          0 - 4.0000i   1.4142
   0 + 3.1416i     1.0000        0.5000
   0.5236          0.6435        2.2255

>>A=[1 2;4 5]
A =
   1   2
   4   5
```

FIGURA A.12
Entrada de una matriz real y compleja con dimensión y ajuste de tipos automáticos.

No son necesarias sentencias de dimensión o tipo cuando se utilizan matrices; la memoria se gestiona de forma automática. Obsérvese en el ejemplo de la Figura A.12 que el tamaño de la matriz **A** se ajusta automáticamente cuando se redefine la matriz de entrada. También los elementos de la matriz pueden contener funciones trigonométricas y funciones matemáticas elementales así como números complejos.

Las operaciones matriciales básicas importantes son suma y resta, multiplicación, transpuesta, potencias y las denominadas operaciones de arrays, que son operaciones elemento a elemento. Los operadores matemáticos dados en la Tabla A.1 se aplican a matrices. No se explicará la división matricial, pero conviene saber que MATLAB tiene la capacidad de división matricial a izquierda y a derecha.

Las operaciones matriciales requieren que las dimensiones de la matriz sean compatibles. Para la suma y resta matricial esto significa que las matrices deben tener la misma dimensión. Si **A** es una matriz $n \times m$ y **B** es una matriz $p \times r$, entonces $\mathbf{A} \pm \mathbf{B}$ se permite sólo si $n = p$ y $m = r$. La multiplicación matricial, dada por $\mathbf{A} * \mathbf{B}$, se permite sólo si $m = p$. La multiplicación vectorial matricial es un caso especial de multiplicación matricial. Supóngase que **b** es un vector de longitud p. La multiplicación del vector **b** por la matriz **A**, donde **A** es una matriz $n \times m$, se permite si $m = p$. Así, $\mathbf{y} = \mathbf{A} * \mathbf{b}$ es el vector solución $n \times 1$ de $\mathbf{A} * \mathbf{b}$. En la Figura A.13 se dan ejemplos de tres operaciones matriciales-vectoriales básicas.

La transpuesta matricial se forma con el apóstrofo ('). Se puede utilizar la transpuesta matricial y la operación de multiplicación para crear un vector **producto interno** de la manera siguiente. Supóngase que **w** y **v** son $m \times 1$ vectores. Entonces el producto interno (también conocido como producto escalar) está dado por $\mathbf{w}' * \mathbf{v}$. El producto interno de dos vectores es un escalar. Análogamente, el **producto externo** de dos vectores se puede calcular como $\mathbf{w} * \mathbf{v}'$. El producto externo de dos vectores $m \times 1$ es una matriz $m \times m$ de rango 1. En la Figura A.14 se dan ejemplos de productos internos y externos.

La operación matricial básica se puede modificar en operaciones que actúan elemento a elemento al preceder al operador con un punto. Las operaciones matriciales modificadas se conocen como **operaciones de arrays**. En la Tabla A.3 se dan los operadores

```
>>A=[1 3; 5 9]; B=[4 -7; 10 0];
>>A+B
ans =
   5   -4
   15   9

>>b=[1;5];
>>A*b
ans =
   16
   50

>>A'
ans =
   1   5
   3   9
```

FIGURA A.13
Tres operaciones matriciales básicas: suma, multiplicación y transpuesta.

```
>>x=[5;pi;sin(pi/2)]; y=[exp(-0.5);-13;pi^2];
>>x'*y
ans =
   -27.9384

>>x'.*y
ans =
    3.0327  -65.0000   49.3480
    1.9055  -40.8407   31.0063
    0.5065  -13.0000    9.8696
```

FIGURA A.14. Productos escalar y vectorial de dos vectores.

+	Suma
−	Resta
*	Multiplicación
./	División
.^	Potencia

de arrays que se utilizan comúnmente. La suma y resta matricial son ya operaciones elemento a elemento y no requieren el punto adicional precediendo al operador. Sin embargo, la multiplicación, división y potencia de arrays requieren el punto por delante, tal como se muestra en la Tabla A.3.

Sean las matrices **A** y **B** 2 × 2 dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Entonces, utilizando el operador multiplicación de arrays, se tiene

$$\mathbf{A} .* \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Los elementos de **A** .* **B** son los productos de los elementos correspondientes de **A** y **B**. En la Figura A.15 se da un ejemplo numérico de dos operaciones de arrays.

```
>>A=[1;2;3];B=[-6;7;10];
>>A.*B
ans=
    -6
    14
    30

>>A.^2
ans =
     1
     4
     9
```

FIGURA A.15
Operaciones con arrays.

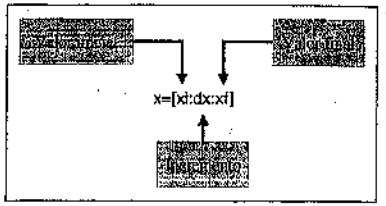


FIGURA A.16
La notación dos puntos.

Antes de procedet al importante tema de los gráficos se necesita introducir la noción **de subíndices utilizando la notación dos puntos.** La notación dos puntos, que se muestra en la Figura A.16, permite generar un vector fila que contiene los números desde un valor de comienzo dado, x_i, hasta un valor final, x_f, con un incremento especificado, dx.

Se pueden generar fácilmente vectores utilizando la notación dos puntos, y, como se verá, resulta bastante útil para desarrollar **gráficas *x-y***. Supóngase que el objetivo es generar una gráfica de $y = \text{sen}(x)$ respecto de x para $x = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 1.0$. El primer paso es generar una tabla de datos *x-y*. Se puede generar un vector que contiene los valores de x en los que se desean los valores de $y(x)$ utilizando la notación dos puntos tal como se ilustra en la Figura A.17. Dado el vector x deseado, el vector $y(x)$ se calcula utilizando la operación multiplicación de arrays. Crear una gráfica de $y = \text{sen}(x)$ respecto de x es un paso sencillo una vez que se genera la tabla de datos *x-y*.

A.4. GRÁFICOS

Los gráficos juegan un papel importante en el análisis y diseño de sistemas de control. Un componente importante de una herramienta de análisis y diseño de sistemas de control **interactivo** es disponer de una capacidad gráfica efectiva. Una solución completa al análisis y diseño de sistemas de control eventualmente requerirá una mirada detallada en una multitud de tipos de datos en muchos formatos. El objetivo de esta sección es dar a

```
>>x=[0:0.1:1]';y=x.*sin(x);
>>[x,y]

ans =
         0         0
    0.1000    0.0100
    0.2000    0.0397
    0.3000    0.0887
    0.4000    0.1558
    0.5000    0.2397
    0.6000    0.3388
    0.7000    0.4510
    0.8000    0.5739
    0.9000    0.7050
    1.0000    0.8415
```

FIGURA A.17
Generación de vectores utilizando la notación dos puntos.

plot(x,y)	Gráfica del vector **x** respecto del vector **y**.
semilogx(x,y)	Gráfica del vector **x** respecto del vector **y**. El eje x es $\log_{10}$; el eje y es lineal.
semilogy(x,y)	Gráfica del vector **x** respecto del vector **y**. El eje x es lineal; el eje y es $\log_{10}$.
loglog(x,y)	Gráfica del vector **x** respecto del vector **y**. Crea una gráfica con escalas $\log_{10}$ en ambos ejes.

conocer al lector las capacidades básicas gráficas x-y de MATLAB. Las cuestiones gráficas más avanzadas se tratan en las secciones de los capítulos dedicadas a MATLAB.

MATLAB emplea una **ventana gráfica** para representar gráficos. Esta ventana se activa automáticamente utilizando cualquier función que genera una gráfica (por ejemplo, la función plot). La función plot abre una ventana gráfica, llamada **FIGURA**. Se puede crear también una nueva ventana gráfica con la función figure. En una única sesión de MATLAB pueden existir múltiples ventanas con figuras; la función figure(n) hace que n sea la figura actual. Las gráficas en las ventanas se borran introduciendo la función clf desde la línea de petición de órdenes de MATLAB. La función shg lleva hacia adelante la ventana de la figura actual.

Hay dos grupos básicos de funciones gráficas. El primer grupo que se muestra en la Tabla A.4 especifica el tipo de gráfica. La lista de tipos de gráficas disponibles comprende las gráficas x-y, las gráficas semilog y las gráficas log. El segundo grupo de funciones que se muestra en la Tabla A.5 permite personalizar las gráficas añadiendo títulos, etiquetas a los ejes, textos a las gráficas y cambiar las escalas y visualizar múltiples gráficas en subventanas.

La gráfica estándar x-y se crea utilizando la función plot. Los datos x-y de la Figura A.17 se representan empleando la función plot tal como se muestra en la Figura A.18. Las escalas de los ejes y los tipos de líneas se escogen automáticamente. Los ejes se etiquetan con las funciones xlabel e ylabel; el título se aplica con la función title. La función legend pone una leyenda en la figura actual. Se puede colocar una rejilla sobre la gráfica con la función grid on. Una gráfica x-y básica se genera con la combinación de funciones plot, legend, xlabel, ylabel y grid on.

Se pueden colocar múltiples líneas en una misma gráfica utilizando la función plot con múltiples argumentos, tal como se muestra en la Figura A.19. Los tipos de líneas por defecto también se pueden alterar. En la Tabla A.6 se muestran los tipos de líneas que

title ('texto')	Escribe 'texto' en la parte superior de la gráfica
legend (cad1, cad2, ...)	Escribe una leyenda en la gráfica actual usando las cadenas especificadas como etiquetas
xlabel ('texto')	Etiqueta el eje x con 'texto'
ylabel ('texto')	Etiqueta el eje y con 'texto'
text (p1,p2, 'texto')	Escribe 'texto' en la posición (p1, p2), donde (p1, p2) está dado en unidades de la gráfica actual
subplot	Subdivide la ventana gráfica
grid on	Añade una rejilla a la figura actual
grid off	Elimina la rejilla de la figura actual
grid	Conmuta el estado de la rejilla

-	Línea continua
--	Línea a tramos
:	Línea punteada
-.	Línea de raya y punto

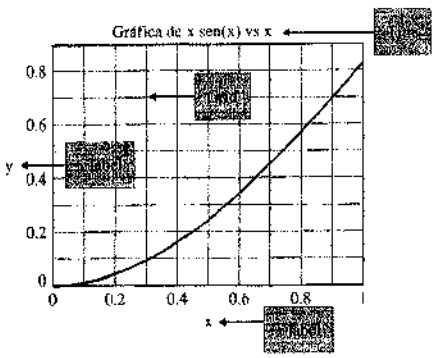
hay disponibles. Los tipos de línea se escogerán automáticamente a menos que se especifiquen por el usuario. En la Figura A.19 se ilustra el empleo de la función text y la modificación en los tipos de línea.

Las otras funciones gráficas —loglog, semilogx y semilogy— se usan de forma similar a la función plot. Para obtener una gráfica x-y donde el eje x es una escala lineal y el eje y es una escala $\log_{10}$, se utilizaría la función semilogy en lugar de la función plot. Las características de personalización que se relacionan en la Tabla A.5 se pueden emplear con las funciones loglog, semilogx y semilogy.

La ventana gráfica se puede subdividir en subventanas más pequeñas. La función subplot(m,n,p) divide la ventana gráfica en una rejilla de $m \times n$ subventanas más pequeñas.

```
>>x=[0:0.1:1]';
>>y=x.*sin(x);
>>plot(x,y)
>>title('Gráfica de x sen(x) vs x ')
>>xlabel('x')
>>ylabel('y')
>>grid on
```

(a)

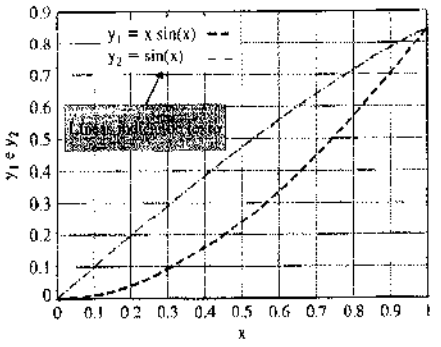


(b)

FIGURA A.18. (a) Órdenes de MATLAB. (b) Una gráfica básica x-y de $x \operatorname{sen}(x)$ respecto de x.

```
>> x=[0:0.1:1]';
>> y1=x.*sin(x); y2=sin(x);
>> plot(x,y1,'--',x,y2,'-.')
>> text(0.1,0.85,'y_1 = x sin(x) ---')
>> text(0.1,0.80,'y_2 = sin(x) -.-.-')
>> xlabel('x'), ylabel('y_1 and y_2'), grid on
```

(a)



(b)

FIGURA A.19. (a) Órdenes de MATLAB. (b) Una gráfica básica x-y de $x \operatorname{sen}(x)$ con líneas múltiples.

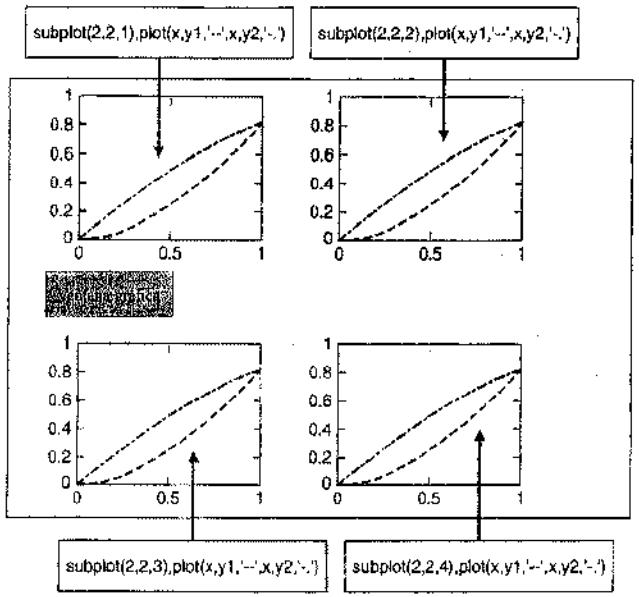


FIGURA A.20
Utilización de **subplot** para crear una partición 2 × 2 de la ventana gráfica.

El entero p especifica la ventana, numerada de izquierda a derecha y de arriba abajo, tal como se ilustra en la Figura A.20, donde la ventana gráfica se subdivide en cuatro subventanas.

A.5. PROGRAMAS

Hasta este momento, toda la interacción con MATLAB ha sido desde la línea de órdenes. Se introducían sentencias y funciones en la línea de órdenes y MATLAB interpretaba la entrada y efectuaba las acciones apropiadas. Éste es el modo de operación preferible siempre que las sesiones de trabajo sean cortas y no repetitivas. Sin embargo, la potencia real de MATLAB para el análisis y diseño de sistemas de control deriva de su capacidad para ejecutar una larga secuencia de órdenes que se encuentran almacenadas en un archivo. Estos archivos se llaman **archivos-M**, ya que el nombre del archivo tiene la forma *nombrearchivo.m*. Un programa (**script**) es un tipo de archivo-M. El *Toolbox de Sistemas de Control* es una colección de archivos-M diseñados específicamente para aplicaciones de control. Además de los archivos-M que ya existen y que se entregan con MATLAB y los toolboxes se pueden desarrollar scripts para las aplicaciones que se deseen. Los scripts no son nada más que archivos de texto ASCII y se crean utilizando un editor de texto.

Un script es una secuencia de sentencias ordinarias y funciones utilizadas en el nivel de entrada de órdenes. Un script se invoca en el nivel de petición de órdenes escribiendo el nombre del archivo o utilizando los menús desplegables. Los scripts pueden a su vez llamar a otros scripts. Cuando se llama al script, MATLAB ejecuta las sentencias y funciones que hay en el archivo sin esperar a ninguna entrada más en la línea de órdenes. El script opera sobre las variables del espacio de trabajo.


```
>>alpha=50;
>>plotdata
```

plotdata.m

```
% Éste es un programa para representar la función y=sin(alpha*t).
%
% El valor de alpha debe existir en el espacio de trabajo antes
% de llamar al programa.
%
t=[0:0.01:1];
y=sin(alpha*t);
plot(t,y)
xlabel('Time (sec)')
ylabel('y(t) = sin(\alpha t)')
grid on
```

FIGURA A.21
Un sencillo programa para representar la función $y(t) = \text{sen}\,\alpha t$.

Supóngase que se necesita representar la función $y(t) = \text{sen}\,\alpha t$, donde α es una variable que se desea modificar. Utilizando un editor de texto, se escribe un script que se llama plotdata.m, tal como se muestra en la Figura A.21, y a continuación se introduce un valor para α desde la línea de órdenes, lo que coloca a α en el espacio de trabajo. El script se ejecuta escribiendo plotdata desde la línea de órdenes; el script plotdata.m utilizará el valor más reciente de α en el espacio de trabajo. Después de ejecutar el script, se puede introducir otro valor de α en la línea de órdenes y ejecutar otra vez el script.

Los scripts deberían documentarse bien con **comentarios** que comienzan con un %. Ponga un **encabezamiento** en el script; asegúrese de que el encabezamiento incluye algunos comentarios descriptivos que expliquen la función del script, y a continuación emplee la función help para visualizar los comentarios del encabezamiento y describir el script al usuario, tal como se ilustra en la Figura A.22.

Utilice plotdata.m para desarrollar una capacidad interactiva con α como variable, tal como se muestra en la Figura A.23. En la línea de órdenes, introduzca un valor de $\alpha = 10$ seguido por el nombre del archivo del script, que en este caso es plotdata. La gráfica de $y(t) = \text{sen}\,\alpha t$ se genera automáticamente. Se puede volver ahora otra vez a la línea de órdenes, introducir un valor de $\alpha = 50$ y ejecutar de nuevo el script para obtener la gráfica actualizada.

Se encuentra disponible un subconjunto limitado de caracteres TeX que permiten anotar las gráficas con símbolos y caracteres matemáticos. La Tabla A.7 muestra los símbolos disponibles. La Figura A.21 ilustra el uso de '\alpha' para generar el carácter α en la etiqueta del eje y. El carácter '\' precede a todas las secuencias TeX. También, puede modificar los caracteres con los siguientes modificadores:

- \bf —fuente en negrita
- \it —fuente en itálica
- \rm —fuente normal
- \fontname —especifica el nombre de la familia de fuentes que se va a utilizar
- \fonysize —especifica el tamaño de la fuente

```
>>help plotdata

   This is a script to plot the function y=sin(alpha*t).

   The value of alpha must exist in the workspace prior
   to invoking the script.
```

FIGURA A.22
Utilización de la función **help**.

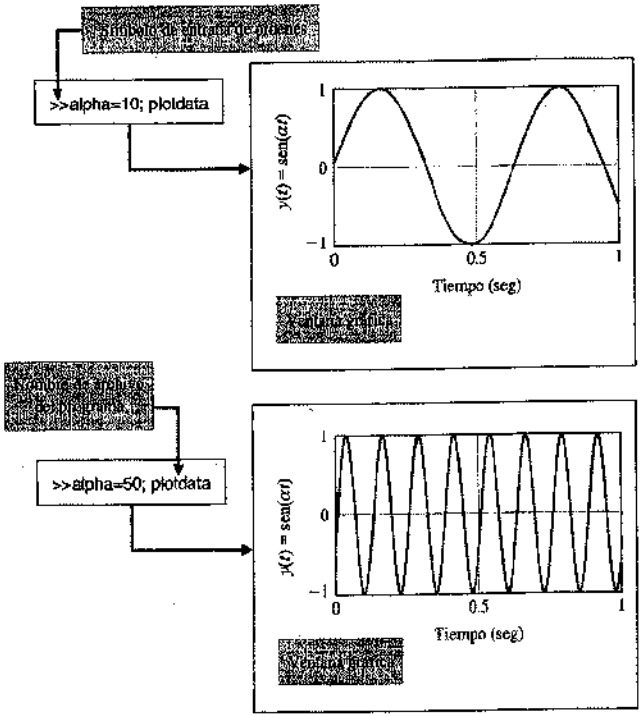


FIGURA A.23
Una sesión interactiva que utiliza un programa para representar la función $y(t) = \text{sen}\,\alpha t$.

Los subíndices y superíndices se obtienen con «_» y «^», respectivamente. Por ejemplo, ylabel('y_1 e y_2') genera la etiqueta del eje-y que se muestra en la Figura A.19.

La capacidad gráfica de MATLAB se extiende más allá del material de introducción presentado aquí. Se investigará el tema de las gráficas en las secciones que hay en los capítulos sobre MATLAB. En la Tabla A.8 se proporciona una tabla de funciones de MATLAB utilizadas en este libro.

Tabla A.8. Funciones de MATLAB

Nombre función	Descripción de la función
abs	Calcula el valor absoluto
acos	Calcula el arco seno
ans	Variable creada para expresiones
asin	Calcula el arco seno
atan	Calcula el arco tangente (2 cuadrantes)
atan2	Calcula el arco tangente (4 cuadrantes)
axis	Especifica el escalado manual de ejes en las gráficas
bode	Genera las gráficas de respuesta en frecuencia de Bode
c2d	Convierte una representación en variables de estado de tiempo continuo en una representación de tiempo discreto
clear	Limpia el espacio de trabajo
clf	Limpia la ventana gráfica
conj	Calcula el complejo conjugado
conv	Multiplica dos polinomios (convolución)
cos	Calcula el coseno
ctrb	Calcula la matriz de controlabilidad
diary	Guarda la sesión en un archivo del disco
d2c	Convierte una representación en variables de estado de tiempo discreto en una representación de tiempo continuo
eig	Calcula los valores y vectores propios
end	Termina las estructuras de control
exp	Calcula la exponencial con base e
expm	Calcula la matriz exponencial con base e
eye	Genera una matriz identidad
feedback	Calcula la interconexión mediante realimentación de dos sistemas
for	Genera un bucle
format	Fija el formato de visualización de salida
grid on	Añade una rejilla a la gráfica actual
help	Imprime una lista de tópicos de AYUDA
hold on	Mantiene la gráfica actual en la pantalla
i	$\sqrt{-1}$
imag	Calcula la parte imaginaria de un número complejo
impulse	Calcula la respuesta a un impulso unitario de un sistema
inf	Representa infinito
j	$\sqrt{-1}$
legend	Pone una leyenda en la gráfica actual
linspace	Genera vectores espaciados linealmente
load	Carga variables almacenadas en un archivo
log	Calcula el logaritmo natural
log10	Calcula el logaritmo en base 10
loglog	Genera gráficas log-log
logspace	Genera vectores espaciados logarítmicamente
lsim	Calcula la respuesta temporal de un sistema a una entrada arbitraria y condiciones iniciales
margin	Calcula el margen de ganancia, margen de fase y las frecuencias de cruces asociadas de los datos de respuesta en frecuencia
max	Determina el valor máximo
mesh	Crea superficies de mallas tridimensionales
meshgrid	Genera arrays que se utilizan con la función mesh
min	Determina el valor mínimo
minreal	Función de transferencia con cancelación polo-cero

Tabla A.8. *Continúa*

Tabla A.8. *Continuación*

Nombre función	Descripción de la función
NaN	Representación de No-es-Número
ngrid	Dibuja una rejilla en las cartas de Nichols
nichols	Calcula la repuesta en frecuencia en Nichols
num2str	Convierte números en cadenas
nyquist	Calcula la repuesta en frecuencia en Nyquist
obsv	Calcula la matriz de observabilidad
ones	Genera una matriz de enteros donde todos los enteros son 1
pade	Calcula una aproximación de Pade de orden n para un retardo de tiempo
parallel	Calcula una conexión de sistemas en paralelo
plot	Genera una gráfica lineal
pole	Calcula los polos de un sistema
poly	Calcula un polinomio a partir de sus raíces
polyval	Evalúa un polinomio
printsys	Imprime las representaciones en variables de estado y en función de transferencia de un sistema lineal en un formato agradable
pzmap	Representa el mapa de polos-ceros de un sistema lineal
rank	Calcula el rango de una matriz
real	Calcula la parte real de un número complejo
residue	Calcula un desarrollo en fracciones simples
rlocfind	Encuentra la ganancia asociada con un conjunto dado de raíces en un diagrama del lugar de las raíces
rlocus	Calcula el lugar de las raíces
roots	Determina las raíces de un polinomio
semilogx	Genera una gráfica x-y utilizando escalas semilog con $\log_{10}$ en el eje x y lineal en el eje y
semilogy	Genera una gráfica x-y utilizando escalas semilog con $\log_{10}$ en el eje y y lineal en el eje x
series	Calcula una conexión de sistemas en serie
shg	Muestra una ventana gráfica
sin	Calcula el seno
sqrt	Calcula la raíz cuadrada
ss	Crea un objeto que es un modelo en el espacio de estados
step	Calcula la respuesta a un escalón unitario de un sistema
subplot	Divide la ventana gráfica en subventanas
tan	Calcula la tangente
text	Añade texto a la gráfica actual
title	Añade un título a la gráfica actual
tf	Crea un objeto que es un modelo función de transferencia
who	Lista las variables actualmente en memoria
whos	Lista las variables actuales y su tamaño
xlabel	Añade una etiqueta al eje x de la gráfica actual
ylabel	Añade una etiqueta al eje y de la gráfica actual
zero	Calcula los ceros de un sistema
zeros	Calcula una matriz de ceros

FUNDAMENTOS DE MATLAB: PROBLEMAS

A.1. Sean las dos matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2\pi \\ 6j & 10 + \sqrt{2}j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6j & -13\pi \\ \pi & 16 \end{bmatrix}.$$

Utilizando MATLAB, calcular lo siguiente:

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (b) $\mathbf{AB}$
(c) $\mathbf{A}^2$ (d) $\mathbf{A}'$
(e) $\mathbf{B}^{-1}$ (f) $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$
(g) $\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - \mathbf{AB}$

A.2. Sea el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas lineales:

$$5x + 6y + 10z = 4,$$
$$-3x + 14z = 10,$$
$$-7y + 21z = 0.$$

Determinar los valores de x, y y z de forma que el conjunto de ecuaciones algebraicas se satisfaga. (*Sugerencia:* Escribir las ecuaciones en forma vectorial matricial.)

A.3. Generar una gráfica de

$$y(x) = e^{-0.5x} \operatorname{sen} \omega x,$$

donde $\omega = 10$ rad/s y $0 \leq x \leq 10$. Utilizar la notación de dos puntos para generar el vector x con incrementos de 0.1.

A.4. Desarrollar un script en MATLAB para representar la función

$$y(x) = \frac{4}{\pi} \cos \omega x + \frac{4}{9\pi} \cos 3\omega x.$$

donde ω es una variable de entrada desde la línea de órdenes. Etiquetar el eje x con *tiempo(seg)* y el eje y con $y(x) = (4/\pi) * \cos(\omega x) + (4/9\pi) * \cos(3\omega x)$. Incluir un encabezamiento descriptivo en el script y verificar que la función help visualizará dicho encabezamiento. Escoger $\omega = 1, 3, 10$ rad/s y comprobar el script.

A.5. Sea la función

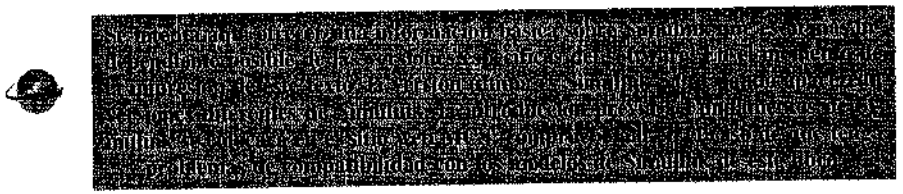
$$y(x) = 10 + 5e^{-x} \cos(\omega x + 0.5).$$

Desarrollar un script para representar en una misma gráfica $y(x)$ para los tres valores de $\omega = 1, 3, 10$ rad/s con $0 \leq x \leq 5$ segundos. La gráfica final debería tener los siguientes atributos:

Título	$y(x) = 10 + 5 \exp(-x) * \cos(\omega x + 0.5)$
etiqueta eje x	Tiempo (seg)
etiqueta eje y	$y(x)$
Tipo de línea	$\omega = 1$; línea continua
	$\omega = 3$; línea a tramos
	$\omega = 10$; línea punteada
Rejilla	rejilla sobre

Fundamentos de Simulink

Simulink proporciona un forma eficiente para que los usuarios de MATLAB modelen, simulen y analicen sistemas de control con realimentación [1-3]. Como Simulink es una herramienta interactiva que utiliza interfaces gráficas de manera efectiva, el mejor camino para aprender Simulink es ir directamente a utilizarlo. En este apéndice se presenta una serie de pasos para construir y simular un sistema sencillo.



Hay dos maneras de iniciar una sesión de Simulink:

- Pulsar sobre el icono de Simulink en la barra de herramientas de MATLAB.
- Introducir la orden simulink en la línea de órdenes.

En la Figura B.1 se ilustran los dos métodos de iniciar Simulink.

Cuando se activa Simulink, debería aparecer en el escritorio una ventana semejante a la de la Figura B.2. La Figura B.2(a) representa el Navegador de la Librería, que muestra en una vista en una estructura arborescente de las librerías de Simulink que están

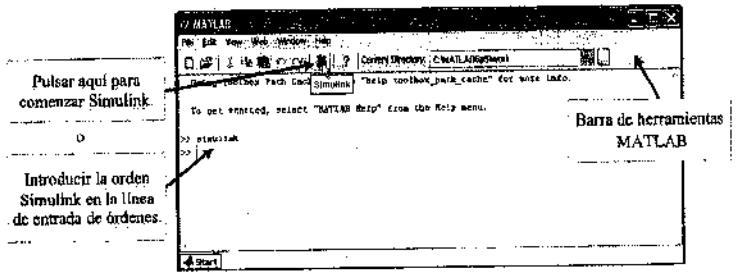

Pulsar aquí para comenzar Simulink
Introducir la orden Simulink en la línea de entrada de órdenes
Barra de herramientas MATLAB
Simulink
To get started, select "MATLAB Help" from the Help menu.
>> simulink

FIGURA B.1
Cómo iniciar una sesión de Simulink.

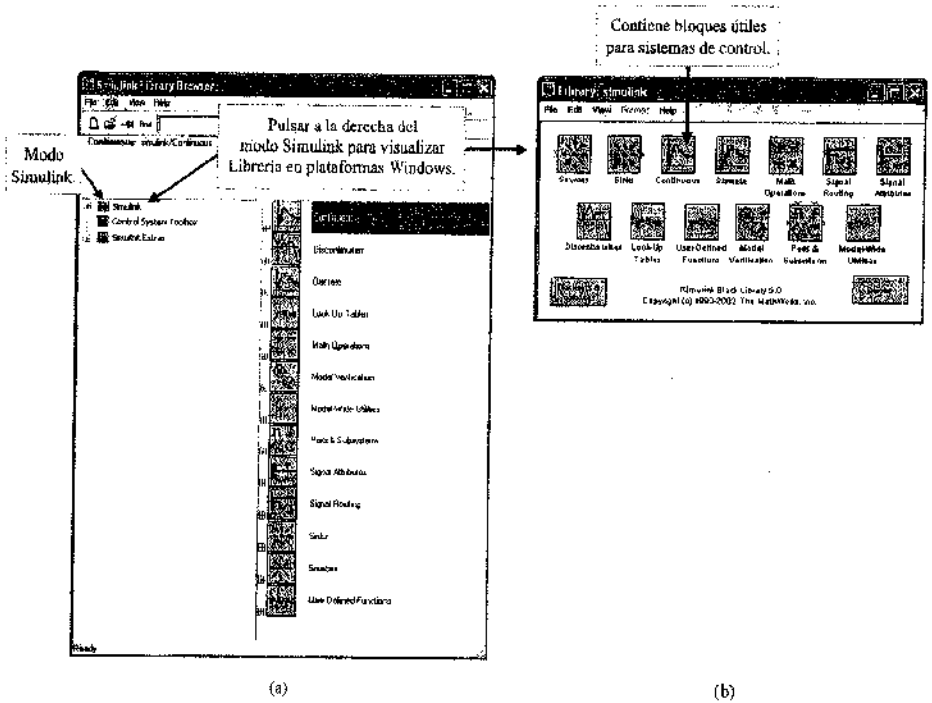


FIGURA B.2. Primera ventana que muestra Simulink. (a) Navegador de la librería. (b) Ventana de la librería

instaladas en el computador. Ésta es la pantalla que primero aparece. La ventana de la librería de Simulink que se muestra en la Figura B.2(b) se puede visualizar pulsando a la derecha del nodo Simulink en la ventana del Navegador de la Librería. En el caso que se muestra en la Figura B.2(a), las librerías asociadas con el *Toolbox de Sistemas de Control* aparecen porque ese toolbox está instalado.

Como ejercicio para aprender acerca de Simulink, puede seguir los pasos que se presentan en la explicación que sigue para construir un sistema sencillo e iniciar una simulación. No debería basarse solamente en este material para aprender Simulink; el material impreso y la ayuda en línea que viene con el software son también fuentes de referencias excelentes.

Puede comenzar la sesión de Simulink abriendo un modelo que ya existe o creando uno nuevo. Hay dos maneras de crear un nuevo modelo:

- Pulsar en el botón **New** en la barra de herramientas del Navegador de la Librería.
- Seleccionar **New** del menú desplegable File en la ventana de la librería y seleccionar **Model**.

En la Figura B.3 se ilustran estos dos métodos de crear un nuevo modelo. Una nueva ventana del sistema, representada en la Figura B.4, se abre en una posición por defecto en el escritorio. Puede moverla y redimensionarla como desee. Esta ventana del sistema

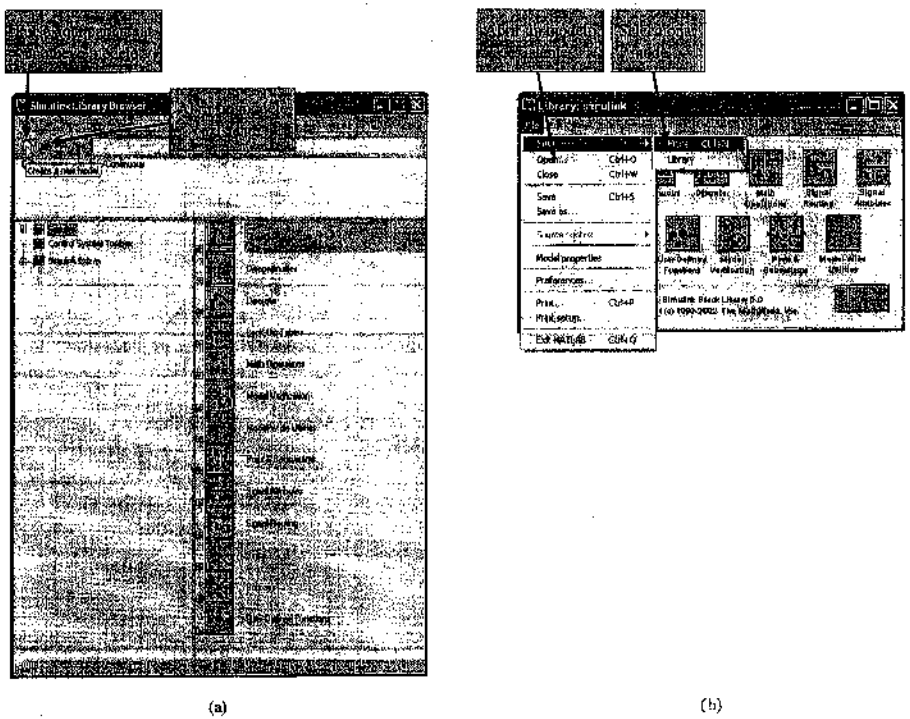


FIGURA B.3. Cómo crear un nuevo modelo. (a) Desde el navegador de librerías de Windows. (b) Desde la ventana de la librería.

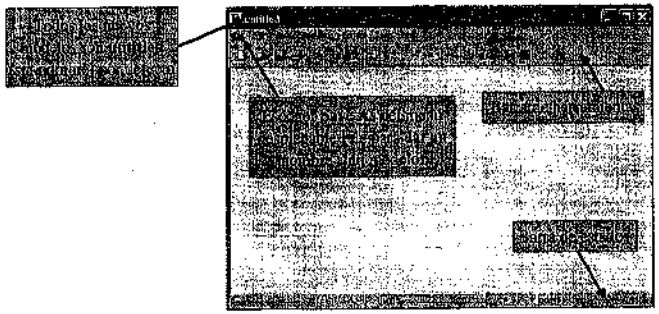


FIGURA B.4
La ventana del nuevo modelo.

se denomina **Untitled** la primera vez que se crea y se le puede cambiar el nombre seleccionando **Save As** del menú File. El modelo Simulink se crea, edita y simula en la ventana del modelo. Al guardar el modelo automáticamente crea un archivo (con una extensión .mdl) que contiene la información necesaria para abrir el modelo en futuras sesiones

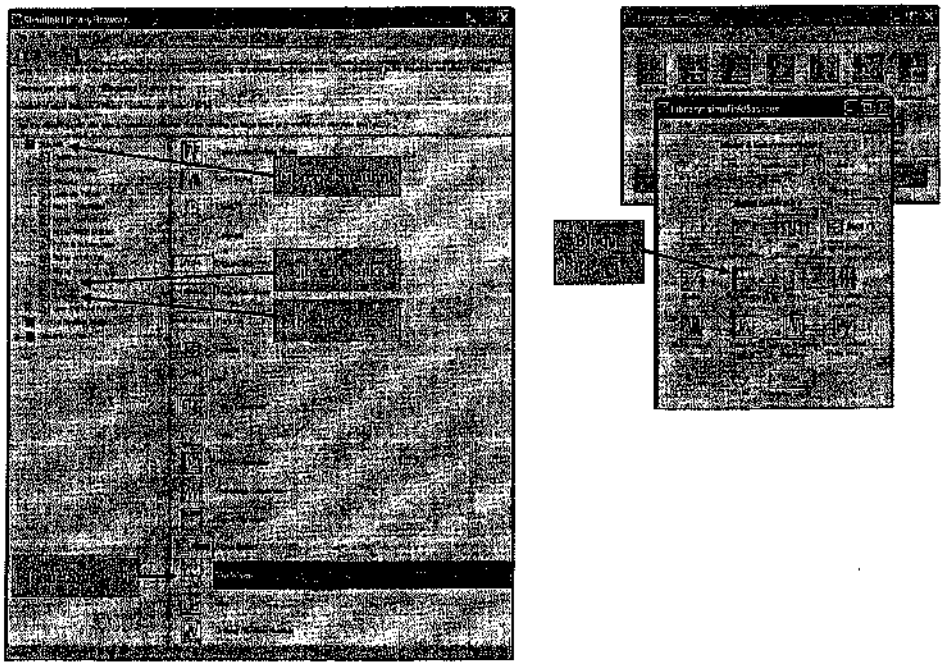
de Simulink. Seleccione **SAVE** del menú File después de cada sesión de forma que todos los cambios y actualizaciones se guarden para trabajos futuros.

Simulink tiene las librerías de bloques estándar que se muestran en la Figura B.2(b). Se organiza en subbloques de acuerdo con la función. Los bloques utilizados comúnmente son

- Fuentes
- Sumideros
- Discretos
- Continuos
- Operaciones matemáticas

Para crear un modelo, se arrastran los bloques de la librería de bloques estándar y se sueltan en el modelo. En el modelo sencillo que se desarrolla aquí, se necesitará localizar y copiar un bloque Sine Wave (de las Fuentes) y un bloque Scope (de los Sumideros).

Puede acceder al bloque Sine Wave desde el Navegador de la Librería o bien desde la ventana de la librería Sources. Expandiendo el Navegador de la Librería, tal como se ilustra la Figura B.5(a), proporciona acceso al bloque Sine Wave. Para expandir el Navegador de la Librería, primero pulse en el nodo Simulink y luego pulse en el nodo



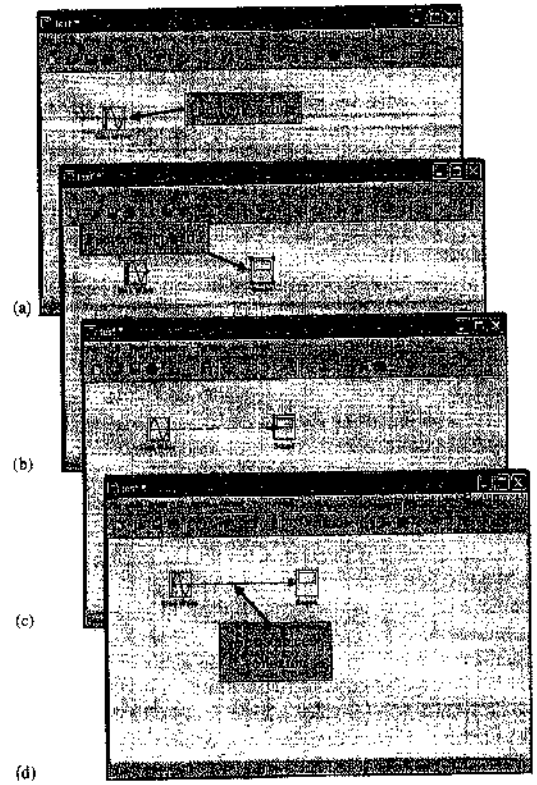
(a) (b)

FIGURA B.5. Localización de Sources (fuentes). (a) El navegador de la librería (Windows). (b) La ventana del bloque Sources (UNIX y Windows).

Sources para visualizar los bloques de la librería Sources. Pulse sobre el bloque Sine Wave para seleccionarlo y a continuación arrastre y suelte en la nueva ventana del modelo. Se hará una copia del bloque Sine Wave en la localización de la nueva ventana del modelo en la que se soltó el icono. De igual forma, para copiar el bloque Sine Wave de la ventana de la librería Sources, abre la ventana Sources [que se muestra en la Figura B.5(b)] pulsando a la derecha del icono Sources en la ventana de la librería Simulink y seleccionando el botón **Open the 'Sources' Library** (*véase* la Figura B.2).

Una vez abierta la ventana Sources, puede seleccionar el bloque Sine Wave y arrastrarlo y soltarlo en la nueva ventana del modelo. Llegado a este punto, el desarrollo del modelo se debería asemejar a lo que se muestra en la Figura B.6(a).

Necesita tener una forma de observar la señal de la onda seno generada por la fuente de señal. La ventana de la librería Sinks proporciona una colección de instrumentos de visualización para observar la señal, entre los que se incluyen Scope, XY Graph, Display, To Workspace y To File, tal como se muestra en la Figura B.7. Puede emplear los bloques To Workspace y To File para escribir datos al espacio de trabajo o a un archivo, respectivamente, de forma que los datos puedan estar disponibles en el espacio de trabajo después que se finaliza la simulación de Simulink. En el modelo utilizará el Scope para visualizar la señal de la onda seno.



(a) (b) (c) (d)

FIGURA B.6
Un sistema sencillo con la fuente de señal Sine Wave y un bloque Scope para visualización.

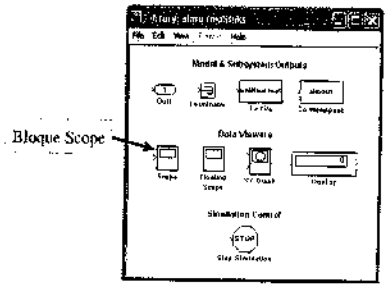


FIGURA B.7
La ventana de los bloques Links.

Puede copiar el bloque Scope o bien desde el Navegador de la Librería o desde la ventana de la librería Sink. Como con la librería de bloques Sources, expandiendo el Navegador de la Librería proporciona acceso al bloque Scope. Para expandir el Navegador de la Librería, primero pulse sobre el nodo Simulink y, a continuación, pulse sobre el nodo Sink para visualizar los bloques de la librería Links. Pulse en el bloque Scope para seleccionarlo y entonces arrástrelo y suéltelo en la nueva ventana del modelo. Otra forma de acceder al Scope es a través de la ventana de la librería Sinks pulsando a la derecha del icono Links en la ventana de la librería Simulink y seleccionando el botón **Open the 'Sinks' Library** (*véase* la Figura B.2). Después de copiar el bloque Scope en la nueva ventana del modelo, el modelo se debería asemejar a lo que se muestra en la Figura B.6(b).

Observe que a la ventana del sistema mostrada en la Figura B.6 se le ha puesto el nuevo nombre de **test** (anteriormente su nombre era **untitled**, tal como se muestra en la Figura B.4). Asegúrese de guardar el modelo de manera que pueda abrirlo y trabajar con él en subsiguientes sesiones de Simulink.

La próxima tarea es conectar el bloque Sine Wave con el bloque Scope. El símbolo > que aparece en el lado derecho de la fuente Sine Wave es el **puerto de salida**. Análogamente, el símbolo > que aparece en el lado izquierdo del bloque, Scope es el **puerto de entrada**. En general, cuando el símbolo > apunta hacia un bloque, es un puerto de entrada, y cuando apunta hacia fuera del bloque es un puerto de salida. Cuando los bloques se conectan, desaparecen los puertos de entrada y salida.

Para conectar el puerto de salida del bloque Sine Wave al puerto de entrada del bloque Scope, posicione el cursor sobre el puerto de salida del lado derecho del bloque Sine Wave (observe que el cursor cambia de forma a una cruz). Pulse el botón del ratón y mueva el cursor al puerto de entrada en el lado izquierdo del bloque Scope. La línea de conexión es una línea a tramos y el cursor cambia a una cruz doble cuando se aproxima al puerto de entrada del bloque Scope. Esto se ilustra en la Figura B.6(c). Después de alcanzar el otro puerto, suelte el botón del ratón para crear una línea de conexión (o enlace de datos) entre los dos puertos. Cuando los puertos se conectan, desaparece el símbolo > y aparece una línea con una flecha indicando la dirección del flujo de información, tal como se muestra en la Figura B.6(d). Se está ahora casi preparado para comenzar una simulación.

Puede visualizar y editar los parámetros de simulación seleccionando **Parameters** del menú Simulation. Aparece una pantalla similar a la que se muestra en la Figura B.8. Fije el tiempo de simulación (el valor por defecto es 10 segundos) a un valor de 1000.0 tal como se ilustra en la Figura B.8. Después de fijar el parámetro de tiempo de parada de la simulación, cierre el cuadro de diálogo pulsando en **OK**.

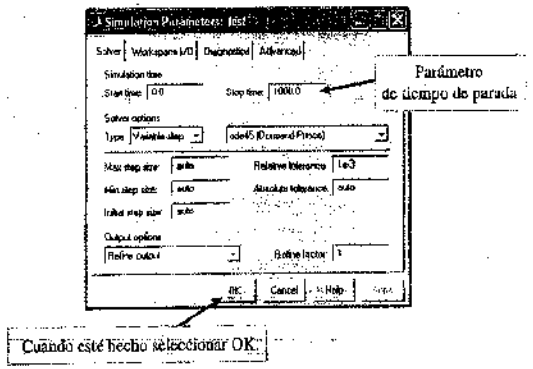


FIGURA B.8
Inicialización de los parámetros de simulación.

Puede cambiar los parámetros de la onda sinusoidal (tal como frecuencia) haciendo un doble clic sobre el icono Sine Wave en la ventana del modelo y modificando los parámetros deseados. Esto se ilustra en la Figura B.9. En este caso, la frecuencia de la onda sinusoidal se fija a 0.05 rad/s.

Antes de comenzar la simulación, abra el bloque Scope haciendo un doble clic sobre el icono Scope en la ventana del modelo. Para iniciar la simulación, seleccione Start del menú Simulation, tal como se muestra en la Figura B.10. La simulación comienza y el bloque Scope produce la gráfica que se muestra en la Figura B.11. La gráfica se actualiza

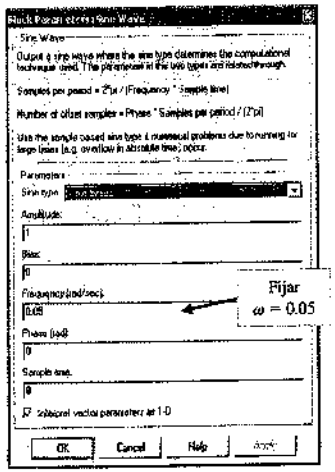


FIGURA B.9. Fijar la frecuencia de la onda sinusoidal a $\omega = 0.05$ rad/s.

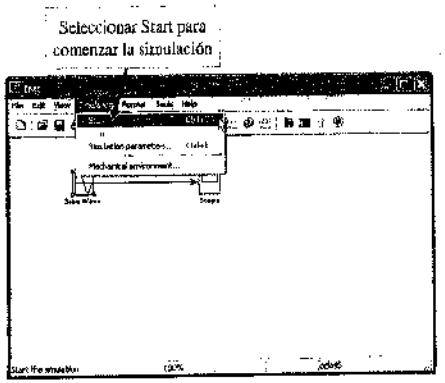


FIGURA B.10. Comienzo de una simulación seleccionando Start en el menú Simulation.

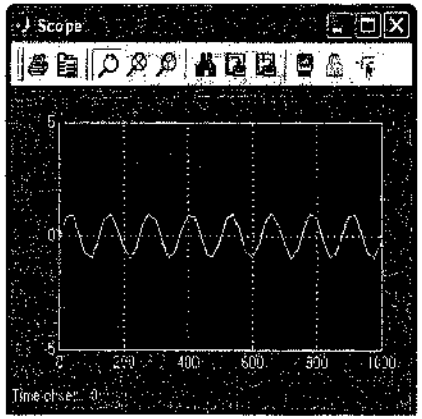


FIGURA B.11
Sesión de simulación con el sencillo sistema de simulación consistente en una fuente de señal Sine Wave y un bloque Scope para registrar la señal. La frecuencia de la onda sinusoidal es $\omega = 0.05$ rad/s.

dinámicamente cuando se generan los datos por la fuente Sine Wave. La gráfica que se muestra en la Figura B.11 es la gráfica final cuando se ha alcanzado el tiempo de parada de la simulación.

Se ha acabado ahora de construir el modelo sencillo y se ha hecho una única simulación. Recuerde escoger **Save** del menú File antes de abandonar la sesión de Simulink de forma que todos los cambios y actualizaciones del modelo de simulación se guardan para futuros trabajos.

Puede abandonar la sesión de Simulink escogiendo **Close** del menú File y así retorna a la línea de órdenes de MATALB para continuar con la sesión de MATLAB. Para terminar la sesión de Simulink, pero sin dejar MATLAB, simplemente cierre todas las ventanas de Simulink. Para abandonar MATLAB y Simulink, escoja **Exit MATLAB**.

En el análisis y diseño de sistemas de control con realimentación, Simulink proporciona un conjunto útil de bloques de función de transferencia y de modelo en el espacio de estados. Las Figuras B.12 y B.13 muestran la localización dentro de la librería del bloque Simulink de algunos modelos interesantes relacionados con el control. Observe, por ejemplo, que el popular controlador PID se representa en **Simulink Extras**.

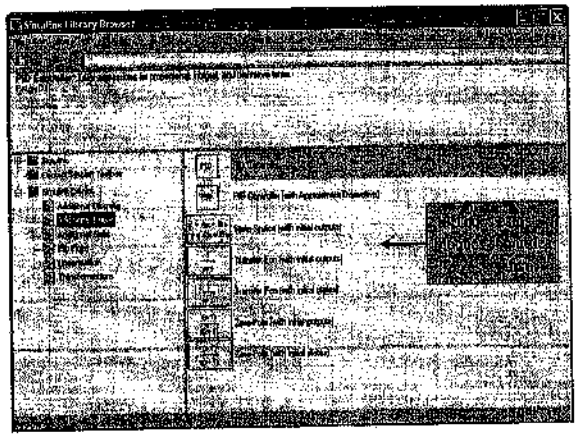


FIGURA B.12
Bloques interesantes relacionados con control en la librería de Simulink **Extras**.

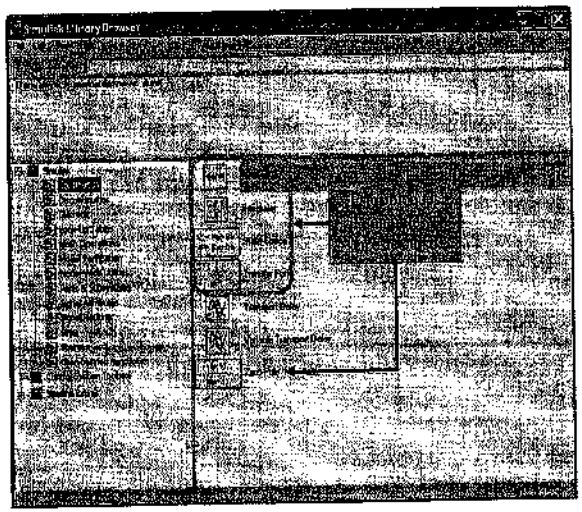


FIGURA B.13
Bloques interesantes relacionados con control en la librería de bloques **continuous**.

Referencias

Capítulo 1

1. O. Mayr, *The Origins of Feedback Control*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1970.
2. O. Mayr, «The Origins of Feedback Control», *Scientific American*, 223, 4, October 1970, pp. 110-118.
3. O. Mayr, *Feedback Mechanisms in the Historical Collections of the National Museum of History and Technology*, Smithsonian Institution Press, Washington, D. C., 1971.
4. E. P. Popov, *The Dynamics of Automatic Control Systems*, Gostekhizdat, Moscow, 1956; Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.
5. J. C. Maxwell, «On Governors», *Proc. of the Royal Society of London*, 16, 1868; in *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*. Dover, New York, 1964, pp. 270-283.
6. I. A. Vyshnegradskii, «On Controllers of Direct Action», *Izv. SPB Tekhnolog. Inst.*, 1877.
7. H. W. Bode, «Feedback-The History of an Idea», in *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*. Dover, New York, 1964, pp. 106-123.
8. H. S. Black, «Inventing the Negative Feedback Amplifier», *IEEE Spectrum*, December 1977, pp. 55-60.
9. J. E. Brittain, *Turning Points in American Electrical History*, IEEE Press, New York, 1977, Sect. II-E.
10. W. S. Levine, *The Control Handbook*, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1996.
11. G. Newton, L. Gould, and J. Kaiser, *Analytical Design of Linear Feedback Controls*, John Wiley & Sons, New York, 1957.
12. M. D. Fagen, *A History of Engineering and Science on the Bell Systems*, Bell Telephone Laboratories, 1978, Chapter 3.
13. G. Zorpette, «Parkinson's Gun Director», *IEEE Spectrum*, April 1989, p. 43.
14. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Automation and Manufacturing*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
15. W. D. Rasmussen, «The Mechanization of Agriculture», *Scientific American*, September 1982, pp. 26-37.
16. M. M. Gupta, *Intelligent Control*, IEEE Press, Piscataway, N. J., 1995.
17. A. G. Ulsoy, «Control of Machining Processes», *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 301-307.
18. M. P. Groover, *Fundamentals of Modern Manufacturing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996.
19. R. T. O'Brien, «Vertical Lateral Control for Automated Highway Systems», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, May 1996, pp. 266-273.
20. J. G. Kassakian, «Automotive Electrical Systems circa 2005», *IEEE Spectrum*, August 1996, pp. 22-27.
21. P. M. Moretti and L. V. Divone, «Modern Windmills», *Scientific American*, June 1986, pp. 110-118.
22. B. Preising and T. C. Hsia, «Robots in Medicine», *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, June 1991, pp. 13-22.
23. R. C. Dorf and J. Unmack, «A Time-Domain Model of the Heart Rate Control System», *Proceedings of the San Diego Symposium for Biomedical Engineering*, 1965, pp. 43-47.
24. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
25. R. C. Dorf, *Introduction to Computers and Computer Science*, Boyd and Fraser, San Francisco, 3rd ed., 1982, Chapters 13, 14.
26. K. Sutton, «Productivity», in *Encyclopedia of Engineering*, McGraw-Hill, New York, pp. 947-948.
27. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
28. R. C. Dorf, *Robotics and Automated Manufacturing*, Reston Publishing, Reston, Va., 1983.
29. S. S. Hacisalihzade, «Control Engineering and Therapeutic Drug Delivery», *IEEE Control Systems*, June 1989, pp. 44-46.
30. E. R. Carson and T. Deutsch, «A Spectrum of Approaches for Controlling Diabetes», *IEEE Control Systems*, December 1992, pp. 25-30.
31. J. R. Sankey and H. Kaufman, «Robust Considerations of a Drug Infusion System», *Proceedings of the American Control Conference*, San Francisco, Calif., June 1993, pp. 1689-1695.
32. W. S. Levine, *The Control Handbook*, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1996.
33. D. Auslander and C. J. Kempf, *Mechatronics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996.

34. «Things that Go Bump in Your Flight», *The Economist*, July 3, 1999, pp. 69-70.
35. P. J. Brancazio, «Science and the Game of Baseball», *Science Digest*, July 1984, pp. 66-70.
36. D. Dooling, «Smoother Sailing», *IEEE Spectrum*, August 1996, pp. 52-59.
37. C. Klomp, et al., «Development of an Autonomous Cow-Milking Robot Control System», *IEEE Control Systems*, October 1990, pp. 11-19.
38. M. B. Tischler et al., «Flight Control of a Helicopter», *IEEE Control Systems*, August 1999, pp. 22-32.
39. M. Bodson, «Emerging Technologies in Control Engineering», *IEEE Control Systems*, December 1995, pp. 6-9.
40. C. O'Malley, «Rapid Rails», *Popular Science*, June 1992, pp. 74-79.
41. G. B. Gordon and J. C. Roark, «ORCA: An Optimized Robot for Chemical Analysis», *Hewlett-Packard Journal*, June 1993, pp. 6-19.
42. K. Hollenback, «Destabilizing Effects of Muscular Contraction in Human-Machine Interaction», *Proceedings of the American Control Conference*, San Francisco, Calif., 1993, pp. 736-740.
43. L. Scivicco and B. Siciliano, *Modeling and Control of Robot Manipulators*, McGraw-Hill, New York, 1996.
44. O. Mayr, «Adam Smith and the Concept of the Feedback System», *Technology and Culture*, 12, 1, January 1971, pp. 1-22.
45. A. Goldsmith, «Autofocus Cameras», *Popular Science*, March 1988, pp. 70-72.
46. R. Johansson, *System Modeling and Identification*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1993.
47. M. DiChristina, «Telescope Tune-Up», *Popular Science*, September 1999, pp. 66-68.
48. K. Capek, *Rossum's Universal Robots*, English version by P. Selver and N. Playfair, Doubleday, Page, New York, 1923.
49. D. Hancock, «Prototyping the Hubble Fix», *IEEE Spectrum*, October 1993, pp. 34-39.
50. A. K. Naj, «Engineers Want New Buildings to Behave Like Human Beings», *Wall Street Journal*, January 20, 1994, p. B1.
51. E. H. Maslen et al., «Feedback Control Applications in Artifical Hearts», *IEEE Control Systems*, December 1998, pp. 26-30.
52. M. DiChristina, «What's Next for Hubble?» *Popular Science*, March 1998, pp. 56-59.
53. L. L. Bucciarelli, *Designing Engineers*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1996.
54. K. G. Ashar, *Magnetic Disk Drive Technology*, IEEE Press, Piscataway, N. J., 1997.
55. K. D. Fisher and W. L. Abbott, «PRML Detection Boosts Hard Disk Drive Technology», *IEEE Spectrum*, November 1996, pp. 70-76.
56. R. Stone, «Putting a Human Face on a New Breed of Robot», *Science*, October 11, 1996, p. 182.
57. P. I. Ro, «Nanometric Motion Control of a Traction Drive», *ASME Dynamic Systems and Control*, vol. 55.2, 1994, pp. 879-883.
58. M. Allen, «May the Cornering Force Be with You», *Popular Mechanics*, December 1995, pp. 74-77.
59. D. Dooling, «Smoother Sailing», *IEEE Spectrum*, August 1996, pp. 52-59.
60. K. C. Cheok, «A Smart Automatic Windshield Wiper», *IEEE Control Systems Magazine*, December 1996, pp. 28-34.
61. D. Dooling, «Transportation», *IEEE Spectrum*, January 1996, pp. 82-86.
62. G. Norris, «Boeing's Seventh Wonder», *IEEE Spectrum*, October 1995, pp. 20-23.
63. D. Hughes, «Fly-by-Wire 777 Keeps Traditional Cockpit», *Aviation Week & Space Technology*, McGraw-Hill Publication, May 1, 1995, pp. 42-48.
64. R. Reck, «Design Engineering», *Aerospace America*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, December 1994, p. 74.
65. C. Rist, «Angling for Momentum», *Discover*, September 1999, p. 37.
66. S. J. Elliott, «Down With Noise», *IEEE Spectrum*, June 1999, pp. 54-62.
67. W. Ailor, «Controlling Space Traffic», *AIAA Aerospace America*, November 1999, pp. 34-38.
68. J. W. Toigo, «Avoiding a Data Crunch», *Scientific American*, May 2000, pp. 58-74.
69. G. F. Hughes, «Wise Drives», *IEEE Spectrum*, August 2002, pp. 37-41.
70. R. H. Bishop, *The Mechatronics Handbook*, CRC Press, Inc., Boca Raton, Fla., 2002.
71. N. Kyura and H. Oho, «Mechatronics-An Industrial Perspective», *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 1, no. 1, 1996, pp. 10-15.
72. T. Mori, «Mecha-tronics», *Yasakawa Internal Trademark Application Memo* 21.131.01, July 12, 1969.
73. F. Harshama, M. Tomizuka, and T. Fukuda, «Mechatronics-What is it, Why, and How?-An Editorial», *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 1, no. 1, 1996, pp. 1-4.
74. D. M. Auslander and C. J. Kempf, *Mechatronics: Mechanical System Interfacing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1996.
75. D. Shetty and R. A. Kolk, *Mechatronic System Design*, PWS Publishing Company, Boston, Mass., 1997.
76. W. Bolton, *Mechatronics: Electrical Control Systems in Mechanical and Electrical Engineering*, 2nd ed., Addison Wesley Longman, Harlow, England, 1999.
77. D. Tomkinson and J. Horne, *Mechatronics Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1996.

78. B. Jorgensen, «Shifting Gears», Auto Electronics, *Electronic Business*, February 2001.
79. M. B. Barron and W. F. Powers, «The Role of Electronic Controls for Future Automotive Mechatronic Systems», *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 1, no. 1, 1996, pp. 80-88.
80. G. Kobe, «Electronics: What's Driving The Growth», *Automotive Industries*, August 2000.
81. H. Kobayashi, Guest Editorial, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 2, no. 4, 1997, pp. 217.
82. D. S. Bernstein, «What Makes Some Control Problems Hard?» *IEEE Control Systems Magazine*, August 2002, pp. 8-19.
83. S. Douglas, «No Pilot Required», *Popular Science*, June 2001, pp. 40-44.
84. O. Zerbinati, «A Direct Methanol Fuel Cell», *Journal of Chemical Education*, vol. 79, no. 7, July 2002, p. 829.

Capítulo 2

1. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 4th ed., John Wiley & Sons, New York, 1999.
2. I. Cochin, *Analysis and Design of Dynamic Systems*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1997.
3. J. W. Nilsson, *Electric Circuits*, 5th ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1996.
4. E. W. Kamen and B. S. Heck, *Fundamentals of Signals and Systems Using MATLAB*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1997.
5. F. Raven, *Automatic Control Engineering*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1994.
6. S. Y. Nof, *Handbook of Industrial Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1999.
7. R. R. Kadiyala, «A Toolbox for Approximate Linearization of Nonlinear Systems», *IEEE Control Systems*, April 1993, pp. 47-56.
8. R. Smith and R. Dorf, *Circuits, Devices and Systems*, 5th ed., John Wiley & Sons, New York, 1992.
9. Y. M. Pulyer, *Electromagnetic Devices for Motion Control*, Springer-Verlag, New York, 1992.
10. B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 5th ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996.
11. F. E. Udwadia, *Analytical Dynamics*, Cambridge Univ. Press, New York, 1996.
12. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
13. H. Saadat, *Computational Aids in Control Systems Using MATLAB*, McGraw-Hill, New York, 1993.
14. S. M. Ross, *Simulation*, 2nd ed., Academic Press, Orlando, Fla., 1996.
15. G. B. Gordon, «ORCA: Optimized Robot for Chemical Analysis», *Hewlett-Packard Journal*, June 1993, pp. 6-19.
16. P. E. Sarachik, *Principles of Linear Systems*, Cambridge Univ. Press, New York, 1997.
17. S. Bennett, «Nicholas Minorsky and the Automatic Steering of Ships», *IEEE Control Systems*, November 1984, pp. 10-15.
18. P. Gawthorp, *Metamodeling: Bond Graphs and Dynamic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996.
19. C. M. Close and D. K. Frederick, *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 2nd ed., Houghton Mifflin, Boston, 1995.
20. H. S. Black, «Stabilized Feed-Back Amplifiers», *Electrical Engineering*, 53, January 1934, pp. 114-120. Also in *Turning Points in American History*, J. E. Brittain, ed., IEEE Press, New York, 1977, pp. 359-361.
21. P. I. Corke, *Visual Control of Robots*, John Wiley & Sons, New York, 1997.
22. W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1997.
23. S. Pannu and H. Kazerooni, «Control for a Walking Robot», *IEEE Control Systems*, February 1996, pp. 20-25.
24. K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1997.
25. S. P. Parker, *Encyclopedia of Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1993.
26. M. Vidyasagar, *Nonlinear System Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1993.
27. G. T. Pope, «Living-Room Levitation», *Discover*, June 1993, p. 24.
28. D. J. Bak, «Fast Trains Face Off», *Design News*, September 20, 1993, pp. 78-85.
29. B. B. Muvdi, *Dynamics for Engineers*, Springer-Verlag, New York, 1997.
30. G. Rowell and D. Wormley, *System Dynamics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1997.
31. Y. Y. Tzou, «AC Induction Servo Drive for Motion Control», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, November 1996, pp. 614-25.
32. R. E. Ziemer, *Signals and Systems*, 4th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1998.
33. R. H. Bishop, *The Mechatronics Handbook*, CRC Press, Inc., Boca Raton, Fla., 2002.

Capítulo 3

1. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1997.
2. W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996.

3. H. Kajiwara et al., «LPV Techniques for Control of an Inverted Pendulum», *IEEE Control Systems*, February 1999, pp. 44-47.
4. R. C. Dorf, *Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
5. A. V. Oppenheim et al., *Signals and Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996.
6. J. L. Stein, «Modeling and State Estimator Design Issues for Model Based Monitoring Systems», *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 318-326.
7. I. Cochin, *Analysis and Design of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1997.
8. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1993.
9. Y. M. Pulyer, *Electromagnetic Devices for Motion Control*, Springer-Verlag, New York, 1992.
10. C. M. Close and D. K. Frederick, *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 2nd ed., Houghton Mifflin, Boston, 1995.
11. R. C. Durbeck, «Computer Output Printer Technologies», in *Electrical Engineering Handbook*, R. C. Dorf, Ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998, pp. 1958-1975.
12. B. Wie et al., «New Approach to Attitude/Momentum Control for the Space Station», *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 12, no. 5, 1989, pp. 714-722.
13. B. Etkin and L. D. Reid, *Dynamics of Flight*, John Wiley & Sons, New York, 1996.
14. J. J. Bertin, *Aerodynamics for Engineers*, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1998.
15. H. Ramirez, «Feedback Controlled Landing Maneuvers», *IEEE Transactions on Automatic Control*, April 1992, pp. 518-523.
16. C. A. Canudas De Wit, *Theory of Robot Control*, Springer-Verlag, New York, 1996.
17. R. R. Kadiyala, «A Toolbox for Approximate Lincarization of Nonlinear Systems», *IEEE Control Systems*, April 1993, pp. 47-56.
18. B. C. Crandall, *Nanotechnology*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1996.
19. E. Colle, «Localization of an Autonomous Vehicle with Beacons», *International Journal of Robotics and Automation* 8, no. 1, 1993, pp. 30-38.
20. W. Leventon, «Mountain Bike Suspension Allows Easy Adjustment», *Design News*, July 19, 1993, pp. 75-77.
21. A. Cavallo et al., *Using* MATLAB, SIMULINK, *and Control System Toolbox*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996.
22. M. Jamshidi, *Computer Aided Analysis and Design of Linear Control Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1992.
23. G. E. Carlson, *Signal and Linear System Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1998.
24. M. Fujita, «Synthesis of an Electromagnetic Suspension System», *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, IEEE Press, New York, 1992.
25. D. Cho, «Magnetic Levitation Systems», *IEEE Control Systems*, February 1993, pp. 42-48.
26. W. J. Palm, *Modeling, Analysis, Control of Dynamic Systems*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 2000.
27. H. Kazerooni, «Human Extenders», *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 281-290.
28. C. N. Dorny, *Understanding Dynamic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1993.
29. Chen, Chi-Tsing, *Linear System Theory and Design*, 3rd ed., Oxford Univ. Press, New York, 1998.
30. G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, and C. B. Moler, *Computer Methods for Mathematical Computations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1977.

Capítulo 4

1. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
2. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.
3. C. E. Rohrs, J. L. Melsa, and D. Schultz, *Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1993.
4. P. E. Sarachik, *Principles of Linear Systems*, Cambridge Univ. Press, New York, 1997.
5. B. K. Bose, *Power Electronics and Variable Frequency Drives*, IEEE Press, Piscataway, N. J., 1997.
6. J. C. Nelson, *Operational Amplifier Circuits*, Butterworth, New York, 1995.
7. *Motomatic Speed Control*, Electro-Craft Corp., Hopkins, Minn., 1999.
8. M. W. Spong et al., *Robot Control Dynamics, Motion Planning and Analysis*, IEEE Press, New York, 1993.
9. R. C. Dorf, *Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
10. D. J. Bak, «Dancer Arm Feedback Regulates Tension Control», *Design News*, April 6, 1987, pp. 132-133.
11. «The Smart Projector Demystified», *Science Digest*, May 1985, p. 76.
12. R. Meier, «Control of Blood Pressure During Anesthesia», *IEEE Control Systems*, December 1992, pp. 12-16.
13. L. Fortuna and G. Muscato, «A Roll Stabilization System for a Monohull Ship», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, January 1996, pp. 18-28.
14. C. N. Dorny, *Understanding Dynamic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1993.
15. D. W. Clarke, «Sensor, Actuator, and Loop Validation», *IEEE Control Systems*, August 1995, pp. 39-45.

16. S. P. Parker, *Encyclopedia of Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1993.
17. M. S. Markow, «An Automated Laser System for Eye Surgery», *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, December 1989, pp. 24-29.
18. M. Eslami, *Theory of Sensitivity in Dynamic Systems*, Springer-Verlag, New York, 1994.
19. Y. M. Pulyer, *Electromagnetic Devices for Motion Control*, Springer-Verlag, New York, 1992.
20. J. R. Layne, «Control for Cargo Ship Steering», *IEEE Control Systems*, December 1993, pp. 23-33.
21. S. Begley, «Greetings From Mars», *Newsweek*, July 14, 1997, pp. 23-29.
22. M. Carroll, «Assault on the Red Planet», *Popular Science*, January 1997, pp. 44-49.
23. C. S. Powell, «Lilliput in Space», *Discover*, March 1999, p. 38.

Capítulo 5

1. C. M. Close and D. K. Frederick, *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 2nd ed., Houghton Mifflin, Boston, 1993.
2. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.
3. B. K. Bose, *Power Electronics and Variable Frequency Drives*, IEEE Press, Piscataway, N. J., 1997.
4. P. R. Clement, «A Note on Third-Order Linear Systems», *IRE Transactions on Automatic Control*, June 1960, p. 151.
5. R. N. Clark, *Introduction to Automatic Control Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1962, pp. 115-124.
6. D. Graham and R. C. Lathrop, «The Synthesis of Optimum Response: Criteria and Standard Forms, Part 2», *Trans. of the AIEE* 72, November 1953, pp. 273-288.
7. T. L. Floyd and D. Buchla, *Basic Operational Amplifiers*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1999.
8. R. C. Dorf, *Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
9. L. B. Ryan, «Control of an Impact Printer Hammer», *ASME Journal of Dynamic Systems*, March 1990, pp. 69-75.
10. T. C. Hsia, «On the Simplification of Linear Systems», *IEEE Transactions on Automatic Control*, June 1972, pp. 372-374.
11. E. J. Davison, «A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems», *IEEE Transactions on Automatic Control*, January 1966, pp. 93-101.
12. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
13. A. G. Ulsoy, «Control of Machining Processes», ASME, Journal of Dynamic Systems, June 1993, pp. 301-310.
14. I. Cochin, *Analysis and Design of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1997.
15. W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1997.
16. W. J. Book, «Controlled Motion in an Elastic World», *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 252-260.
17. C. E. Rohrs, J. L. Melsa and D. Schultz, *Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1993.
18. S. Lee, «Intelligent Sensing and Control for Advanced Teleoperation», *IEEE Control Systems*, June 1993, pp. 19-28.
19. R. Rosen and L. J. Williams, «The Rebirth of the Supersonic Transport», *Technology Review*, March 1993, pp. 22-29.
20. T. J. Lueck, «Amtrack Unveils Its Bullet to Boston», *New York Times*, March 10, 1999, p. B2.
21. M. DiChristina, «Telescope Tune-Up», *Popular Science*, September 1999, pp. 66-68.
22. M. Hutton and M. Rabins, «Simplification of Higher-Order Mechanical Systems Using the Routh Approximation», *Journal of Dynamic Systems*, ASME, December 1975, pp. 383-392.
23. E. W. Kamen and B. S. Heck, *Fundamentals of Signals and Systems Using MATLAB*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1997.
24. M. DiChristina, «What's Next for Hubble?» *Popular Science*, March 1998, pp. 56-59.
25. B. Etkin and L. D. Reid, *Dynamics of Flight: Stability and Control*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York, 1996.

Capítulo 6

1. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
2. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.
3. W. J. Palm, *Modeling, Analysis and Control*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 2000.
4. W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1997.
5. F. B. Farquharson, «Aerodynamic Stability of Suspension Bridges, with Special Reference to the Tacoma Narrows Bridge», *Bulletin* 116, *Part I*, The Engineering Experiment Station, University of Washington, 1950.
6. A. Hurwitz, «On the Conditions under which an Equation Has Only Roots with Negative Real Parts», *Mathematische Annalen* 46, 1895, pp. 273-284. Also in *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*, Dover, New York, 1964, pp. 70-82.
7. E. J. Routh, *Dynamics of a System of Rigid Bodies*, Macmillan, New York, 1892.

8. G. G. Wang, «Design of Turning Control for a Tracked Vehicle», *IEEE Control Systems*, April 1990, pp. 122-125.
9. N. Mohan, *Power Electronics*, John Wiley & Sons, New York, 1995.
10. *World Robotics 2003-Statistics, Market Analysis, Forecasts, Case Studies, and Profitability of Robot Investment*, U. N. Economic Commission, ISBN no. 92-1-101059-4, 2003.
11. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
12. A. N. Michel, «Stability: The Common Thread in the Evolution of Control», *IEEE Control Systems*, June 1996, pp. 50-60.
13. S. P. Parker, *Encyclopedia of Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1933.
14. J. Levine et al., «Control of Magnetic Bearings», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, September 1996, pp. 524-544.
15. F. S. Ho, «Traffic Flow Modeling and Control», *IEEE Control Systems*, October 1996, pp. 16-24.
16. G. E. Young and K. N. Reid, «Control of Moving Webs», *Journal of Dynamics*, ASME, June 1993, pp. 309-316.
17. D. W. Freeman, «Jump-Jet Airliner», *Popular Mechanics*, June 1993, pp. 38-40.
18. B. Sweetman, «Venture Star-21st-Century Space Shuttle», *Popular Science*, October 1996, pp. 43-47.
19. S. Lee, «Intelligent Sensing and Control for Advanced Teleoperation», *IEEE Control Systems*, June 1993, pp. 19-28.
20. «Uplifting», *The Economist*, July 10, 1993, p. 79.
21. R. N. Clark, «The Routh-Hurwitz Stability Criterion, Revisited», *IEEE Control Systems*, June 1992, pp. 119-120.
22. S. G. Tzafestas, *Applied Control*, Marcel Dekker, New York, 1993, pp. 274-276.
23. P. Haase, «Breakthrough in Stability Assessment», *EPRI Journal*, August 1996, pp. 25-30.
24. E. I. Jury, «Remembering Force Stability Theory Pioneers of the Nineteenth Century», *IEEE Transactions on Automatic Control*, September 1996, pp. 1242-43.

Capítulo 7

1. W. R. Evans, «Graphical Analysis of Control Systems», *Transactions of the AIEE*, 67, 1948, pp. 547-551. Also in G. J. Thaler, ed., *Automatic Control*, Dowden, Hutchinson, and Ross, Stroudsburg, Pa., 1974, pp. 417-421.
2. W. R. Evans, «Control System Synthesis by Root Locus Method», *Transactions of the AIEE*, 69, 1950, pp. 1-4. Also in *Automatic Control*, G. J. Thaler, ed., Dowden, Hutchinson, and Ross, Stroudsburg, Pa., 1974, pp. 423-425.
3. W. R. Evans, *Control System Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1954.
4. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
5. J. G. Goldberg, *Automatic Controls*, Allyn and Bacon, Boston, 1965.
6. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
7. H. Ur, «Root Locus Properties and Sensitivity Relations in Control Systems», *I.R.E. Trans. on Automatic Control*, January 1960, pp. 57-65.
8. T. R. Kurfess and M. L. Nagurka, «Understanding the Root Locus Using Gain Plots», *IEEE Control Systems*, August 1991, pp. 37-40.
9. T. R. Kurfess and M. L. Nagurka, «Foundations of Classical Control Theory», *The Franklin Institute*, 330, no. 2, 1993, pp. 213-227.
10. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
11. D. K. Lindner, *Introduction to Signals and Systems*, McGraw Hill, New York, 1999.
12. S. Ashley, «Putting a Suspension through Its Paces», *Mechanical Engineering*, April 1993, pp. 56-57.
13. B. K. Bose, *Modern Power Electronics*, IEEE Press, New York, 1992.
14. P. Varaiya, «Smart Cars on Smart Roads», *IEEE Transactions on Automatic Control*, February 1993, pp. 195-207.
15. J. L. Jones and A. M. Flynn, *Mobile Robots*, A. K. Peters Publishing, New York, 1993.
16. B. Sweetman, «21st Century SST», *Popular Science*, April 1998, pp. 56-60.
17. L. V. Merritt, «Tape Transport Head Positioning Servo Using Positive Feedback», *Motion*, April 1993, pp. 19-22.
18. G. E. Young and K. N. Reid, «Control of Moving Webs», *Journal of Dynamic Systems* ASME, June 1993, pp. 309-316.
19. S. P. Parker, *Encyclopedia of Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1993.
20. A. J. Calise and R. T. Rysdyk, «Nonlinear Adaptive Flight Control Using Neural Networks», *IEEE Control Systems*, December 1998, pp. 14-23.
21. T. B. Sheridan, *Telerobotics, Automation and Control*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1992.
22. L. W. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, 5th ed., Macmillan, New York, 1997.
23. D. Hrovat, «Applications of Optimal Control to Automotive Suspension Design», *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 328-342.
24. T. J. Lueck, «Amtrak Unveils Its Bullet to Boston», *New York Times*, March 10, 1999.

25. M. van de Panne, «A Controller for the Dynamic Walk of a Biped», *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, IEEE, December 1992, pp. 2668-2673.
26. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.
27. S. Begley, «Mission to Mars», *Newsweek*, September 23, 1996, pp. 52-58.
28. G. Padfield, *Helicopter Flight Dynamics*, AIAA Press, New York, 1996.
29. H. Tennekes, *The Simple Science of Flight*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1996.
30. W. J. Cook, «The International Space Station Takes Shape», *US News and World Report*, December 7, 1998, pp. 56-59.
31. «Batwings and Dragonfies», *The Economist*, July 2002, pp. 66-67.

Capítulo 8

1. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
2. I. Cochin and H. J. Plass, *Analysis and Design of Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1997.
3. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.
4. H. W. Bode, «Relations Between Attenuation and Phase in Feedback Amplifier Design», *Bell System Tech. J.*, July 1940, pp. 421-454. Also in *Automatic Control: Classical Linear Theory*, G. J. Thaler, ed., Dowden, Hutchinson, and Ross, Stroudsburg, Pa., 1974, pp. 145-178.
5. M. D. Fagen, *A History of Engineering and Science in the Bell System*, Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, N.J., 1978, Chapter 3.
6. D. K. Lindner, *Introduction to Signals and Systems*, McGraw Hill, New York., 1999.
7. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
8. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
9. T. B. Sheridan, *Telerobotics, Automation and Control*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1992.
10. J. L. Jones and A. M. Flynn, *Mobile Robots*, A. K. Peters Publishing, New York, 1993.
11. D. McLean, *Automatic Flight Control Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1990.
12. G. Leitman, «Aircraft Control Under Conditions of Windshear», *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, December 1990, pp. 747-749.
13. S. Lee, «Intelligent Sensing and Control for Advanced Teleoperation», *IEEE Control Systems*, June 1993, pp. 19-28.
14. R. A. Hess, «A Control Theoretic Model of Driver Steering Behavior», *IEEE Control Systems*, August 1990, pp. 3-8.
15. J. Winters, «Personal Trains», *Discover*, July 1999, pp. 32-33.
16. J. Ackermann and W. Sienel, «Robust Yaw Damping of Cars with Front and Rear Wheel Steering», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, March 1993, pp. 15-20.
17. L. V. Merritt, «Differential Drive Film Transport», *Motion*, June 1993, pp. 12-21.
18. S. Ashley, «Putting a Suspension through Its Paces», *Mechanical Engineering*, April 1993, pp. 56-57.
19. D. A. Linkens, «Anaesthesia Simulators», *Computing and Control Engineering Journal*, IEEE, April 1993, pp. 55-62.
20. J. R. Layne, «Control for Cargo Ship Steering», *IEEE Control Systems*, December 1993, pp. 58-64.
21. A. Titli, «Three Control Approaches for the Design of Car Semi-active Suspension», *IEEE Proceedings of Conference on Decision and Control*, December 1993, pp. 2962-2963.
22. H. H. Ottesen, «Future Servo Technologies for Hard Disk Drives», *Journal of the Magnetics Society of Japan*, vol. 18, 1994, pp. 31-36.

Capítulo 9

1. H. Nyquist, «Regeneration Theory», *Bell Systems Tech. J.*, January 1932, pp. 126-147. Also in *Automatic Control: Classical Linear Theory*, G. J. Thaler, ed., Dowden, Hutchinson, and Ross, Stroudsburg, Pa., 1932, pp. 105-126.
2. M. D. Fagen, *A History of Engineering and Science in the Bell System*, Bell Telephone Laboratories, Inc., Murray Hill, N. J., 1978, Chapter 5.
3. H. M. James, N. B. Nichols, and R. S. Phillips, *Theory of Servomechanisms*, McGraw-Hill, New York, 1947.
4. W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996.
5. D. A. Linkens, *CAD for Control Systems*, Marcel Dekker, New York, 1993.
6. A. Cavallo, *Using MATLAB, SIMULINK, and Control System Toolbox*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996.
7. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
8. D. Sbarbaro-Hofer, «Control of a Steel Rolling Mill», *IEEE Control Systems*, June 1993, pp. 69-75.
9. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.

10. J. J. Gribble, «Systems with Time Delay», *IEEE Control Systems*, February 1993, pp. 54-55.
11. C. N. Dorny, *Understanding Dynamic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1993.
12. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.
13. J. Yan and S. E. Salcudean, «Teleoperation Controller Design», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, May 1996, pp. 244-247.
14. K. K. Chew, «Control of Errors in Disk Drive Systems», *IEEE Control Systems*, January 1990, pp. 16-19.
15. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
16. D. W. Freeman, «Jump-Jet Airliner», *Popular Mechanics*, June 1993, pp. 38-40.
17. F. D. Norvelle, *Electrohydraulic Control Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 2000.
18. B. K. Bose, *Power Electronics and Variable Frequency Drives*, IEEE Press, Piscataway, N. J., 1997.
19. C. S. Bonaventura and K. W. Lilly, «A Constrained Motion Algorithm for the Shuttle Remote Manipulator System», *IEEE Control Systems*, October 1995, pp. 6-16.
20. A. T. Bahill and L. Stark, «The Trajectories of Saccadic Eye Movements», *Scientific American*, January 1979, pp. 108-117.
21. T. L. Floyd and D. Buchla, *Basic Operational Amplifiers*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1999.
22. A. G. Ulsoy, «Control of Machining Processes», ASME, *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 301-310.
23. C. E. Rohrs, J. L. Melsa, and D. Schultz, *Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1993.
24. J. L. Jones and A. M. Flynn, *Mobile Robots*, A. K. Peters Publishing, New York, 1993.
25. D. A. Linkens, «Adaptive and Intelligent Control in Anesthesia», *IEEE Control Systems*, December 1992, pp. 6-10.
26. R. H. Bishop, «Adaptive Control of Space Station with Control Moment Gyros», *IEEE Control Systems*, October 1992, pp. 23-27.
27. J. B. Song, «Application of Adaptive Control to Arc Welding Processes», *Proceedings of the American Control Conference*, IEEE, June 1993, pp. 1751-1755.
28. X. G. Wang, «Estimation in Paper Machine Control», *IEEE Control Systems*, August 1993, pp. 34-43.
29. R. Patton, «Mag Lift», *Scientific American*, October 1993, pp. 108-109.
30. P. Ferreira, «Concerning the Nyquist Plots of Rational Functions of Nonzero Type», *IEEE Transaction on Education*, vol. 42, no. 3, 1999, pp. 228-229.

Capítulo 10

1. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
2. Z. Gajic and M. Lelic, *Modern Control System Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996.
3. K. S. Yeung, et al., «A Non-trial and Error Method for Lag-Lead Compensator Design», *IEEE Transactions on Education*, February 1998, pp. 76-80.
4. W. R. Wakeland, «Bode Compensator Design», *IEEE Transactions on Automatic Control*, October 1976, pp. 771-773.
5. J. R. Mitchell, «Comments on Bode Compensator Design», *IEEE Transactions on Automatic Control*, October 1977, pp. 869-870.
6. S. T. Van Voorhis, «Digital Control of Measurement Graphics», *Hewlett-Packard Journal*, January 1986, pp. 24-26.
7. R. H. Bishop, «Adaptive Control of Space Station with Control Moment Gyros», *IEEE Control Systems*, October 1992, pp. 23-27.
8. C. L. Phillips, «Analytical Bode Design of Controllers», *IEEE Transactions on Education*, February 1985, pp. 43-44.
9. R. C. Garcia and B. S. Heck, «Enhancing Classical Controls Education via Interactive Design», *IEEE Control Systems*, June 1999, pp. 77-82.
10. B. Sridhar, «Kalman Filters for Helicopter Flight», *IEEE Control Systems*, August 1993, pp. 26-33.
11. J. D. Powell, N. P. Fekete, and C.-F. Chang, «Observer-Based Air-Fuel Ratio Control», *IEEE Control Systems*, October 1998, p. 72.
12. T. B. Sheridan, *Telerobotics, Automation and Control*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1992.
13. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
14. R. L. Wells, «Control of a Flexible Robot Arm», *IEEE Control Systems*, January 1990, pp. 9-15.
15. H. Kazerooni, «Human Extenders», *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 281-290.
16. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
17. A. Berry, «On Board the Starship Private Enterprise», *The National Times*, June 1996, pp. 70-72.
18. K. Pfeiffer and R. Isermann, «Driver Simulation in Dynamical Engine Test Stands», *Proceedings of the American Control Conference*, IEEE, 1993, pp. 721-725.
19. H. Raza, «Control Design for Automated Highway Systems», *IEEE Control Systems*, December 1996, pp. 43-60.
20. A. G. Ulsoy, «Control of Machining Processes», ASME, *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 301-310.

21. B. K. Bose, *Modern Power Electronics*, IEEE Press, New York, 1992.
22. F. G. Martin, *The Art of Robotics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1999.
23. J. M. Weiss, «The TGV Comes to Texas», *Europe*, March 1993, pp. 18-20.
24. P. Schmidt, «A Parameter Optimization Approach to Controller Partioning for Flight Control», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, March 1993, pp. 21-36.
25. H. Kazerooni, «A Controller Design Framework for Telerobotic Systems», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, March 1993, pp. 50-62.
26. W. H. Zhu, «Industrial Manipulators», *IEEE Control Systems*, April 1999, pp. 24-28.
27. J. Ackermann, «Robust Yaw Damping of Cars with Front and Rear Wheel Steering», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, March 1993, pp. 15-20.
28. E. W. Kamen and B. S. Heck, *Fundamentals of Signals and Systems Using MATLAB*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1997.
29. C. T. Chen, *Analog and Digital Control Systems Design*, Oxford Univ. Press, New York, 1996.
30. M. J. Sidi, *Spacecraft Dynamics and Control*, Cambridge Univ. Press, New York, 1997.
31. A. Arenas et al., «Angular Velocity Control for a Windmill Radiometer», *IEEE Transactions on Education*, May 1999, pp. 147-152.
32. M. Berenguel, et al., «Temperature Control of a Solar Furnace», *IEEE Control Systems*, February 1999, pp. 8-19.
33. A. H. Moore, «The Shipping News: Fast Ferries», *Fortune*, December. 6, 1999, pp. 240-249.

Capítulo 11

1. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
2. G. Goodwin, S. Graebe, and M. Salgado, *Control System Design*, Prentice Hall, Saddle River, N.J., 2001.
3. A. E. Bryson, «Optimal Control», *IEEE Control Systems*, June 1996, pp. 26-33.
4. J. Farrell, «Using Learning Techniques to Accommodate Unanticipated Faults», *IEEE Control Systems*, June 1993, pp. 40-48.
5. M. Jamshidi, *Design of Intelligent Manufacturing Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1998.
6. M. Bodson, «High Performance Control of a Permanent Magnet Stepper Motor», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, March 1993, pp. 5-14.
7. G. W. Van der Linden, «Control of an Inverted Pendulum», *IEEE Control Systems*, August 1993, pp. 44-50.
8. Y. Ishii, «Joint Connection Mechanism for Reconfigurable Manipulator», *IEEE Control Systems*, August 1993, pp. 73-78.
9. W. J. Book, «Controlled Motion in an Elastic World», *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 252-260.
10. E. W. Kamen, *Introduction to Industrial Control*, Academic Press, San Diego, 1999.
11. M. Jamshidi, *Large-Scale Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1997.
12. W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996.
13. S. B. Niku, *Introduction to Robotics: Analysis, Systems, Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 2002.
14. J. B. Burl, *Linear Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1999.
15. D. Hrovat, «Applications of Optimal Control to Automotive Suspension Design», *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 328-342.
16. R. H. Bishop, «Adaptive Control of Space Station with Control Moment Gyros», *IEEE Control Systems*, October 1992, pp. 23-27.
17. R. C. Dorf, *Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
18. T. B. Sheridan, *Telerobotics, Automation and Control*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1992.
19. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
20. C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd ed., Oxford University Press, New York, 1999.
21. K. E. Drexler, *Nanosystems*, John Wiley & Sons, New York, 1993.
22. F. L. Chernousko, *State Estimation for Dynamic Systems*, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1993.
23. M. A. Gottschalk, «Dino-Adventure Duels Jurassic Park», *Design News*, August 16, 1993, pp. 52-58.
24. Y. Z. Tsypkin, «Robust Internal Model Control», *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 419-425.
25. J. D. Irwin, *The Industrial Electronics Handbook*, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1997.
26. J. K. Pieper, «Control of a Coupled-Drive Apparatus», *IEE Proceedings*, March 1993, pp. 70-79.
27. Rama K. Yedavalli, «Robust Control Design for Aerospace Applications», *IEEE Transactions of Aerospace and Electronic Systems*, vol. 25, no. 3, 1989, pp. 314-324.

28. Bryan L. Jones and Robert H. Bishop, «H_2 Optimal Halo Orbit Guidance», *Journal of Guidance, Control, and Dynamics, AIAA*, 16, no. 6, 1993, pp. 1118-1124.
29. D. G. Luenberger, «Observing the State of a Linear System», *IEEE Transactions on Military Electronics*, 1964, pp. 74-80.
30. G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 4th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 2002.
31. R. E. Kalman, «Mathematical description of linear dynamical systems», *SIAM J. Control*. vol. 1, 1963, pp. 152-192.
32. R. E. Kalman, «A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems», *Journal of Basic Engineering*, 1960, pp. 35-45.
33. R. E. Kalman and R. S. Bucy, «New Results in Linear Filtering and Prediction Theory», Transactions of the American Society of Mechanical Engineering, Series D, *Journal of Basic Engineering*, 1961, pp. 95-108.
34. B. Cipra, «Engineers Look to Kalman Filtering for Guidance», *SIAM News*, vol. 26, no. 5, August 1993.
35. R. H. Battin, «Theodore von Karman Lecture: Some Funny Things Happened on the Way to the Moon», 27th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, AIAA-89-0861, 1989.
36. R. G. Brown and P. Y. C. Hwang, *Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering with Matlab Exercises and Solutions*, John Wiley and Sons, Inc., 1996.
37. M. S. Grewal, and A. P. Andrews, *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB, 2nd ed.*, Wiley-Interscience, 2001.

Capítulo 12

1. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
2. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
3. R. S. Sanchez-Pena and M. Sznaier, *Robust Systems Theory and Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1998.
4. G. Zames, «Input-Output Feedback Stability and Robustness», *IEEE Control Systems*, June 1996, pp. 61-66.
5. K. Zhou and J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1998.
6. C. M. Close and D. K. Frederick, *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 2nd ed., Houghton Mifflin, Boston, 1993.
7. A. Charara, «Nonlinear Control of a Magnetic Levitation System», *IEEE Transactions on Control System Technology*, September 1996, pp. 513-523.
8. J. Yen, *Fuzzy Logic: Intelligence and Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1998.
9. X. G. Wang, «Estimation in Paper Machine Control», *IEEE Control Systems*, August 1993, pp. 34-43.
10. D. Sbarbaro-Hofer, «Control of a Steel Rolling Mill», *IEEE Control Systems*, June 1993, pp. 69-75.
11. N. Mohan, *Power Electronics*, John Wiley & Sons, New York, 1995.
12. J. M. Weiss, «The TGV Comes to Texas», *Europe*, March 1993, pp. 18-20.
13. S. Lee, «Intelligent Sensing and Control for Advanced Teleoperation», *IEEE Control Systems*, June 1993, pp. 19-28.
14. J. V. Wait and L. P. Huelsman, *Operational Amplifier Theory*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1992.
15. F. G. Martin, *The Art of Robotics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1999.
16. R. Shoureshi, «Intelligent Control Systems», *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 392-400.
17. A. Butar and R. Sales, «Control for MagLev Vehicles», *IEEE Control Systems*, August 1998, pp. 18-25.
18. L. W. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, 5th ed., Macmillan, New York, 1997.
19. H. Paraci and M. Jamshidi, *Design and Implementation of Intelligent Manufacturing Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1997.
20. C. T. Chen, *Analog and Digital Control System Design*, Harcourt Brace Jovanovich, Orlando, Fla., 1993.
21. B. Johnstone, «Japan's Friendly Robots», *Technology Review*, June 1999, pp. 66-69.
22. W. J. Grantham and T. L. Vincent, *Modern Control Systems Analysis and Design*, John Wiley & Sons, New York, 1993.
23. K. Capek, *Rossum's Universal Robots*, English edition by P. Selver and N. Playfair, Doubleday, Page, New York, 1923.
24. L. L. Cone, «Skycam: An Aerial Robotic Camera System», *Byte*, October 1985, pp. 122-128.
25. H. Kazerooni, «Human Extenders», *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 281-290.
26. C. Lapiska, «Flight Simulation», *Aerospace America*, August 1993, pp. 14-17.
27. D. E. Bossert, «A Root-Locus Analysis of Quantitative Feedback Theory», *Proceedings of the American Control Conference*, June 1993, pp. 1698-1705.
28. J. A. Gutierrez and M. Rabins, «A Computer Loop-shaping Algorithm for Controllers», *Proceedings of the American Control Conference*, June 1993, pp. 1711-1715.

29. J. W. Song, «Synthesis of Compensators in Linear Uncertain Plants», *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, December 1992, pp. 2882-2883.
30. M. Gottschalk, «Part Surgeon-Part Robot», *Design News*, June 7, 1993, pp. 68-75.
31. D. E. Whitney, «From Robots to Design», *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 262-270.
32. S. Jayasuriya, «Frequency Domain Design for Robust Performance Under Uncertainties», *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 439-450.
33. L. S. Shieh, «Control of Uncertain Systems», *IEE Proceedings*, March 1993, pp. 99-110.
34. M. van de Panne, «A Controller for the Dynamic Walk of a Biped», *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, IEEE, December 1992, pp. 2668-2673.
35. S. Bennett, «The Development of the PID Controller», *IEEE Control Systems*, December 1993, pp. 58-64.
36. J. C. Doyle, *Feedback Control Theory*, Macmillan, New York, 1992.

Capítulo 13

1. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
2. C. L. Phillips and H. T. Nagle, *Digital Control Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1995.
3. G. F. Franklin, et al., *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1998.
4. S. H. Zak, «Ripple-Free Deadbeat Control», *IEEE Control Systems*, August 1993, pp. 51-56.
5. C. Lapiska, «Flight Simulation», *Aerospace America*, August 1993, pp. 14-17.
6. F. G. Martin, *The Art of Robotics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1999.
7. D. Raviv and E.W. Djaja, «Discretized Controllers», *IEEE Control Systems*, June 1999, pp. 52-58.
8. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
9. T. M. Foley, «Engineering the Space Station», *Aerospace America*, October 1996, pp. 26-32.
10. A. G. Ulsoy, «Control of Machining Processes», ASME, *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 301-310.
11. K. J. Astrom, *Computer-Controlled Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1997.
12. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
13. L. W. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, 5th ed., Macmillan, New York, 1995.
14. M. van de Panne, «A Controller for the Dynamic Walk of a Biped», *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, IEEE, December 1992, pp. 2668-2673.
15. K. S. Yeung and H. M. Lai, «A Reformation of the Nyquist Criterion for Discrete Systems», *IEEE Transactions on Education*, February 1988, pp. 32-34.
16. M. Eslami, *Theory of Sensitivity in Dynamic Systems*, Springer-Verlag, New York, 1994.
17. T. R. Kurfess, «Predictive Control of a Robotic Grinding System», *Journal of Engineering for Industry*, ASME, November 1992, pp. 412-420.
18. T. Studt, «Why You Really Need a DSP», *R&D Magazine*, June 1993, pp. 32-34.
19. D. M. Auslander, *Mechatronics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996.
20. R. Shoureshi, «Intelligent Control Systems», *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 392-400.
21. D. J. Leo, «Control of a Flexible Frame in Slewing», *Proceedings of American Control Conference*, 1992, pp. 2535-2540.
22. M. Alpert, «A Bullet Train for the U.S.», *Fortune*, May 1993, p. 32.
23. J. L. Jones and A. M. Flynn, *Mobile Robots*, A. K. Peters Publishing, New York, 1993.
24. V. Skormin, «On-Line Diagnostics of a Self-Contained Flight Actuator», *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, January 1994, pp. 130-141.
25. H. H. Ottesen, «Future Servo Technologies for Hard Disk Drives», *J. of the Magnetics Society of Japan*, vol. 18, 1994, pp. 31-36.

Apéndice A

1. D. A. Biran and M. M. G. Breiner, *MATLAB 6 for Engineers*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 2002.
2. D. Hanselman and B. Littlefield, *Mastering MATLAB 6*, The MATLAB Curriculum Series, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 2001.
3. R. Pratap, *Getting Started with MATLAB*, Oxford University Press, New York, 2002.
4. *The Student Edition of MATLAB 6 User's Guide*, The Mathworks, Inc., Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1997.
5. A. Knight, *Basics of MATLAB and Beyond*, CRC Press, Inc., Boca Raton, Fla., 2000.

6. W. J. Palm III, *Introduction to MATLAB 6 for Engineers*, McGraw-Hill, Boston, 2001.
7. K. Sigmon and T. A. Davis, *MATLAB Primer 6e*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.
8. D. M. Etter, *Engineering Problem Solving with MATLAB*, 2nd. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1997.

Apéndice B

1. *Learning Simulink Version* 5.1, The Mathworks, Inc., Natick, Mass., 1999.
2. R. H. Bishop, *Modern Control Systems Analysis and Design Using MATLAB and Simulink*, Addison Wesley, Menlo Park, Calif., 1997.
3. J. Moscinski and Z. Ogonowski, *Advanced Control with with MATLAB and Simulink*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1995.

Índice

A

Acelerómetro, 63, 82
Actuador. Dispositivo que hace que el proceso proporcione la salida; el dispositivo que proporciona la potencia motriz al proceso, 57
Actuador electrohidráulico, 62, 65, 115
Actuador hidráulico, 62, 65, 115, 709
Amortiguador de Coulomb, 41
Amortiguador viscoso, 41
Amortiguadores, 41
Amortiguamiento crítico. Caso en que el amortiguamiento está en la frontera entre subamortiguado y sobreamortiguado, 50
Amplidina, 65, 112
Amplificador, realimentación, 196
Amplificador operacional, 635, 765
Análisis de estabilidad en el plano *z*, 800
Análisis de estado utilizando MATLAB, 170
Análisis de robustez, 728
Análisis por computador de sistemas de control, 78
Ancho de banda. Frecuencia a la que la respuesta en frecuencia ha caído 3 dB desde su valor en baja-frecuencia, 459, 525, 529
Ángulo de las asíntotas. Ángulo que la asíntota forma con respecto al eje real, ϕ_A, 362
Ángulo de partida. Ángulo en el que un lugar deja un polo complejo en el plano *s*, 369
Aparatos para el hogar, 22
Aproximación de Padé de un retardo de tiempo, 538, 545, 817
Aproximación en tiempo discreto. Aproximación utilizada para obtener la respuesta temporal de un sistema basado en la división del tiempo en pequeños incrementos Δt, 158
Aproximación lineal. Modelo aproximado que resulta en una relación lineal entre la salida y la entrada del dispositivo, 45
Aproximación lineal de sistemas físicos, 43
Aproximaciones asintóticas de un diagrama de Bode, 440
Asignación de polos. Metodología de diseño en la que el objetivo es situar los autovalores del sistema en lazo cerrado en regiones deseadas del plano complejo, 660
Asíntota. Camino que el lugar de las raíces sigue cuando el parámetro se hace muy grande y tiende a infinito, 362
del lugar de las raíces, 362
Automatización. Control de un proceso industrial por medios automáticos, 8
Automóviles, vehículos de fuel híbrido, 21
Autopiloto de un avión, 745
Avión de despegue vertical (VTOL), 347, 563, 720
Avión y diseño asistido por computador, 23
no tripulado, 16

B

Back, H. S., 7, 116
Bellman, R., 6
Bloque Scope, Simulink, 852
Bobinadora, 748
Bode, H. W., 439

C

Camino sobre el grafo de flujo de señal, 73
Capek, Karel, 16
Carta de Nichols. Carta que visualiza las curvas para las relación entre la respuesta en frecuencia en lazo abierto y en lazo cerrado, 525, 542
Centroide de la asíntota. Centro de las asíntotas lineales, σ_A, 363
Ceros. Raíces del polinomio del numerador de la función de transferencia, 48
Circuito diferenciador, 64
Círculos, constante, 525
Círculos *M*, 525
Círculos *M* constante, 525
Círculos *N*, 525
Círculos *N* constante, 525
Coeficientes óptimos de $T(s)$ para ITAE, 272, 276
Comisión de Comercio Interestatal, 14
Compensación. Alteración o ajuste de un sistema de control para proporcionar un comportamiento apropiado, 582
utilizando métodos analíticos, 613
utilizando realimentación con variables de estado, 660
utilizando redes de integración, 601
utilizando una red de adelanto de fase en el diagrama de Bode, 589
utilizando una red de adelanto de fase en el plano *s*, 595
utilizando una red de retardo de fase en el diagrama de Bode, 604
utilizando una red de retardo de fase en el plano *s*, 604
Compensador. Componente o circuito adicional que se inserta en el sistema para igualar o compensar la deficiencia de comportamiento, 583

Compensador de adelanto de fase. Compensador ampliamente utilizado que posee un cero y un polo con el cero más cercano al origen en el plano s. Este compensador aumenta el ancho de banda del sistema y mejora la dinámica del proceso, 587
Compensador de retardo de fase. Compensador ampliamente utilizado que posee un cero y un polo con el polo más cercano al origen en el plano s. Este compensador reduce los errores de seguimiento en estado estacionario, 588
Complejidad. Medida de la estructura, dificultad o conducta de un sistema que caracteriza las relaciones e interacciones entre varios componentes, 208
Complejidad de diseño. Estructura complicada de partes entremezcladas y conocimiento requerido, 18
en coste de realimentación, 208
Componentes. Partes, subsistemas o subconjuntos que constituyen un sistema total, 208,
en coste de realimentación, 208
Comportamiento de un sistema, utilizando MATLAB y Simulink, 282
Comportamiento de un sistema de control, 243
Compromiso. Necesidad de hacer un juicio acerca de cuanto compromiso se hace entre criterios que están en conflicto, 19
Computador digital como compensador. Sistema que utiliza un computador digital como el elemento compensador, 804
Condición necesaria. Condición o sentencia que debe satisfacerse para lograr un efecto o resultado deseado. Por ejemplo, para un sistema lineal es necesario que la entrada $u_1(t) + u_2(t)$ resulte en la respuesta $y_1(t) + y_2(t)$, donde $u_1(t)$ produce la respuesta $y_1(t)$ y la entrada $u_2(t)$ produce la respuesta $y_2(t)$, 43
Conexión serie, 95
Congreso, 14
Constante de error de aceleración, K_a. Constante evaluada como $\lim_{s\to 0}[s^2G(s)]$. El error en estado estacionario para una entrada parabólica, $r(t) = At^2/2$, es igual a A/K_a, 263
Constante de error de posición, K_p. Constante evaluada como $\lim_{s\to 0} G(s)$. El error en estado estacionario para una entrada en escalón (de magnitud A) es igual a $A/(1 + K_p)$, 262
Constante de error de velocidad. Constante evaluada como K_v. El error en estado estacionario para una entrada de rampa para un sistema de tipo uno es igual a A/K_v, 262
Constante de tiempo. Intervalo de tiempo necesario para que un sistema cambie de un estado a otro en un porcentaje especificado. Para un sistema de primer orden, la constante de tiempo es el tiempo que tarda la salida para manifestar un cambio del 63.2% debido a un escalón en la entrada, 53
Constantes de error, aceleración, 262
escalón, 261
rampa, 262
Contorno de Nyquist, 505
Contornos de raíces. Familia del lugar que representa el efecto de variar dos parámetros sobre las raíces de la ecuación característica, 382
Contornos en el plano s, 499
Control de balanceo de un avión utilizando Simulink, 286
Control de cámara, 272
Control de giro de un vehículo en un circuito con vías, 329, 333
Control de helicóptero, 412, 420
Control de movimiento de una mesa de trabajo, 806
Control de nivel de agua, 5, 11, 123, 228
Control de soldadura, 322, 380
Control de un aeroplano, 232, 414, 421, 652
Control de una máquina taladradora, 753
Control de velocidad de una mesa giratoria, 24
Control PID robusto, 740
Control robusto. Sistema que muestra el comportamiento deseado en presencia de incertidumbre significativa en la planta, 724
utilizando MATLAB, 759
Controlabilidad, 660
Controlador de proceso. *Véase* PID
Controlador de tres términos. *Véase* controlador PID.
Controlador estabilizante. Controlador que estabiliza el sistema en lazo cerrado, 677
Controlador PID. Controlador ampliamente utilizado en la industria de la forma $G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$, donde K_p es la ganancia proporcional, K_I es la ganancia integral y K_D es la ganancia derivativa, 391, 738, 813
en el dominio de la frecuencia, 537
Controlador proporcional + derivativo (PD). Controlador de dos términos de la forma $G_c(s) = K_p + K_D s$, donde K_p es la ganancia proporcional y K_D la ganancia derivativa, 391
Controlador proporcional + integral (PI). Controlador de dos términos de la forma $G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$, donde K_p es la ganancia proporcional y K_I la ganancia integral, 391
Controladores de tiro, 7
Controladores digitales, implementación de, 812
Controles del reactor nuclear, 30, 183
Conversor analógico-digital, 791
Conversor digital-analógico, 791
Coste de realimentación, 208
Creación de modelo, Simulink, 850, 851
Cremallera y piñón, 63, 66
Criterio de estabilidad de Nyquist. Un sistema de control con realimentación es estable si, y sólo si, el contorno en el plano $G(s)$ no rodea al punto $(-1, 0)$ cuando el número de polos de $G(s)$ en el lado derecho del plano s es cero, 504, 505, 516
Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz, 316
Criterio de estabilidad robusta. Prueba de robustez con respecto a perturbaciones multiplicativas en la cual se garantiza estabilidad si $|M(j\omega)| < \left|1 + \frac{1}{G(j\omega)}\right|$, para toda ω donde $M(s)$ es la perturbación multiplicativa, 729
Criterio de Nyquist. Un sistema de control con realimentación es estable si, y sólo si, para el contorno en el plano $G(s)$ el número de rodeos en el sentido contrario al de las agujas de un reloj del punto $(-1, 0)$ es igual al número de polos de $G(s)$ con parte real positiva, 504, 505, 516
Criterio de Routh-Hurwitz. Criterio para determinar la estabilidad de un sistema examinando la ecuación característica de la función de transferencia, 316, 317
Cuerpos regulatorios, 14

D

Dato muestreado. Dato obtenido para las variables del sistema sólo en intervalos discretos. Datos obtenidos una vez en cada periodo de muestreo, 790
Década. Factor de diez en frecuencia (por ejemplo, el rango de frecuencias desde 1 rad/s hasta 10 rad/s es una década), 415
de frecuencias, 441
Decibelio (dB). Unidades de la ganancia logarítmica, 439
Descomposición en el espacio de estados de Kalman. Partición del espacio de estado que pone de manifiesto los estados que son controlables y no observables, no controlables y no observables, controlables y observables y no controlables y observables, 661
Desplazamiento del eje, 325
Detectable. Sistema en el cual los estados que no son observables son naturalmente estables, 664
Diagrama de bloque. Bloque unidireccional, operacional que representa las funciones de transferencias de los elementos del sistema, 63, 67
Diagrama de Bode. Logaritmo de la magnitud de la función de transferencia se representa respecto al logaritmo de ω, la frecuencia. La fase, ϕ, de la función de transferencia se representa separadamente respecto al logaritmo de la frecuencia, 439
aproximación asintótica 440
función de transferencia, 452
utilizando MATLAB, 465
Diagrama logarítmico, 439. *Véase* también diagrama de Bode
Diagrama log-magnitud-fase, 461
Diagrama polar. Diagrama de la parte real de $G(j\omega)$ frente a la parte imaginaria de $G(j\omega)$, 436, 437
Dinámica de sistemas físicos, 37
Diseño. Proceso de concebir o inventar las formas, partes y detalles de un sistema para lograr un objetivo razonado, 18
Diseño asistido por computador, 23
Diseño con modelo interno. Método de seguimiento de entradas de referencia con errores en estados estacionarios garantizados, 683, 693, 751
Diseño de ingeniería. Proceso de diseñar un sistema técnico, 18, 23
Diseño de parámetro. Método de selección de uno o dos parámetros utilizando el método del lugar de las raíces, 378
Diseño de sistemas con variables de estado utilizando MATLAB, 699
Diseño de un sistema de control. Disposición o plan de la estructura del sistema y selección de los componentes apropiados y parámetros, 23, 581
control de robot, 396
en el dominio del tiempo, 660
utilización de realimentación del estado, 659
utilización de redes de integración, 601
utilización de una red de adelanto de fase en el diagrama de Bode, 589
utilización de una red de adelanto de fase en el plano s, 595
utilización de una red de retardo de fase en el diagrama de Bode, 608
utilización de una red de retardo de fase en el plano s, 595
Diseño del compensador, realimentación de estado completo y observador, 675
Diseño del observador, 671
Dispensador de fluido automático, 182
Dominio temporal. Dominio matemático que incorpora la respuesta en el tiempo y la descripción de un sistema en términos del tiempo t, 131

E

Ecuación característica. Relación formada al igualar a cero el denominador de una función de transferencia, 48, 326

Ecuación de salida. Ecuación algebraica que relaciona el vector de estado, **x**, y las entradas, **u**, a las salidas, **y**, a través de la relación **y** = **Cx** + **Du**, 135
Ecuación diferencial de estado. Ecuación diferencial para el vector de estado: **x**′ = **Ax** + **Bu**, 134, 135
Ecuaciones diferenciales. Ecuación que incluye las diferenciales de una función, 38, 40
Ejemplo de diseño secuencial, 27, 102, 173, 219, 291, 330, 404, 471, 547, 633, 707, 762, 818
Ejemplos de sistemas de control, 9
Energía eólica, 22
Enfermedad epidémica, modelo de, 150, 161, 328
Entrada de aceleración, error en estado estacionario, 262
Entrada de referencia. Entrada a un sistema de control con frecuencia representa la salida deseada, denotada por $R(s)$, 96
Entrada de velocidad, 262
Entrada en escalón, coeficientes óptimos de $T(s)$, 272
ecuación de señal de prueba, 245
error en estado estacionario, 261
Entrada en rampa, coeficientes óptimos de $T(s)$, 276
ecuación de la señal de prueba, 245
error en estado estacionario, 262
Error, estado estacionario, 206
Error de cuantificación en amplitud, 792
Error de estimación. Diferencia entre el estado real y el estado estimado $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, 672
Error en estado estacionario. Error cuando el periodo de muestreo es grande y la respuesta transitoria ha decaído, quedando la respuesta continua, 206, 260
de sistemas con realimentación unitaria, 265
Escala autoequilibrada, 374
Especificaciones. Sentencias que explícitamente dicen lo que el dispositivo o producto tiene que ser o hacer; conjunto de criterios de comportamiento prescrito, 18, 244
Especificaciones de comportamiento en el dominio de la frecuencia, 458, 595
Especificaciones de diseño, 244
Especificaciones en el dominio del tiempo, 282
Estabilidad. Medida del comportamiento del sistema. Un sistema es estable si todos los polos de la función de transferencia tienen partes reales negativas, 312
de sistemas en variables de estado, 325, 326
de sistemas lineales con realimentación, 325, 326
en el dominio de la frecuencia, 497
para planta inestable, 337
utilizando el criterio de Nyquist, 504
utilizando el criterio de Routh-Hurwitz, 316
Estabilidad absoluta. Descripción del sistema que revela si un sistema es estable o no sin consideración de otros atributos tales como el grado de estabilidad, 312
Estabilidad de Routh-Hurwitz, 331
Estabilidad del sistema utilizando MATLAB, 331, 538
Estabilidad relativa. Propiedad que se mide con la parte real relativa de cada raíz o par de raíces de la ecuación característica, 324
por el criterio de Nyquist, 516
por el criterio de Routh-Hurwitz, 324
Estabilizable. Sistema en el que los estados que no son controlables son naturalmente estables, 661
Estabilización de un barco, 229, 641
Estación espacial, 185, 409
Estado de equilibrio, 150
Estado de un sistema. Conjunto de números tales que el conocimiento de estos números y la función de entrada, con las ecuaciones que describen las dinámicas, proporcionarán el estado futuro del sistema, 131
Estado estacionario. Valor que la salida alcanza después de que todos los constituyentes del transitorio de la respuesta han decaído. También conocido como valor final, 50
de respuesta de $y(t)$, 50
Evaluación gráfica de residuos de $F(s)$, 49
Evans, W. R., 355
Evolución futura de los sistemas de control, 17
Experimentos numéricos, 79
Extensor, 122, 185, 646

F

Fase mínima. Todos los ceros de una función de transferencia están en el lado izquierdo del plano s, 450, 452
Fase no mínima. Funciones de transferencia con ceros en el semiplano derecho del plano s, 450
Fidelidad baja, simulaciones, 79
Filtro de integración, 64
Filtro paso-baja, 86
Forma canónica. Forma básica o fundamental de la representación en modelo de estado, que incluye la forma canónica en variables de fase, la forma canónica de entrada anticipativa, la forma canónica diagonal y la forma canónica de Jordan, 138
Forma canónica con entrada de prealimentación. Forma canónica descrita por n lazos de realimentación que contiene los coeficientes a_n del polinomio del denominador de orden n-ésimo de la función de transferencia y de los lazos feedforward obtenidos por prealimentación de la señal de entrada, 144
Forma canónica de Jordan. Bloque en forma canónica diagonal para sistemas que no poseen polos distintos del sistema, 149
Forma canónica diagonal. Forma canónica desacoplada que muestra los n polos distintos del sistema en la diagonal de la matriz **A** de la representación en variable de estado, 149
Forma canónica en variables de fase. Forma canónica descrita por n lazos de realimentación compuesta de los a_n coeficientes del polinomio denominador de orden n-ésimo de la función de transferencia y de los m lazos en adelanto compuestos de los b_m coeficientes del polinomio numerador de orden m-ésimo de la función de transferencia, 142
Formato de variable de estado desacoplada, 148
Fórmula de Ackermann, 670
Fórmula de ganancia de flujo de señal de Mason, 271, 281
Frecuencia de resonancia. Frecuencia, ω_r, a la cual se logra el máximo valor de la respuesta en frecuencia del par de polos complejos conjugados, 445, 458
Frecuencia de ruptura. Frecuencia en la que la aproximación asintótica de la respuesta en frecuencia de un polo (o cero) cambia de pendiente, 440, 444
Frecuencia esquina. *Véase* frecuencia de ruptura
Frecuencia natural. Frecuencia de oscilación natural que ocurre para dos polos complejos cuando el amortiguamiento es igual a cero, 50
Fuente Sine Wave, Simulink, 856
Función conv, 91
Función de realimentación, 97, 98
Función de sensibilidad. Función $S(s) = [1 + G_c(s)G(s)]^{-1}$ que satisface la relación $S(s) + T(s) = 1$, donde $T(s)$ es la función de sensibilidad complementaria, 728
Función de sensibilidad complementaria. Función $T(s) = \dfrac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$ que satisface la relación $S(s) + T(s) = 1$, donde $S(s)$ es la función de sensibilidad. La función $T(s)$ es la función de transferencia en lazo cerrado, 729
Función de transferencia. Razón de la transformada de Laplace de la variable de salida a la transformada de Laplace de la variable de entrada, 52
de elementos dinámicos y redes, 64
de sistema complejo, 78
de sistema de lazo múltiple, 77
de sistemas con interacción, 75
de sistemas lineales, 52
de un actuador hidráulico, 62
de un motor de cc, 58
en programa de MATLAB, 93
fase mínima y fase no mínima, 450
tabla de elementos dinámicos y redes, 64-67
Función de transferencia en el dominio de la frecuencia. Relación entre la salida y la señal de entrada donde la entrada es una sinusoide expresada como $G(j\omega)$, 437
Función de transferencia en lazo-cerrado. Razón de la señal de salida a la señal de entrada para una interconexión de sistemas cuando todos los lazos de realimentación o prealimentación han sido cerrados o tomados en cuenta. Generalmente obtenida por reducción del diagrama de bloque o grafo de flujo de señal, 70, 96
Función lsim, 172
Función margin, 540
Función matricial exponencial. Función matricial importante definida como $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + (\mathbf{A}t)^2/2! + \cdots + (\mathbf{A}t)^k/k! + \cdots$, que juega un papel en la solución de las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, 136
Función matricial exponencial, 136
Función ngrid, 542
Función nichols, 542
Función nyquist, 539
Función pade, 542
Función parallel, 96
Función poly, 91
Función polyval, 92
Función pzmap, 93
Función roots, 91
Función series, 95
Fundamentos de MATLAB, 831
características de los sistemas de control, 214
diagrama de Bode 465
diagramas, 840
funciones, 846-847
funciones matemáticas, 833
gráficas, 839
programas, 842
símbolos, 845
simulación de sistemas, 89
y comportamiento del sistema, 282
y variables de estado, 170

G

Giróscopo, 184-185
Gráficas en MATLAB, 839
Gráficas utilizando MATLAB, 840
Grafo de flujo. *Véase* grafo de flujo de señal
Grafo de flujo de señal. Diagrama que consiste en nodos conectados por algunas ramas dirigidas y que es una representación gráfica de un conjunto de relaciones lineales, 72
Grafo de flujo de señal alternativo y modelos de diagramas de bloques, 147

H

Hipótesis. Sentencias que reflejan situaciones y condiciones que se dan por supuesto sin demostración. En sistemas de control, las hipótesis se emplean a menudo para simplificar los modelos dinámicos físicos de los sistemas en consideración para hacer el problema de diseño del control más tratable, 38
Historia del control automático, 4
Homogeneidad. Propiedad de un sistema lineal por la cual la respuesta del sistema, $y(t)$, a una entrada $u(t)$ conduce a la respuesta $\beta y(t)$ cuando la entrada es $\beta u(t)$, 43

I

Impresora con transmisión por correa, 163
Impulso unitario. Entrada de prueba que consiste en un impulso de amplitud infinita y anchura cero, y tiene un área igual a la unidad; se utiliza para determinar la respuesta impulsional, 245
Índice de comportamiento, 267, 685
Índice de comportamiento. Medida cuantitativa del comportamiento de un sistema, 267, 685
Industria de energía eléctrica, 13
Industria metalúrgica, 14
Inestabilidad. Atributo de un sistema que describe una tendencia del mismo para separarse de la condición de equilibrio cuando se desplaza inicialmente, 209
  en coste de realimentación, 209
Ingeniería asistida por computador (CAE), 20
Ingeniería de control, 2, 8
Integración rectangular hacia delante. Método computacional para aproximar la integración de una función dada por $x(kT) \simeq \simeq x((k-1)T) + T\dot{x}((k-1)T)$, donde $t = kT$, T es el periodo de muestreo y $k = 1, 2, \ldots$, 813
Integral de convolución, 246
Integral de la magnitud absoluta del error, 268
Integral del cuadrado del error, 267
Integral del tiempo multiplicado por el cuadrado del error, 269
Integral del tiempo multiplicado por el error absoluto, 269
  coeficientes óptimos de $T(s)$, 272, 276
ISE, 267, 270
ITAE, 269 Coeficintes óptimos de $T(s)$, 272, 276
ITSE, 269

J

Junta de la Reserva Federal, 14

L

Lanzadera especial, 486, 565, 821
Lazo de fase sincronizada (detector), 346
Lazo en un grafo de flujo de señal, 73
Levitación magnética, 117, 648, 773
Ley de control de realimentación de estado completo. Ley de control de la forma $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx}$ donde x es el estado del sistema que se supone conocido en todo instante de tiempo, 660
Leyes de voltaje de Kirchhoff, 41, 53
Linealizado. Hecho lineal, o colocado en una forma lineal; se suelen emplear normalmente aproximaciones en serie de Taylor para obtener modelos lineales de sistemas físicos, 38
Lugar. Camino o trayectoria que se traza cuando se cambia un parámetro, 355
Lugar de las raíces. Lugar o camino de las raíces trazado sobre el plano s cuando se varía un parámetro, 356
Lugar de las raíces en el plano z, 809
  ángulo de partida, 369
  asíntota, 362
  concepto, 355
  de sistemas de control digital, 808
  en el plano-z, 809
  pasos en la representación, 371
  punto de ruptura, 365
  utilizando MATLAB, 398 y sensibilidad, 383

M

Magnitud logarítmica. El logaritmo de la magnitud de la función de transferencia $20\log_{10}|G|$, 439
Manipuladores remotos, 185, 643
Mano artificial, 15
Mano robótica, 15
Mapa de polos-ceros, 93
Máquina de estampación, 461, 468
Margen de fase. Ángulo de fase a través del cual el lugar de $GH(j\omega)$ se debe rotar para que el punto de magnitud unidad pase por el punto $(-1, 0)$ en el plano $GH(j\omega)$, 518, 540
Margen, ganancia, 517
  fase, 518
Margen de ganancia. 540
  Recíproco de la ganancia $|GH|$ en la frecuencia a la cual el ángulo de fase alcanza 180°, 517
Marginalmente estable. Un sistema es marginalmente estable si y sólo si la respuesta a entrada cero permanece acotado cuando $t \to \infty$, 315
Mason, 72
Matrices para MATLAB, 836
Matriz de controlabilidad. Un sistema lineal es (completamente) controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad $\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A^2B} \ldots \mathbf{A^nB}]$ tiene rango completo, donde $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$ para sistemas lineales de una entrada una salida, el sistema es controlable si y sólo si el determinante de la matriz de controlabilidad $n \times n$, $\mathbf{P}_c$ es distinto de cero, 661
Matriz de observabilidad. Un sistema lineal es (completamente) observable si y sólo si la matriz de observabilidad $\mathbf{P}_o = [\mathbf{C}^T(\mathbf{CA})^T(\mathbf{CA}^2)^T \ldots (\mathbf{CA}^n)^T]^T$ tiene rango completo, donde $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$. Para sistema lineales con una única entrada y una única salida, el sistema es observable si y sólo si el determinante de la matriz de observabilidad $\mathbf{P}_o$ es distinto de cero, 663-664
Matriz de transición, $\Phi(t)$. Función exponencial matricial que describe la respuesta no forzada del sistema, 154, 170
  evaluación por el método del grafo de flujo de señal, 155
Matriz de transición de estado, $\phi(t)$. Función exponencial matricial que describe la respuesta no forzada del sistema, 136
Matriz fundamental, 136. *Véase* también Matriz de transición
Maxwell, J. C., 5, 316
Medida logarítmica (decibelio). Medida del margen de ganancia definida como $20\log_{10}(1/d)$, donde $\frac{1}{d} = \frac{1}{|GH(j\omega)|}$ cuando el desfase es $-180°$, 517
Método de Euler. Método de integración explícito utilizado para obtener soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales, 159
Método del lugar de las raíces. Método para determinar el lugar de las raíces de la ecuación característica $1 + KP(s)$ cuando K varía de 0 a infinito, 359
  parámetro de diseño, 378
Microcomputador. Pequeño computador personal (PC) basado en un microprocesador, 788
Minicomputador. Computador de tamaño y prestaciones entre un microcomputador y un gran computador. El término no se utiliza normalmente hoy día y los computadores de esta clase se conocen ahora como servidores de rango medio, 788
Minorsky, N., 106
Modelo de realimentación política, 15
Modelo de realimentación social, 15
Modelo de un motor cc, 57
  actuador hidráulico, 62, 65
  enfermedad epidémica, 150, 328
  péndulo invertido y carro, 151, 668, 715
Modelos de diagrama de bloque, 95
  grafos de flujo de señal, 137
  grafos de flujo de señal alternativos, 147
Modelos de variable de estado, 130
Modelos matemáticos. Descripciones de la conducta de un sistema utilizando matemáticas, 38
Modelos matemáticos de sistemas, 37, 38
Motor, cc, 57
Motor cc. Actuador eléctrico que utiliza un voltaje eléctrico como variable de control, 57
  controlado por inducido, 60, 77
  controlado por campo, 58
Motor controlado por inducido, 77
Motor de tracción eléctrico, 79, 101

N

Nave espacial, 126, 180
Navegador de la librería, Simulink, 849
Nodos de grafo de flujo de señal, 73
Nomenclatura, 39-40
Número de lugares separados. Igual al número de polos de la función de transferencia suponiendo que el número de polos es mayor que el número de ceros de la función de transferencia, 362
Número de tipo. Número N de polos de la función de transferencia, $G(s)$, en el origen. $G(s)$ es la función de transferencia de trayectoria directa, 261
Nyquist, H., 498

O

Observabilidad, 663
Observador. Sistema dinámico utilizado para estimar el estado de otro sistema dinámico dado un conocimiento sobre las entradas al sistema y las salidas medidas del sistema, 660
Octava de frecuencias, 441
Operaciones de arrays en MATLAB, 838
Operador diferencial, 46
Operador integral, 46
Operadores, diferenciales e integrales, 46
Optimización. Ajuste de los parámetros para conseguir el diseño más favorable o ventajoso, 683
Oscilación amortiguada. Oscilación en la cual la amplitud decrece con el tiempo, 52
Oscilador del péndulo, 45

P

Parámetros a optimizar, 19
Parámetros inciertos, 731
Pareja de transformada de Fourier. Par de funciones, una en el dominio del tiempo denotada por $f(t)$, y la otra en el dominio de la frecuencia, denotada por $F(j\omega)$, relacionadas por la transformada de Fourier $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, donde $\mathcal{F}$ denota la transformada de Fourier, 434
Pareja de transformada de Laplace. Par de funciones, una en el dominio del tiempo denotada por $f(t)$, y la otra en el dominio de la frecuencia,

denotada por $F(s)$, relacionadas por la transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, donde $\mathcal{L}$ denota la transformada de Laplace, 47, 434
Parkinson, D. B., 7
Péndulo invertido, 151, 668, 715
Pérdida de ganancia. Reducción en la amplitud de la razón de la señal de salida a la señal de entrada de un sistema, normalmente medida en decibelios, 208
en coste de realimentación, 208
Perfil hidrodinámico del ferry Avemar, 641
Periodo de muestreo. Periodo en el que todos los números dejan o entran en el computador. Periodo para el que la variable muestreada se mantiene constante, 790
Perturbación aditiva. Modelo de perturbación del sistema expresado en la firma aditiva $G_a(s) = G(s) + A(s)$, donde $G(s)$ es la planta nominal, $A(s)$ es la perturbación que está acotada en magnitud y $G_a(s)$ es la familia de plantas perturbadas, 729
Perturbación multiplicativa. Modelo de perturbación del sistema expresado en la forma multiplicativa $G_m(s) = G(s)[1 + M(s)]$, donde $G(s)$ es la planta nominal, $M(s)$ es la perturbación que está acotada en magnitud y $G_m(s)$ es la familia de plantas perturbadas, 729
Plano s. Plano complejo, donde dado el número complejo $s = \sigma + j\omega$, el eje x (o eje horizontal) es el eje σ y el eje y (o eje vertical) es el eje $j\omega$, 48
Planta, 2
Plantas de potencia, 13
Polinomio auxiliar. Ecuación que precede inmediatamente a la entrada de la fila cero en el array de Routh, 320
Polos. Raíces del polinomio del denominador (es decir las raíces de la ecuación característica) de la función de transferencia, 48
Polzunov I., 4
Pontryagin L. S., 6
Porcentaje de sobreelongación, 249
para un sistema de segundo orden, 251
Potenciómetro, 66
Precisión. Grado de exactitud o discriminación con el que se determina una cantidad, 792
Prefiltro. Función de transferencia, $G_p(s)$, que filtra la señal de entrada $R(s)$ antes de calcular la señal de error, 615
Principio de separación. Principio que establece que la ley de realimentación de estados completos y el observador se pueden diseñar de manera independientes y cuando se conectan funcionan como un sistema de control integrado de la forma deseada (es decir, estable), 666, 671
Principio de superposición. Ley que dice que si dos entradas se escalan y suman y se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo, entonces la salida será idéntica a la suma de las salidas debidas a las entradas individuales escaladas cuando se introducen a través del mismo sistema, 43
Principio del argumento, 501. *Véase también* Teorema de Cauchy
Principio del modelo interno. Principio que dice que si $G_c(s)G(s)$ contiene la entrada $R(s)$, entonces la salida $y(t)$ seguirá a $r(t)$ asintóticamente (en el estado estacionario) y el seguimiento es robusto, 751
Problema de diseño continuo, 35, 125, 188, 238, 306, 350, 424, 491, 574, 652, 717, 777, 826
Problema regulador, 667
Proceso. Dispositivo, planta o sistema bajo control, 2
Productividad. Relación entre la salida física y la entrada física de un proceso industrial, 8
Programación orientada a objetos, 92
Programas en MATLAB, 842
Propiedad de rechazo de perturbación, 217
Puente, Desfiladero de Tacoma, 313
Puente de Tacoma Narrows, 313
Punto de ruptura. Punto del eje real donde el lugar se separa del eje real del plano s

R

Raíces dominantes. Raíces de la ecuación característica que representan o dominan a la respuesta transitoria en lazo cerrado, 254, 374, 459
Rama sobre el grafo de flujo de señal, 72
Razón de amortiguamiento. Medida de amortiguamiento; un número sin dimensión para la ecuación característica de segundo orden, 50
estimación de la, 258
Realimentación, 3
amplificador, 196
coste de, 208
de variables de estado, 684, 686
diseño de control de estado completo, 666
ejemplos, 7
negativa, 11
positiva, 31
sistema de control, 2
Realimentación de variables de estado. Cuando la señal de control para el proceso es una función directa de todas las variables de estado, 659
Realimentación negativa. La señal de salida se realimenta de forma que se resta de la señal de entrada, 11
Realimentación positiva. La señal de salida se realimenta de forma que se suma a la señal de entrada, 31, 70
Realimentación unitaria. Sistema de control con realimentación donde la ganancia del lazo de realimentación es uno, 96
Red de adelanto de fase. Red que proporciona un ángulo de fase positivo en el rango de frecuencias de interés. Por lo tanto, una red de adelanto puede lograr que el sistema tenga un margen de fase adecuado, 585
Red de adelanto. *Véase* Red de adelanto de fase
Red de adelanto-retardo. Red con las características de ambas, red de adelanto y red de retardo, 612
Red de compensación en cascada. Red compensadora colocada en cascada o en serie con el proceso del sistema, 585
Red de integración. Red que actúa en parte como un integrador, 601
Red de retardo. *Véase* Red de retardo de fase
Red de retardo de fase. Red que proporciona un ángulo de fase negativo y una atenuación significativa en el rango de frecuencias de interés, 588
Red en T gemela, 449
Red pasa-todo. Sistema de fase mínima que pasa todas las frecuencias con igual ganancia, 452
Reducción multilazo, 99
Regla de la diferencia regresiva. Método computacional de aproximación de la derivada de una función dada por
$$\dot{x}(kT) \simeq \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T},$$
donde $t = kT$, T es el tiempo de muestreo y $k = 1, 2, \ldots$, 812
Regla de lazo de Mason. Regla que permite al usuario obtener una función de transferencia al trazar caminos y lazos dentro de un sistema, 128
Regulador centrífugo. Dispositivo mecánico para controlar la velocidad de una máquina de vapor, 4
Regulador cuadrático lineal. Controlador óptimo diseñado para minimizar el índice de comportamiento cuadrático
$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})\, dt,$$
donde $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ son parámetros de diseño, 693
Reloj de agua, 32
Representación en el espacio de estados. Modelo en el dominio del tiempo compuesto de la ecuación diferencial de estado $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ y la ecuación de salida $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$, 135
Residuos. Constantes k_i, asociadas con el desarrollo en fracciones simples de la salida $Y(s)$, cuando la salida se escribe en un formato residuo-polo, 49
Respuesta acotada, 312
Respuesta de un sistema de segundo orden, efectos del tercer polo y del cero, 253
Respuesta en estado estacionario. Componente de la respuesta del sistema que permanece a lo largo del tiempo siguiendo cualquier señal de inicio, 244
Respuesta en frecuencia. Respuesta en estado estacionario de un sistema una señal de entrada sinusoidal, 433
diagramas, 435
lazo cerrado, 522
medidas, 456, 477
utilizando MATLAB, 465
Respuesta plana, 617
Respuesta temporal, mediante una evaluación en tiempo discreto y matriz de transición de estado, 154, 158
Respuesta transitoria. Componente de la respuesta del sistema que desaparece con el tiempo, 54, 197, 244
de un sistema de segundo orden, 248
relación con la colocación de la raíz, 259
Retenedor de orden cero. Modelo matemático de una operación muestreada de mantenimiento de datos con función de transferencia de entrada salida dada por
$$G_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}, 792$$
Riesgo. Incertidumbres que se engloban dentro de las consecuencias no previstas de un diseño, 19
Robot. Computador programable integrado con un manipulador multifuncional reprogramable empleado para una diversidad de tareas, 11, 16, 231
diseño de laboratorio, 84
móvil, control de dirección, 263
Robot de laboratorio, 16, 84
Robot móvil, 263
Ruido, 204

S

Salto. Vacío entre lo que se intenta (o visualiza) como producto o dispositivo y lo real, forma práctica del diseño final, 19
Segmentos del lugar de las raíces sobre el eje real. Lugar de las raíces situado en una sección del eje real a la izquierda de un número impar de polos y ceros, 360
Seguimiento de una orden. Aspecto importante del diseño de un sistema de control en donde se sigue una entrada de referencia, 681
Semiconductores, 12
Sensibilidad de la raíz. Sensibilidad de las raíces cuando un parámetro cambia de su valor normal; o el cambio incremental en la raíz dividido por el cambio

proporcional del parámetro, 383, 725
Sensibilidad del sistema. *Véase también* Sensibilidad. Razón del cambio en la función de transferencia del sistema al cambio en el parámetro del sistema, 195, 725
Sensibilidad logarítmica. Medida de la sensibilidad del comportamiento del sistema a cambios específicos de los parámetros, dado por $S_K^T(s) = \frac{\partial T(s)/T(s)}{\partial K/K}$, donde $T(s)$ es la función de transferencia del sistema y K es el parámetro de interés, 383
Sensibilidad. *Véase también* Sensibilidad del sistema del sistema de control a variaciones de parámetros, 194
de las raíces de los sistemas de control, 383
Señal de entrada de prueba. Señal de entrada utilizada como una prueba estándar de la capacidad de un sistema de responder adecuadamente, 245
Señal de entrada parabólica, 245
Señal de error. Diferencia entre la salida deseada, $R(s)$ y la salida real $Y(s)$; por lo tanto $E(s) = R(s) - Y(s)$, 96, 193
Señal de impulso, 245
Señal de perturbación. Señal de entrada no necesitada que afecta a la señal de salida del sistema, 191, 201
Señal de realimentación. Medida de la salida del sistema usado con realimentación para controlar al sistema, 3
Señal Sine Wave, Simulink, 853
Señales de entrada, 245
Serie de Taylor. Serie de potencia definida por $g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (x - x_0)^m$. Para $m < \infty$, la serie es una aproximación que se utiliza para linealizar funciones y modelos de sistemas, 44
Servicio de Rentas Públicas Internas, 14
Símbolos en MATLAB, 845
utilizados en el libro, 39-40
Simplificación de sistemas lineales, 276
Simulación. Modelo de un sistema que se emplea para investigar la conducta de un sistema utilizando las señales de entrada reales, 78
Simulación por computador, 78
Simulaciones de alta fidelidad, 79
Simulink, 849
y comportamiento del sistema, 282
Síntesis. Proceso mediante el cual se crea nuevas configuraciones físicas. Combinación de elementos o dispositivos separados para formar un todo coherente, 19
Sistema. Interconexión de elementos y dispositivos para un objetivo deseado, 2
Sistema amortiguado críticamente, 89
Sistema condicionalmente estable, 416
Sistema controlable. Sistema con entrada de control sin restricciones u que transfiere cualquier estado inicial $x(0)$ a cualquier otro estado $x(t)$, 660
Sistema de bobinado de un rotor, 620, 626
Sistema de calentamiento térmico, 66
Sistema de control. Interconexión de componentes que forman una configuración de sistema que proporcionará una respuesta deseada, 2
diseño, 23
ejemplos modernos, 9
utilizando características de MATLAB, 214
Sistema de control biológico, 14
Sistema de control con realimentación en lazo cerrado. Sistema que utiliza una medida de la salida y la compara con la salida deseada, 3, 193
Sistema de control con realimentación y señales de perturbación, 201
Sistema de control de dirección, de un automóvil, 9, 12, 491
de un barco, 568
de un robot móvil, 263, 285
Sistema de control de robot, 321, 396
Sistema de control de un manipulador láser, 393
Sistema de control de velocidad, 198, 215
para automóviles, 230
para generadores de potencia, 413
para trenes de laminación de acero, 201
Sistema de control digital. Sistema de control que utiliza señales digitales y un computador digital para controlar un proceso, 788
Sistema de control manual, 11
Sistema de control multivariable. Sistema con más de una variable de entrada y más de una variable de salida, 3
Sistema de control óptimo. Sistema cuyos parámetros se ajustan de tal forma que el índice de comportamiento alcanza un valor extremo, 267, 683
Sistema de control submarino, 182
Sistema de control variable con el tiempo. Sistema para el cual uno o más parámetros pueden variar con el tiempo, 131
Sistema de datos muestreado. Sistema en el que parte de él actúa con datos muestreados (variables muestreadas), 790
Sistema de datos muestreados en lazo-cerrado, 798
Sistema de dosificación de insulina, 26, 297
Sistema de lectura de una unidad de disco. *Véase* Ejemplo de diseño secuencial
Sistema de máquina taladradora, 209
Sistema de realimentación de lazo múltiple, 72
Sistema de realimentación pseudocuantitativa, 757
Sistema de segundo orden, comportamiento de, 248

Sistema de taladrado del túnel del canal inglés, 209, 217
Sistema de test automático, 696, 701
Sistema directo, 192. *Véase también* Sistema de control en lazo abierto
Sistema estable. Sistema dinámico con una respuesta del sistema acotada para una entrada acotada, 312
Sistema inestable, 313
Sistema observable. Sistema con una salida que posee una componente debida a cada variable de estado, 663
Sistema resorte-masa-amortiguador, 50, 89
Sistema sobreamortiguado, 52, 89
Sistema subamortiguado, 41, 52, 89
Sistemas con parámetros inciertos, 731
Sistemas con realimentación, historia de, 4
Sistemas con realimentación no unitaria, 265
Sistemas de agricultura, 14
Sistemas de control digital que utilizan MATLAB, 813
Sistemas de control por computador, 787, 788
para plantas de energía eléctrica, 13
Sistemas lineales, 43
simplificación de, 276
simplificado, 285
Sistemas mecatrónicos, 19
Sistemas microelectromecánicos (MEMS), 20
Sobreamortiguado. Caso en que la razón de amortiguamiento es $\zeta > 1$, 89
Sobreelongación. Cantidad que la respuesta de salida del sistema sobrepasa la respuesta deseada, 218, 249
Sobreelongación máxima, 249
Subamortiguado. Caso en que la razón de amortiguamiento es $\zeta < 1$, 41
Superposición, principio de, 43

T

Tablas, de ecuaciones diferenciales para elementos, 40
de diagramas de funciones de transferencias, 550
de funciones de transferencias, 64-67
de parejas de transformadas de Laplace, 47
variables through y across para sistemas físicos, 39
Tacómetro, 66
Telescopio espacial, 36, 279, 746
Telescopio Hubble, 36, 279
Teorema de Cauchy. Si un contorno enlaza Z ceros y P polos de $F(s)$, el correspondiente contorno enlaza al origen del plano-$F(s)$ $N = Z - P$ veces en el sentido horario, 501
Teorema del valor final. Teorema que dice que $\lim_{t\to\infty} y(t)$, donde $Y(s)$ es la transformada de laplace de $y(t)$, 50
Tiempo de asentamiento. Tiempo que se necesita para que la salida del sistema se establezca dentro de un porcentaje determinado de la amplitud de entrada, 218, 250
Tiempo de pico. Tiempo que le lleva a un sistema responder a una entrada en escalón y alcanzar un pico en la respuesta, 249
Tiempo de retardo. Retardo temporal puro T, de forma que lo que suceda en un tiempo t en un punto del sistema ocurre en otro punto del sistema pasado un tiempo $t + T$, 530
Tiempo de subida. Tiempo que le lleva a un sistema responder a una entrada en escalón y alcanzar una respuesta igual a un porcentaje de la magnitud de la entrada, 249
Transformación conforme. Transformación que retiene los ángulos en el plano s en el plano $F(s)$, 499
Transformación de contorno. Un contorno o trayectoria en un plano se transforma en otro plano mediante na relación $F(s)$, 499
Transformación de contornos en el plano s, 499
Transformaciones de diagrama de bloque, 69
Transformada de Fourier. Transformación de una función del tiempo, $f(t)$ en el dominio de la frecuencia, 435
Transformada de Laplace. Transformación de una función $f(t)$ del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia $F(s)$, 46
Transformada de Laplace inversa, 46
Transformada Z, 793
Transporte de cinta magnética, 414
Trazador X-Y, 623
Tren de engranaje, 63, 66
Tren de laminación de acero, 14, 201, 531, 771

U

Untitled, Simulink, 851

V

Valor final. Valor que la salida alcanza después que todos los constituyentes del transitorio han decaído. También se conoce como el valor en estado estacionario, 50
de respuesta de $y(t)$, 50
Valor máximo de la respuesta en frecuencia. Un par de polos complejos resultarán en un valor máximo de la respuesta en frecuencia que ocurre en la frecuencia resonante, 447
Variable through, 39
Variable-across, 39
Variables análogas, 42
Variables de estado. Conjunto de variables que definen el sistema, 132
Variables de estado físicas, 147-148
Variables de fase. Variables de estado asociadas con la forma canónica de variables de fase, 142

Variables físicas. Variables de estado que representan las variables físicas del sistema, 147
Variables para sistemas físicos, 39
Variaciones de parámetro y sensibilidad del sistema, 194
Vector de estado. Vector que contiene todas (n) las variables de estado, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 135
Vehículo de aterrizaje lunar, 638
Vehículo explorador de Marte, 212, 350, 425, 783
Vehículo operado remotamente, 534, 545
Vehículos aéreos no tripulados (UAVs), 16
Vehículos de combustible híbrido, 21
Vyshnegradskii, J. A., 5, 316

W

Watt, James, 4

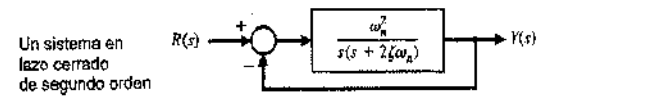
Variables y parámetros estándar

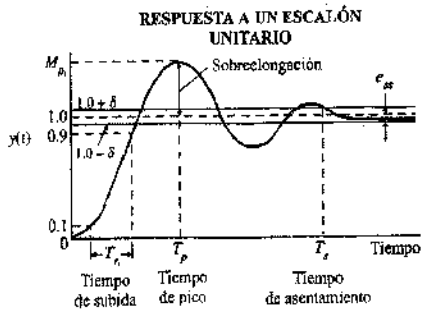
$Y(s)$	salida
$D(s)$	perturbación
$E(s)$	error de seguimiento
$G(s)$	planta o proceso
$G_c(s)$	compensador
$G_p(s)$	prefiltro
$H(s)$	función de transferencia del bloque de realimentación
K	ganancia constante
$q(s)$	polinomio en s, la ecuación característica
$R(s)$	entrada u orden
s	variable compleja de la transformada de Laplace
S_G^T	función de sensibilidad
T	periodo de muestreo; también retardo de tiempo
T_s	tiempo de asentamiento
$T(s)$	función de transferencia en lazo cerrado
$T_d(s)$	par de perturbación
$x(t)$	variable de estado
ω_n	frecuencia natural
z	variable compleja de la transformada-z
ζ	razón de amortiguamiento

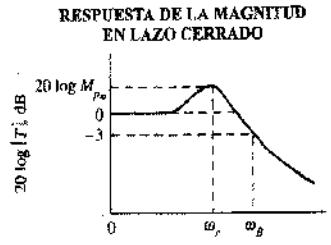
Historia moderna de los sistemas de control

1769	Regulador centrífugo a bolas de James Watt para el control de velocidad de la máquina de vapor
1868	Análisis de James C. Maxwell del regulador centrífugo a bolas
1880	Análisis de estabilidad de E. J. Routh
1910	Elmer A. Sperry desarrolla el giróscopo y el piloto automático
1927	Amplificador de realimentación de H. S. Black
1932	Criterio de estabilidad de H. Nyquist
1938	H. W. Bode introduce el diagrama de frecuencia logarítmica
1947	Se dispone de las cartas de Nichols para el análisis en frecuencia
1948	Walter R. Evans desarrolla el método del lugar de las raíces
1958	J. Engelberger y G. Devol construye el primer robot industrial moderno
1969	W. Hoff desarrolla el microprocesador
1970	Utilización generalizada del control por realimentación por variables de estado
1980	Diseño de sistemas de control robusto ampliamente estudiado
1990	Empresas de fabricación orientadas a la exportación promueven la automatización
1994	Control por realimentación se utiliza ampliamente en los automóviles
1998-2003	Avances en micro- y nanotecnología. Se desarrollan las primeras micromáquinas inteligentes y se crean el funcionamiento de las nanomáquinas.

Tablas seleccionadas y fórmulas de diseño







■ Tiempo de asentamiento (dentro del 2% del valor final)

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

■ Magnitud máxima ($\zeta \leqslant 0.7$)

$$M_{p\omega} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

■ Tanto por ciento de sobreelongación

$$M_p = 1 + e^{-(\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \quad \text{y} \quad \text{P.O.} = 100e^{-(\pi/\sqrt{1-\zeta^2})}$$

■ Tiempo hasta el pico

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

■ Frecuencia resonante ($\zeta \leqslant 0.7$)

$$\omega_n = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

■ Tiempo de subida (tiempo de subida desde el 10% al 90% del valor final)

$$T_r = \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n} \qquad (0.3 \leqslant \zeta \leqslant 0.8)$$

■ Ancho de banda ($0.3 \leqslant \zeta \leqslant 0.8$)

$$\omega_B = (-1.196\zeta + 1.85)\omega_n$$

Controlador PID:

$$G_c(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s}$$